

*Н.О. ФОМЕНКО, О.О. ЛАРІН***ІНТЕГРАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ ОБМЕЖЕНЬ У ГЛИБОКУ СИМВОЛЬНУ ОПТИМІЗАЦІЮ
ДЛЯ ВІДКРИТТЯ В'ЯЗКО-ПРУЖНИХ МОДЕЛЕЙ**

У роботі розглядається актуальна проблема математичного моделювання механічної поведінки полімерних матеріалів, виготовлених методом адитивних технологій, зокрема термопластичного поліуретану (TPU). Широке застосування 3D-друку для створення гнучких конструкцій та біомедичних імплантатів вимагає точних конститутивних моделей, здатних описувати складні нелінійні явища, такі як гістерезис, релаксація напружень та залежність від швидкості деформації. Традиційні феноменологічні підходи, що базуються, наприклад, на гіперпружних потенціалах (Муні-Рівліна, Огдена), мають суттєві обмеження: необхідність апріорного вибору структури моделі, наприклад, фіксації кількості гілок релаксації, та складність ідентифікації значної кількості параметрів. Це часто призводить до проблеми неєдності розв'язку та ускладнює прогнозування поведінки матеріалу в умовах складної анізотропії, спричиненої пошаровим друкуванням. З іншого боку, сучасні методи машинного навчання, такі як нейронні мережі, хоча і забезпечують високу точність апроксимації, діють як «чорні скриньки» і не надають фізично інтерпретованих залежностей, придатних для подальшого аналізу. Метою роботи є розробка методу автоматизованого пошуку визначальних рівнянь в'язко-пружності, що поєднує гнучкість data-driven підходів із фізичною змістовністю. Запропоновано використання модифікованого фреймворку глибокої символічної оптимізації (DSO) з інтеграцією «механічного змісту». Алгоритм здійснює пошук аналітичної форми потенціалу пружної деформації та функції релаксації. Застосування методу до експериментальних даних дозволило отримати компактне визначальне рівняння, яке забезпечує високу точність апроксимації та коректно описує релаксаційну поведінку 3D-друкованого матеріалу. Результати свідчать про перспективність символічної регресії для автоматизації створення прозорих («white-box») матеріальних моделей у скінченно-елементному аналізі.

Ключові слова: в'язко-пружність, символічна регресія, конститутивне моделювання, релаксація напружень

*N. FOMENKO, O. LARIN***INTEGRATION OF MECHANICAL CONSTRAINTS INTO DEEP SYMBOLIC
OPTIMIZATION FOR DISCOVERING VISCOELASTIC MODELS**

The current issue of mathematically modelling the mechanical behavior of polymer materials produced using additive technologies, specifically thermoplastic polyurethane (TPU), is addressed in the paper. The widespread use of 3D printing to create flexible structures and biomedical implants necessitates accurate constitutive models that can describe complex nonlinear phenomena, such as hysteresis, stress relaxation, and strain rate dependence. Traditional phenomenological approaches, based, for example, on hyperelastic potentials (Mooney-Rivlin, Ogden), have significant limitations: the need for a priori selection of the model structure, such as fixing the number of relaxation branches, and the complexity of identifying a large number of parameters. This often leads to the problem of solution inconsistency, which complicates the prediction of material behavior under conditions of complex anisotropy caused by layer-by-layer printing. On the other hand, modern machine learning methods, such as neural networks, although providing high approximation accuracy, act as “black boxes” and do not provide physically interpretable dependencies suitable for further analysis. The goal of this work is to develop a method for the automated search for determining equations of viscoelasticity that combines the flexibility of data-driven approaches with physical meaningfulness. We propose the use of a modified deep symbolic optimization (DSO) framework with the integration of “mechanical content.” The algorithm searches for the analytical form of the elastic deformation potential and relaxation function. Applying the method to experimental data has yielded a compact determining equation that provides high approximation accuracy and accurately describes the relaxation behavior of 3D-printed materials. The results indicate the promise of symbolic regression for automating the creation of transparent (“white-box”) material models in finite element analysis.

Keywords: viscoelasticity, symbolic regression, constitutive modeling, stress relaxation

Список літератури

1. Somarathna, H., Raman, S., Mohotti, D., Mutalib, A., & Badri, K. (2019). Hyper-viscoelastic constitutive models for predicting the material behavior of polyurethane under varying strain rates and uniaxial tensile loading. *Construction and Building Materials*, 236, 117417. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117417>.
2. Zhao, B., Hu, J., Chen, W., Chen, J., & Jing, Z. (2020). A nonlinear uniaxial stress-strain constitutive model for viscoelastic membrane materials. *Polymer Testing*, 90, 106633. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106633>.
3. Adrover-Monserrat, B., García-Vilana, S., Sánchez-Molina, D., Llumà, J., Jerez-Mesa, R., & Travieso-Rodríguez, J. A. (2022). Viscoelastic Characterization of a Thermoplastic Elastomer Processed through Material Extrusion. *Polymers*, 14(14), 2914. <https://doi.org/10.3390/polym14142914>.
4. Fazekas, B., & Goda, T. J. (2021). Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence. *International Journal of Mechanical Sciences*, 210, 106735. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106735>.
5. Reyes, S. I., Vassiliou, M. F., & Konstantinidis, D. (2024). Experimental characterization and constitutive modeling of thermoplastic polyurethane under complex uniaxial loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 186, 105582. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105582>.
6. Guo, X., Wang, E., Yang, H., & Zhai, W. (2024). Mechanical characterization and constitutive modeling of additively-manufactured polymeric materials and lattice structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 189, 105711. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105711>.
7. Su, X., Wang, Y., & Peng, X. (2020). An anisotropic visco-hyperelastic model for thermally-actuated shape memory polymer-based woven fabric-reinforced composites. *International Journal of Plasticity*, 129, 102697. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102697>.
8. Abdolazizi, K. P., Linka, K., & Cyron, C. J. (2023). Viscoelastic constitutive artificial neural networks (vCANNs) – A framework for data-driven anisotropic nonlinear finite viscoelasticity. *Journal of Computational Physics*, 499, 112704. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112704>.
9. Peirlinck, M., Linka, K., Hurtado, J. A., & Kuhl, E. (2023). On automated model discovery and a universal material subroutine for hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116534. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116534>.
10. Abdusalamov, R., Hillgärtner, M., & Itskov, M. (2023). Hyperelastic material modelling using symbolic regression. *PAMM*, 22(1). <https://doi.org/10.1002/pamm.202200263>.
11. Hou, J., Chen, X., Wu, T., Kuhl, E., & Wang, X. (2024). Automated data-driven discovery of material models based on symbolic regression: A case study on the human brain cortex. *Acta Biomaterialia*, 188, 276–296. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2024.09.005>.
12. B. K. Petersen, T. N. Mundhenk, S. K. Kim, C. P. Santiago, and J. T. Kim, "Deep symbolic regression," 2021.
13. Haupt, P. (2002). Continuum Mechanics and Theory of Materials. In *Advanced texts in physics*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
14. N. Fomenko and O. Larin, "Symbolic Regression-Based Models for Hyperelastic Material," 2024 IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2024, pp. 1-5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61434.2024.10878012>.
15. Wang, Y., Wagner, N., & Rondinelli, J.M. Symbolic regression in materials science. *MRS Communications* 9, 793–805 (2019). <https://doi.org/10.1557/mrc.2019.85>.

References (transliterated)

1. Somarathna, H., Raman, S., Mohotti, D., Mutalib, A., & Badri, K. (2019). Hyper-viscoelastic constitutive models for predicting the material behavior of polyurethane under varying strain rates and uniaxial tensile loading. *Construction and Building Materials*, 236, 117417. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2019.117417>.
2. Zhao, B., Hu, J., Chen, W., Chen, J., & Jing, Z. (2020). A nonlinear uniaxial stress-strain constitutive model for viscoelastic membrane materials. *Polymer Testing*, 90, 106633. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106633>.
3. Adrover-Monserrat, B., García-Vilana, S., Sánchez-Molina, D., Llumà, J., Jerez-Mesa, R., & Travieso-Rodríguez, J. A. (2022). Viscoelastic Characterization of a Thermoplastic Elastomer Processed through Material Extrusion. *Polymers*, 14(14), 2914. <https://doi.org/10.3390/polym14142914>.
4. Fazekas, B., & Goda, T. J. (2021). Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence. *International Journal of Mechanical Sciences*, 210, 106735. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106735>.
5. Reyes, S. I., Vassiliou, M. F., & Konstantinidis, D. (2024). Experimental characterization and constitutive modeling of thermoplastic polyurethane under complex uniaxial loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 186, 105582. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105582>.
6. Guo, X., Wang, E., Yang, H., & Zhai, W. (2024). Mechanical characterization and constitutive modeling of additively-manufactured polymeric materials and lattice structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 189, 105711. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2024.105711>.
7. Su, X., Wang, Y., & Peng, X. (2020). An anisotropic visco-hyperelastic model for thermally-actuated shape memory polymer-based woven fabric-reinforced composites. *International Journal of Plasticity*, 129, 102697. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2020.102697>.
8. Abdolazizi, K. P., Linka, K., & Cyron, C. J. (2023). Viscoelastic constitutive artificial neural networks (vCANNs) – A framework for data-driven anisotropic nonlinear finite viscoelasticity. *Journal of Computational Physics*, 499, 112704. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2023.112704>.
9. Peirlinck, M., Linka, K., Hurtado, J. A., & Kuhl, E. (2023). On automated model discovery and a universal material subroutine for hyperelastic materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 418, 116534. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.116534>.
10. Abdusalamov, R., Hillgärtner, M., & Itskov, M. (2023). Hyperelastic material modelling using symbolic regression. *PAMM*, 22(1). <https://doi.org/10.1002/pamm.202200263>.
11. Hou, J., Chen, X., Wu, T., Kuhl, E., & Wang, X. (2024). Automated data-driven discovery of material models based on symbolic regression: A case study on the human brain cortex. *Acta Biomaterialia*, 188, 276–296. <https://doi.org/10.1016/j.actbio.2024.09.005>.
12. B. K. Petersen, T. N. Mundhenk, S. K. Kim, C. P. Santiago, and J. T. Kim, "Deep symbolic regression," 2021.
13. Haupt, P. (2002). Continuum Mechanics and Theory of Materials. In *Advanced texts in physics*. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-04775-0>.
14. N. Fomenko and O. Larin, "Symbolic Regression-Based Models for Hyperelastic Material," 2024 IEEE 5th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2024, pp. 1-5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61434.2024.10878012>.
15. Wang, Y., Wagner, N., & Rondinelli, J.M. Symbolic regression in materials science. *MRS Communications* 9, 793–805 (2019). <https://doi.org/10.1557/mrc.2019.85>.

Надійшла (received) 10.12.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Фоменко Наталія Олександрівна (Fomenko Nataliia) – аспірантка кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії НТУ «ХПІ», email: Nataliia.Fomenko@infiz.khpi.edu.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0781-6806>.

Ларін Олексій Олександрович (Larin Oleksiy) – доктор технічних наук, Член-кореспондент Національної академії наук України, професор кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії НТУ «ХПІ», email: Oleksiy.Larin@khpі.edu.ua, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>.