

*Д. М. КРАСІЙ, О. О. ЛАРІН*

## ФІЗИЧНО-КЕРОВАНА РЕГРЕСІЯ НА ОСНОВІ ГАУСІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НАКОПИЧЕННЯ ВТОМНОГО ПОШКОДЖЕННЯ

Здатність точно прогнозувати ймовірність відмови технічних систем є критично важливим завданням інженерії надійності, особливо для компонентів, що піддаються стохастичному циклічному навантаженню. Прогнозування параметрів вичерпання ресурсу суттєво ускладнюється нестационарною дисперсією (гетероскедастичністю) процесів втоми та значним дефіцитом даних на пізніх етапах експлуатації. Стандартні підходи, що керуються виключно даними, зокрема класична стаціонарна регресія гаусівських процесів (GPR), зазвичай виявляються неспроможними забезпечити надійну екстраполяцію за межі навчального діапазону. В зонах відсутності даних такі моделі схильні до повернення до нульового апріорного середнього, що грубо порушує фундаментальні фізичні закони накопичення пошкоджень, такі як незворотність процесу деградації та монотонне зростання невизначеності стану (стохастичної ентропії пошкодження у сенсі незворотного накопичення мікроструктурних дефектів). У цьому дослідженні запропоновано методологію фізично-керованої регресії на основі ланцюгових гаусівських процесів (Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression, PG-CGPR). Гіпотеза дослідження полягає в тому, що інтеграція фізичних знань безпосередньо в імовірнісну архітектуру дозволить компенсувати брак емпіричних даних. Методологія базується на зв'язуванні кількох латентних процесів через спільну функцію правдоподібності: один процес моделює середній тренд накопичення пошкоджень, а інший - залежну від вхідних даних дисперсію. Шляхом поєднання жорсткого, заснованого на фізиці параметричного апріорного середнього з гнучкою непараметричною коваріаційною структурою (використовуючи нестационарні ядра), модель структурно забезпечує дотримання ключових обмежень: монотонності накопичення пошкоджень, мінімальної (фізично узгодженої) початкової невизначеності та коректного зростання дисперсії з часом. Для верифікації запропонованого підходу проведено серію чисельних експериментів на синтетичних наборах даних, що моделюють кінетику лінійного (модель Пальмгрена-Майнера) та нелінійного (модель Качанова-Работнова) накопичення пошкоджень в умовах обмеженої вибірки. Порівняльний аналіз із базовими моделями підтвердив, що PG-CGPR ефективно усуває проблему помилкового затухання тренду при екстраполяції. Якісно встановлено, що, на відміну від суто даних-орієнтованих підходів, які демонструють нефізичне звуження невизначеності, запропонований метод формує реалістичні довірчі інтервали. Вони коректно відображають фізичну природу розсіяного пошкодження, розширюючись у міру віддалення від навчальних даних, що є необхідною умовою для консервативної та надійної оцінки залишкового ресурсу.

**Ключові слова:** Ланцюгові гаусівські процеси, фізично-кероване машинне навчання, екстраполяція, втомне пошкодження, гетероскедастичність, модель Пальмгрена-Майнера, модель Качанова-Работнова.

*D. KRASII, O. LARIN*

## PHYSICS-GUIDED GAUSSIAN PROCESS REGRESSION FOR FATIGUE DAMAGE ACCUMULATION

The ability to accurately forecast the failure probability of engineering systems is a critical task in reliability engineering, particularly for components subjected to stochastic cyclic loading. Predicting durability parameters is significantly challenged by the non-stationary variance (heteroscedasticity) of fatigue processes and a substantial scarcity of data during the late stages of service life. Standard data-driven approaches, including classical stationary Gaussian Process Regression (GPR), typically fail to provide reliable extrapolation beyond the training range. In regions lacking data, such models tend to revert to a zero-mean prior, which fundamentally violates physical laws of damage accumulation, such as the irreversibility of the degradation process and the monotonic growth of damage state uncertainty (stochastic damage entropy in the sense of irreversible accumulation of microstructural defects). This study proposes and substantiates a methodology for Physics-Guided Chained Gaussian Process Regression (PG-CGPR). The research hypothesis posits that integrating physical knowledge directly into the probabilistic architecture can compensate for the lack of empirical data. The methodology is based on coupling multiple latent processes through a shared likelihood function: one process models the mean damage accumulation trend, while the other models the input-dependent variance. By fusing a rigid, physics-based parametric prior mean with a flexible non-parametric covariance structure (utilizing non-stationary kernels), the model structurally enforces compliance with key constraints: monotonicity of damage accumulation, near-zero (physically consistent) initial uncertainty, and the correct growth of variance over time. To verify the proposed approach, a series of numerical experiments was conducted on synthetic datasets simulating the kinetics of linear (Palmgren-Miner model) and non-linear (Kachanov-Rabotnov model) damage accumulation under limited sampling conditions. Comparative analysis with baseline models confirmed that PG-CGPR effectively eliminates the issue of erroneous trend damping during extrapolation. Qualitatively, it was established that, unlike purely data-driven approaches, which exhibit unphysical narrowing of uncertainty, the proposed method produces realistic confidence intervals. These intervals correctly reflect the physical nature of scattered damage, expanding as they move away from the training data, which is a prerequisite for a conservative and reliable assessment of the remaining useful life.

**Keywords:** Chained Gaussian Processes, Physics-Guided Machine Learning, Extrapolation, Fatigue Damage, Heteroscedasticity, Palmgren-Miner Model, Kachanov-Rabotnov Model.

**1. Вступ.** У реальних умовах експлуатації інженерних конструкцій такі змінні, як зовнішнє навантаження, умови роботи та властивості матеріалів, є невизначеними за своєю природою. Отже, кількісна оцінка цих стохастичних елементів на етапі

проектування та управління ресурсом є важливою. Хоча класичні методи надійності, такі як моделювання Монте-Карло (Monte Carlo Simulation, MCS) [1] та його варіанти зі зменшенням дисперсії з підмножинним моделюванням (Subset Simulation) [2], забезпечують

© Д. М. Красій, О. О. Ларін 2025



**Дослідницька стаття:** Цю статтю опубліковано видавництвом НТУ «ХП» у збірнику «Вісник Національного технічного університету «ХП» Серія: Динаміка та міцність машин». Ця стаття поширюється за міжнародною ліцензією [Creative Common Attribution \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). **Конфлікт інтересів:** Автор/и заявив/или про відсутність конфлікту.



високу точність прогнозу, проте вимагають надмірно великої кількості модельних обчислень. Методи надійності першого та другого порядку (First/Second Order Reliability Method, FORM/SORM) [3, 4] пропонують обчислювальну ефективність, але часто мають труднощі з високонелінійними граничними станами, характерними для накопичення втоми. Методи сурогатного моделювання, зокрема регресія гаусівських процесів (Gaussian Process Regression, GPR) [5], пропонують практичну альтернативу завдяки своїй непараметричній гнучкості та вбудованій можливості кількісної оцінки невизначеності. Ранні методології для комп'ютерних моделювань [6] та байєсівського калібрування [7] затвердили GPR як стандартний інструмент для апроксимації складних фізичних симуляторів. Однак застосування стандартного GPR для прогнозування втомного пошкодження обмежене нездатністю суворо дотримуватися фізичних законів. Для розв'язку цієї проблеми було запропоновано два підходи: фізично-інформоване навчання "на основі операторів" (наприклад, PINNs), яке вбудовує нев'язки диференціальних рівнянь у частинних похідних (Partial Differential Equations, PDE) у функцію втрат, і фізично-інформоване навчання "на основі обмежень". Це дослідження використовує останній підхід, який також називають "фізично-орієнтованим" (Physics-Guided) навчанням. У ньому фізичні закони (монотонність, граничні умови) забезпечуються через структурний вибір функції середнього значення гаусівського процесу та штрафні доданки на похідні функції втрат, а не шляхом розв'язання диференціального рівняння безпосередньо в ядрі.

Останні огляди фізично-обмеженого машинного навчання [8] класифікують забезпечення обмежень за трьома основними методологіями: трансформовані функції правдоподібності, апроксимації на основі сплайнів [9] та методи віртуальних спостережень. Хоча ці методи ефективні для стандартної регресії, вони часто не можуть впоратися зі специфічною комбінацією гетероскедастичності та монотонності, необхідною для аналізу втоми.

Альтернативні підходи, такі як навчання "глибоких ядер" (Deep Kernel learning) [10] або фізично-інформовані нейронні мережі (Physics-Informed Neural Networks, PINNs) [11], намагаються вирішити це шляхом поєднання можливостей вилучення ознак нейронних мереж з імовірнісними виходами. Хоча вони дуже гнучкі, їм часто бракує фізичної інтерпретованості, необхідної для прогнозування надійності в критично важливих системах безпеки. Крім того, хоча існують суворі спектральні методи для забезпечення граничних умов [12], поширення таких методів на обмеження нерівності, такі як монотонність [13], залишається аналітично нетривіальним завданням у гетероскедастичному контексті.

Для вирішення цих обмежень у цьому дослідженні запропоновано методологію фізично-орієнтованої регресії на основі ланцюгових гаусівських

процесів (PG-CGPR). Термін "ланцюгові" стосується поєднання кількох прихованих гаусівських процесів через спільну функцію правдоподібності, де один GP моделює середній відгук, а інший – залежну від вхідних даних дисперсію [14].

**2. Постановка задачі.** Метою є прогнозування накопиченого пошкодження  $D(t)$  та пов'язаної з ним невизначеності протягом терміну служби  $t \in [0, T_{fail}]$ , маючи зашумлені навчальні дані лише з раннього етапу експлуатації  $t \in [0, T_{train}]$ , де  $T_{train} < T_{fail}$ . Задача екстраполяції може бути формально сформульована так. Маючи:

- Навчальні спостереження  $D_{train} = \{(t_i, y_i)\}_{i=1}^N$  де  $t_i \in [0, T_{train}]$ .
- Модель спостереження  $y_i = D(t_i) + \epsilon_i$ , де  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t_i))$ .

Мета – оцінити:

- Прогнозне середнє  $E[D(t^*)|D_{train}]$  для  $t^* \in [T_{train}, T_{fail}]$ .
- Прогнозну дисперсію  $\text{Var}[D(t^*)|D_{train}]$ .
- Розподіл часу відмови  $p(T_{fail}|D_{train})$ .

З урахуванням фізичних обмежень:

- Початкова умова  $D(0) = 0$ .
- Монотонність  $\frac{dD}{dt} \geq 0$  для всіх  $t$ .
- Гранична дисперсія (мінімальна початкова невизначеність):  $\text{Var}(D(0)) \approx 0$ .

**Фізика пошкодження.** Для перевірки запропонованої методології розглядаються дві фундаментальні моделі накопичення пошкоджень, виведені з механіки континуального пошкодження:

1. Лінійне пошкодження (модель Пальмгрена-Майнера): представляє багатоциклову втому при постійній амплітуді навантаження. Швидкість пошкодження є постійною, що призводить до лінійної траєкторії [15]:

$$D(t) = \frac{t}{T_{fail}}, \quad (1)$$

де  $T_{fail}$  – час відмови, а  $D \in [0, 1]$  – нормалізований стан пошкодження.

2. Нелінійне континуальне пошкодження (модель Качанова-Работнова): представляє складну деградацію, де пошкодження прискорюється з часом (наприклад, взаємодія повзучості та втоми або корозійна втома). Кінетичне рівняння визначається як [16]:

$$\frac{dD}{dt} = B \left( \frac{\sigma}{1-D} \right)^m, \quad (2)$$

де  $B$  – залежний від матеріалу коефіцієнт швидкості пошкодження,  $\sigma$  – амплітуда прикладеного напруження, а  $m$  – показник ступеня напруження (зазвичай  $m \geq 1$ ). Ця модель фіксує прискорення пошкодження по мірі наближення матеріалу до руйнування. Інтегрування цього диференціального рівняння дає характерну опуклу траєкторію, використану в нелінійних експериментах:

$$D(t) = 1 - [1 - (m + 1)B\sigma^m t]^{\frac{1}{m+1}}, \quad (3)$$

Це рівняння передбачає теоретичний час розриву

$$T_{fail} = \frac{1}{(m + 1)B\sigma^m}, \quad (4)$$

де  $D(T_{fail}) = 1$ , а швидкість пошкодження наближається до нескінченності.

**Проблематика забезпечення фізичних обмежень.** Критична складність у моделюванні цих процесів полягає в забезпеченні фізичних інваріантів, зокрема початкової умови  $D(0) = 0$  та монотонності  $dD/dt \geq 0$ . Стандартний GPR за своєю суттю не має обмежень. Інформацію про монотонність можна включити шляхом обумовлення процесу похідних у віртуальних точках [17]. Подібні підходи з використанням усічених гаусівських розподілів у дискретних точках [18] або оцінки обмежень лінійних операторів [19] виявилися ефективними для стаціонарних процесів. Проте застосування цих ітераційних або декомпозиційних обмежень [20] стає обчислювально обтяжливим у межах методології ланцюгових гаусівських процесів, де кілька прихованих процесів оптимізуються одночасно. Тому потрібне рішення, яке балансує між суворим дотриманням фізичних законів та обчислювальною ефективністю, необхідною для гетероскедастичного моделювання.

**Проблема моделювання дисперсії.** На відміну від стандартних задач регресії, "шум" у даних втомі виникає через стохастичну природу мікроструктурної еволюції та частоти навантаження [21]. Згідно з Центральною граничною теоремою, застосованою до послідовностей стохастичного навантаження, дисперсія пошкодження зростає з часом  $\text{Var}(t) \propto t$  [22]. Стандартний GPR припускає гомоскедастичність (постійну дисперсію шуму) [23], що порушує фізику поширення тріщин. Хоча існують підходи гетероскедастичного GPR [24], вони зазвичай мають труднощі з екстраполяцією в регіонах з розрідженими даними [25]. Для моделей машинного навчання, навчених на розріджених даних, початкова умова  $D(0) = 0$  та  $\text{Var}(0) \approx 0$  слугує критичним "якорем", запобігаючи прогнозуванню високої невизначеності на початку терміну служби. Варто зазначити, що  $\text{Var}(0) \approx 0$  є ідеалізацією: у реальних системах початкова невизначеність не є строго нульовою через виробничі допуски, неоднорідність мікроструктури та варіабельність умов експлуатації. Проте для задачі регресії на масштабі часу всього життєвого циклу ця початкова дисперсія є нехтовно малою порівняно з накопиченою невизначеністю, що виправдовує використання наближення.

**3. Методологія. Регресія гаусівських процесів.** Гаусівські процеси (GP) забезпечують гнучкий імовірнісний фреймворк для регресії, визначаючи розподіл над функціями, заданими функцією середнього  $m(t)$  та коваріаційним ядром  $k(t, t')$ . У стандартному формулюванні GPR спостережувані дані

у моделюються як сума прихованої функції  $f(t)$  та незалежного гаусівського шуму  $\varepsilon$ :

$$y(t) = f(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2), \quad (5)$$

де пріорний розподіл для  $f$  визначається як:

$$f \sim \mathcal{GP}(m(t), k(t, t')), \quad (6)$$

де функція середнього  $m(t)$  кодує апіорні знання про очікуваний тренд, а коваріаційне ядро  $k(t, t')$  визначає гладкість та кореляційну структуру. Загальним вибором є ядро радіально-базисної функції (Radial Basis Function, RBF):

$$k_{\text{RBF}}(t, t') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(t - t')^2}{2l^2}\right), \quad (7)$$

де  $\sigma_f^2$  – дисперсія сигналу, а  $l$  – параметр довжини масштабу.

Прогнози в неспостережуваних точках отримуються шляхом обумовлення спільного гаусівського розподілу на навчальних даних, що дає як прогнозне середнє, так і дисперсію. Для тестової точки  $t^*$ , прогнознний розподіл має вигляд:

$$f(t^*) | y \sim \mathcal{N}(\mu^*, (\sigma^*)^2), \quad (8)$$

де:

$$\begin{aligned} \mu^* &= m(t^*) + k_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1} (y - m) \\ (\sigma^*)^2 &= k(t^*, t^*) - k_*^T (K + \sigma_n^2 I)^{-1} k_* \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $K$  – матриця ядра розміром  $N \times N$  з  $K_{ij} = k(t_i, t_j)$ ,  $k_* = [k(t_1, t^*), \dots, k(t_N, t^*)]^T$ , та  $m = [m(t_1), \dots, m(t_N)]^T$ .

Однак стандартний GPR передбачає гомоскедастичність – дисперсія шуму  $\sigma_n^2$  є постійною в усій вхідній області. Це припущення фізично несумісне з накопиченням втомного пошкодження, де дисперсія стану пошкодження накопичується з часом через стохастичну інтеграцію мікроструктурних дефектів. Використання моделі з постійним шумом для таких даних призводить до поганої кількісної оцінки невизначеності, переоцінки ризику на ранніх етапах експлуатації та недооцінки на пізніх етапах.

Щоб усунути це обмеження, використовується структура ланцюгових гаусівських процесів (CGPR) [26]. CGPR розширює стандартне формулювання, використовуючи кілька незалежних прихованих GP для моделювання різних параметрів функції правдоподібності. У цьому дослідженні функція правдоподібності параметризується двома ланцюговими процесами:

1.  $f_1(t)$  – моделює тренд накопичення пошкодження.
2.  $f_2(t)$  – моделює логарифм дисперсії процесу.

Для оптимізації обчислювання використовується розріджене варіаційне оцінювання (Sparse Variational Inference, SVI). Цей метод апроксимує повний апостеріорний розподіл, використовуючи набір з  $M$  індукуючих змінних (псевдовходів), зменшуючи складність навчання з  $\mathcal{O}(N^3)$  до  $\mathcal{O}(NM^2)$ , де  $N$  –

кількість точок даних..

**Гібридна архітектура ланцюгових гаусівських процесів.** Застосовується архітектура ланцюгових гаусівських процесів, де спостережуване пошкодження у моделюється як:

$$y_i = f_1(t_i) + \varepsilon_i \cdot \text{softplus}(f_2(t_i)), \quad (10)$$

Іє  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ , а  $\text{softplus}(x) = \log(1 + e^x)$  обрано як функцію зв'язку.

Функція  $\text{softplus}$  є кращою за експоненту, яка є стандартною в гетероскедастичному GPR, через:

- Чисельну стабільність. На відміну від експоненти,  $\text{softplus}$  асимптотично наближається до нуля для великих від'ємних вхідних даних, запобігаючи запобігаючи арифметичному переповненню знизу (underflow).
- Лінійну асимптотичну поведінку. Для  $x \gg 0$ ,  $\text{softplus}(x) \approx x$ , що дозволяє моделі вивчати поліноміальне зростання дисперсії.
- Фізичну інтерпретованість. Дисперсія  $\sigma^2(t) = \text{softplus}(f_2(t))^2$  може зростати поліноміально, а не експоненціально.

#### Фізично-керовані функції середнього ( $f_1$ ).

Стандартні GP використовують функцію нульового середнього ( $m(t) = 0$ ). Вона замінюється параметричним апіорним середнім, адаптованим до фізики набору даних.

- Для лінійних даних: використовується лінійне середнє  $m(t) = w \cdot t$ , де параметр  $w$  (або ваги  $\{w_i\}$ ) може бути ініціалізований за допомогою регресії найменших квадратів на навчальних даних і залишатися здатним до навчання під час оптимізації GP.
- Для нелінійних даних: використовується поліноміальне середнє  $m(t) = \sum w_i t^i$ . Параметри  $w$  так само ініціалізуються через регресію на навчальних даних. Це гарантує, що в області екстраполяції, де вплив ядра слабшає, прогноз повертається до цього фізично обґрунтованого тренду, а не до нуля.

**Фізично-керована дисперсія ( $f_2$ ).** Для забезпечення обмеження мінімальної початкової дисперсії  $\text{Var}(0) \approx 0$  та гарантування монотонного зростання невизначеності вводиться спеціалізоване середнє логарифмічної дисперсії з нулем у початку:

$$m_2(t) = \gamma \cdot \log(t + \epsilon), \quad (11)$$

де  $\gamma > 0$  – параметр масштабу, який можна навчати, а  $\epsilon > 0$  – мала константа, що забезпечує чисельну стабільність при  $t = 0$ .

Оскільки  $f_2$  моделює логарифм дисперсії, при  $t \rightarrow 0$ ,  $\log(t) \rightarrow -\infty$ , змушуючи прогнозовану дисперсію  $\exp(f_2)$  наближатися до нуля. Для степеневому закону деградації з показником  $b$  використовується функція зсунутого степеневому середнього:

$$m_2(t) = \alpha \cdot t^{b/2} - \beta, \quad (12)$$

де  $\alpha > 0$  – параметр масштабу,  $\beta \gg 0$  зміщення,

яке можна навчати.

Це формулювання структурно забезпечує граничну умову  $\sigma(0) \approx 0$ . При  $t = 0$ , приховане значення дорівнює  $-\beta$ . Отже,  $\sigma(0) = \ln(1 + e^{-\beta}) \approx e^{-\beta} \approx 0$  для великих  $\beta$ , ефективно обмежуючи початкову невизначеність до фізично малих значень.

**Коваріаційна структура. Процес середнього ( $f_1$ ).** Структура ядра адаптується до моделі пошкодження. Для лінійного пошкодження композитне ядро поєднує лінійний компонент для моделювання тренду з RBF для локальних залишків:

$$k_{f_1}(t, t') = k_{\text{Lin}}(t, t') + k_{\text{RBF}}(t, t'), \quad (13)$$

де  $k_{\text{Lin}}(t, t') = \sigma_{\text{lin}}^2 \cdot t \cdot t'$  – лінійне ядро з дисперсією  $\sigma_{\text{lin}}^2$ .

Для степеневому закону пошкодження композитне ядро з поліноміальним степенем, що відповідає показнику пошкодження, фіксує траєкторію прискорення:

$$k_{f_1}(t, t') = k_{\text{Poly}}(t, t') + k_{\text{RBF}}(t, t'), \quad (14)$$

**Процес дисперсії ( $f_2$ ).** Вибір ядра суттєво впливає на поведінку екстраполяції та визначає індуктивне зміщення моделі. Лінійне ядро обрано через його здатність забезпечувати необмежене монотонне зростання в екстраполяції, що узгоджується з фізикою накопичення дисперсії; RBF-компонент додано для моделювання локальних відхилень від лінійного тренду. Поліноміальне ядро досліджується як альтернатива, що здатна фіксувати прискорене зростання дисперсії на пізніх етапах деградації. Досліджуються дві структури:

- **Linear + RBF.** Лінійний компонент забезпечує монотонне зростання дисперсії, тоді як RBF фіксує локальну гетероскедастичність:

$$k_{f_2}(t, t') = \sigma_{\text{lin}}^2 (t \cdot t') + \sigma_{\text{rbf}}^2 \exp\left(-\frac{(t - t')^2}{2l^2}\right), \quad (15)$$

- **Polynomial kernel.** Такі ядра є гнучкими, проте поліноміальні ядра степеня  $d \geq 2$  можуть вивчати від'ємні коефіцієнти вищих порядків, спричиняючи зменшення дисперсії в області екстраполяції:

$$k_{f_2}(t, t') = (\sigma^2 + t \cdot t')^d \quad (16)$$

**Фізично-керована функція втрат.** Щоб забезпечити обмеження без обчислювального навантаження ітеративної адаптивної вибірки [27], у цьому дослідженні використовується метод на основі штрафів з використанням фіксованої сітки точок віртуальних спостережень. Модель навчається шляхом мінімізації композитної функції втрат. Оскільки точний апостеріорний розподіл є нерозв'язним, максимізується нижня межа свідчень (Evidence Lower Bound, ELBO), доповнену фізичними штрафними доданками. Цільова функція визначається як:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - \sum_{i=1}^N E_{q(f_1, f_2)} [\log p(y_i | f_1(t_i), f_2(t_i))] \\ &+ \text{KL}(q(u) | p(u)) + \sum_k \lambda_k \mathcal{L}_{p, h, y}^{(k)}, \end{aligned} \quad (17)$$

де перший доданок – це очікувана логарифмічна правдоподібність (обчислюється за допомогою вибірки Монте-Карло або квадратури Гаусса-Ерміта), другий доданок – дивергенція Кульбака-Лейблера між варіаційним розподілом  $q(u)$  та апіорним  $p(u)$ , а останні доданки – фізично-інформовані штрафи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\text{ELBO} \\ &+ \lambda_{\text{growth}} \sum_i \text{ReLU} \left( \left. \frac{d\sigma^2}{dt} \right|_{t_i} - r_{\text{max}} \right) \\ &+ \lambda_{\text{mono}} \sum_i \text{ReLU} \left( - \left. \frac{d\sigma^2}{dt} \right|_{t_i} \right) \\ &+ \lambda_{\text{max}} \sum_i \text{ReLU}(\sigma^2(t_i) - \sigma_{\text{max}}^2), \end{aligned} \quad (18)$$

де три штрафні доданки забезпечують обмежену швидкість зростання дисперсії нижче  $r_{\text{max}}$ , монотонно неспадну дисперсію та обмеження максимальної дисперсії на рівні  $\sigma_{\text{max}}^2$ . Початкові умови  $D(0) = 0$  та  $\text{Var}(0) \approx 0$  забезпечуються структурно через дизайн функції середнього, а не як явні штрафні умови. Похідні  $\frac{d\sigma^2}{dt}$ , необхідні для штрафів, обчислюються за допомогою автоматичного диференціювання.

**Деталі реалізації.** Для посилення граничної умови  $D(0) = 0$  додається  $n_s$  синтетичних якірних точок при  $t = 0$  з малим гаусівським шумом  $y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$ , де  $\sigma_s \ll 1$ . Це забезпечує прямий нагляд за початковою умовою. Крім того, індукуючі точки ініціалізуються за трендом регресії (лінійна або степеневе підгонка до навчальних даних). Для  $f_2$  перша індукуюча точка встановлюється у велике від'ємне значення, щоб забезпечити  $\sigma(0) \approx 0$ . Усі експерименти використовують оптимізатор Adam зі швидкістю навчання  $\eta = 0.01$  та параметрами імпульсу за замовчуванням ( $\beta_1 = 0.9$ ,  $\beta_2 = 0.999$ ). Навчання триває до 30,000 епох з контрольними точками кожні 100 епох. Рання зупинка активується після 50 послідовних контрольних точок без покращення втрат на валідації (поріг мінімального покращення  $\delta = 10^{-4}$ ). Гіперпараметри ядер (довжини масштабу, дисперсії сигналу) оптимізуються спільно з варіаційними параметрами шляхом максимізації ELBO. Для забезпечення стабільності навчання ланцюгової архітектури застосовано ініціалізацію індукуючих значень за трендом попередньої регресії найменших квадратів, а коефіцієнти штрафів  $\lambda_k$  фіксовано на основі попереднього налаштування. Для запобігання чисельній нестабільності матриць коваріації використана мала регуляризаційна добавка  $10^{-4}$  при декомпозиції Хоурського, а всі обчислення виконано у подвійній точності (float64). Зведені

значення гіперпараметрів наведено в табл. 2.

Усі чисельні дослідження реалізовано мовою Python 3.12 з використанням бібліотеки GFlow 2.9 для побудови гаусівських процесів, TensorFlow 2.19 як обчислювального бекенду та TensorFlow Probability 0.25 для імовірнісних операцій. Оптимізація виконувалася за допомогою NumPy 2.1 та SciPy 1.15. Вихідний код доступний за запитом до авторів.

Таблиця 1 – Гіперпараметри моделі PG-CGPR

Параметр	Позначення	Значення
Індукуючі точки	M	60
Швидкість навчання (Adam)	$\eta$	0.01
Параметри імпульсу	$\beta_1, \beta_2$	0.9, 0.999
Максимальна кількість епох	-	30 000
Рання зупинка	-	5 000 епох
Початкова дисперсія шуму	$\sigma_n^2$	0.1
Числова стабільність	-	$10^{-4}$
Ядро $f_1$ (RBF-компонента)		
Дисперсія	$\sigma_{\text{rbf}}^2$	0.01
Довжина масштабу	$l_{\text{rbf}}$	0.1
Ядро $f_2$ (Linear + RBF)		
Дисперсія лінійного ядра	$\sigma_{\text{lin}}^2$	0.5
Дисперсія RBF	$\sigma_{\text{rbf}}^2$	0.1
Довжина масштабу RBF	$l_{\text{rbf}}$	0.3
Зміщення $f_2$ ( $\beta$ у рівн. 12)	$\beta$	8.0
Штрафні коефіцієнти		
Обмеження швидкості зростання	$\lambda_{\text{growth}}$	1.0
Монотонність дисперсії	$\lambda_{\text{mono}}$	0.1
Максимальна дисперсія	$\lambda_{\text{max}}$	0.1
$\text{Var}(0) \approx 0$	$\lambda_{\text{Var}_0}$	10.0

**4. Дизайн експерименту.** Для імітації реалістичного шуму датчиків та неоднорідності матеріалу, еталонні дані були спотворені гетероскедастичним гаусівським шумом, залежним від стану пошкодження. Для лінійного сценарію стандартне відхилення шуму масштабується з квадратним коренем часу, що узгоджується з вінерівським процесом:

$$\sigma(t) = \frac{k_1}{\zeta} \sqrt{t} \quad (19)$$

Для сценарію степеневому закону шум масштабується з квадратним коренем накопиченого пошкодження для імітації залежної від стану волатильності, що узгоджується з фізичною інтуїцією, що дисперсія масштабується зі щільністю мікродефектів:

$$\sigma(t) = \eta \sqrt{D(t)} \quad (20)$$

Модель оцінювалася на двох невеликих синтетичних наборах даних, що представляють фундаментальні закони накопичення пошкоджень,

кожен з яких тестувався в трьох сценаріях доступності даних:

- Початковий етап експлуатації: навчання на 30% життєвого циклу.
- Середній етап експлуатації: навчання на 50% життєвого циклу.
- Пізній етап експлуатації: навчання на 75% життєвого циклу.

**Еталонна модель.** Стандартна регресія ланцюгових гаусівських процесів (CGPR) з апіорними значеннями нульового середнього та ядрами RBF слугує еталонною моделлю, представляючи сучасний стан гетероскедастичної GP регресії без фізичних обмежень.

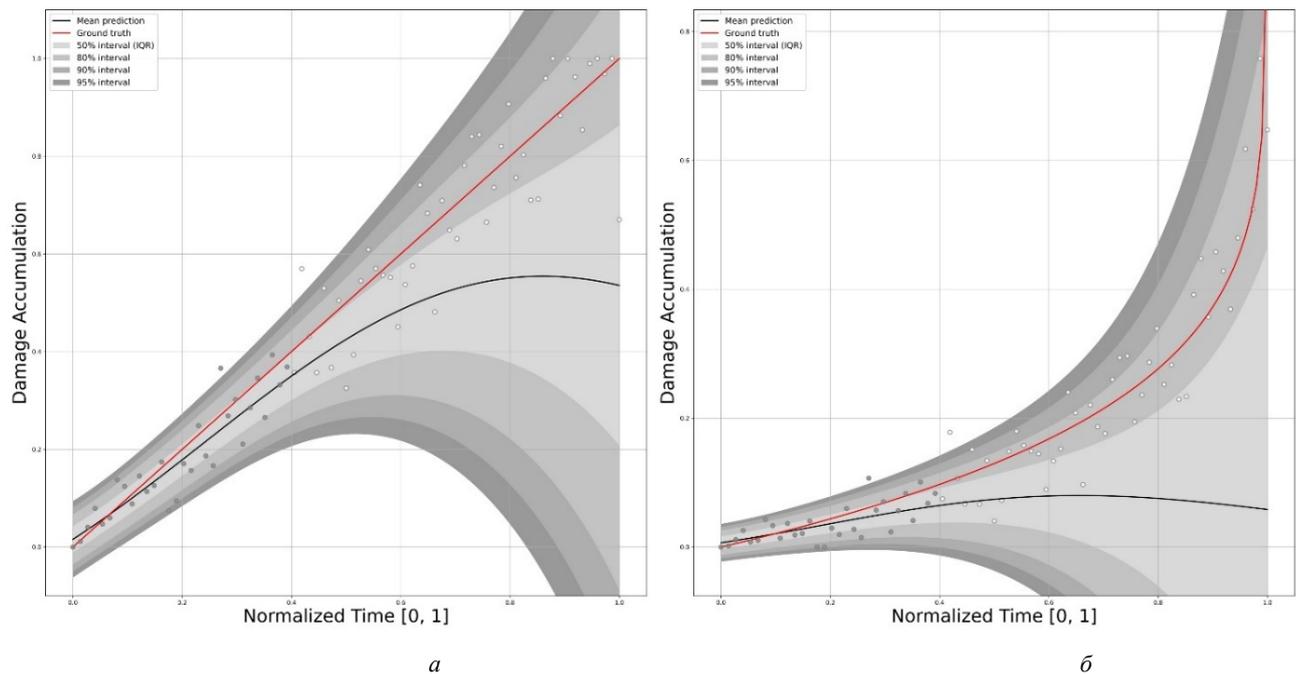


Рис. 1 – Фундаментальне обмеження стандартного CGPR: в області екстраполяції ( $t > 0.5$ ) прогнози повертаються до нульового середнього, порушуючи фізику монотонного накопичення пошкоджень: *a* – лінійний закон, *б* – степеневий закон.

Натомість, рис. 2 демонструє, що фізично-керований CGPR (PG-CGPR) успішно зберіг траєкторію накопичення пошкоджень, уникнувши помилкового затухання тренду. Параметрична функція середнього відіграла роль надійного «каркаса», що спрямовує екстраполяцію навіть у тих зонах, де локальний вплив коваріаційного ядра природним чином зменшувався. Як видно з верхнього ряду графіків, це дозволило прогнозу (чорна крива) залишатися узгодженим з еталонною траєкторією (червона крива).

Критичне покращення також спостерігалось в оцінці дисперсії, що проілюстровано в нижньому ряду графіків. У той час як базова модель генерує довірчий інтервал постійної ширини (ігноруючи фізику процесу), PG-CGPR коректно прогнозує розширення зони невизначеності в міру вичерпання ресурсу. Пунктирна лінія прогнозованої дисперсії точно відтворює теоретичний закон зростання дисперсії пошкодження (суцільна лінія), фіксуючи накопичення стохастичного шуму процесу, що є необхідною

**Метрики оцінки.** Для оцінки моделі використовувалися: середня абсолютна помилка у відсотках (MAPE), коефіцієнт детермінації ( $R^2$ ), покриття 95% довірчого інтервалу та монотонність дисперсії наводяться як для навчальної, так і для екстраполяційної областей.

**5. Результати та обговорення.** У сценарії лінійного пошкодження стандартний CGPR (з апіорними значеннями нульового середнього) продемонстрував "повернення до середнього" в зоні екстраполяції. Як показано на рис. 1, стандартна модель прогнозує, що пошкодження вирівнюється горизонтально за межами навчального діапазону – фізично небезпечна недооцінка ризику.

умовою для реалістичного аналізу надійності.

Рис. 3 демонструє еволюцію прогнозів для різних етапів вичерпання ресурсу: частка життя (life fraction, LF)  $LF = 0.3$  та  $LF = 0.75$ . Як видно з графіків, запропонований метод PG-CGPR зберігає фізично коректну траєкторію навіть при значному дефіциті даних, тоді як базова модель схильна до помилкового "повернення до нуля". Ця перевага підтверджується кількісними показниками в табл. 2: хоча зі збільшенням обсягу доступних даних точність обох моделей очікувано зростає, розрив у ефективності залишається суттєвим. Наприклад, на ранньому етапі ( $LF = 0.3$ ) для лінійного закону похибка прогнозування (MAPE) знижується з 90,9% у базовій моделі до 3,8% у PG-CGPR, що підтверджує критичну важливість фізичних обмежень в умовах високої невизначеності. Усі наведені метрики представляють результати з тим самим початковим значенням (seed). Від'ємні значення  $R^2$  вказують на те, що базова модель працює гірше, ніж прогнозування середнього горизонтальною лінією, підкреслюючи режим відмови "повернення до нуля".

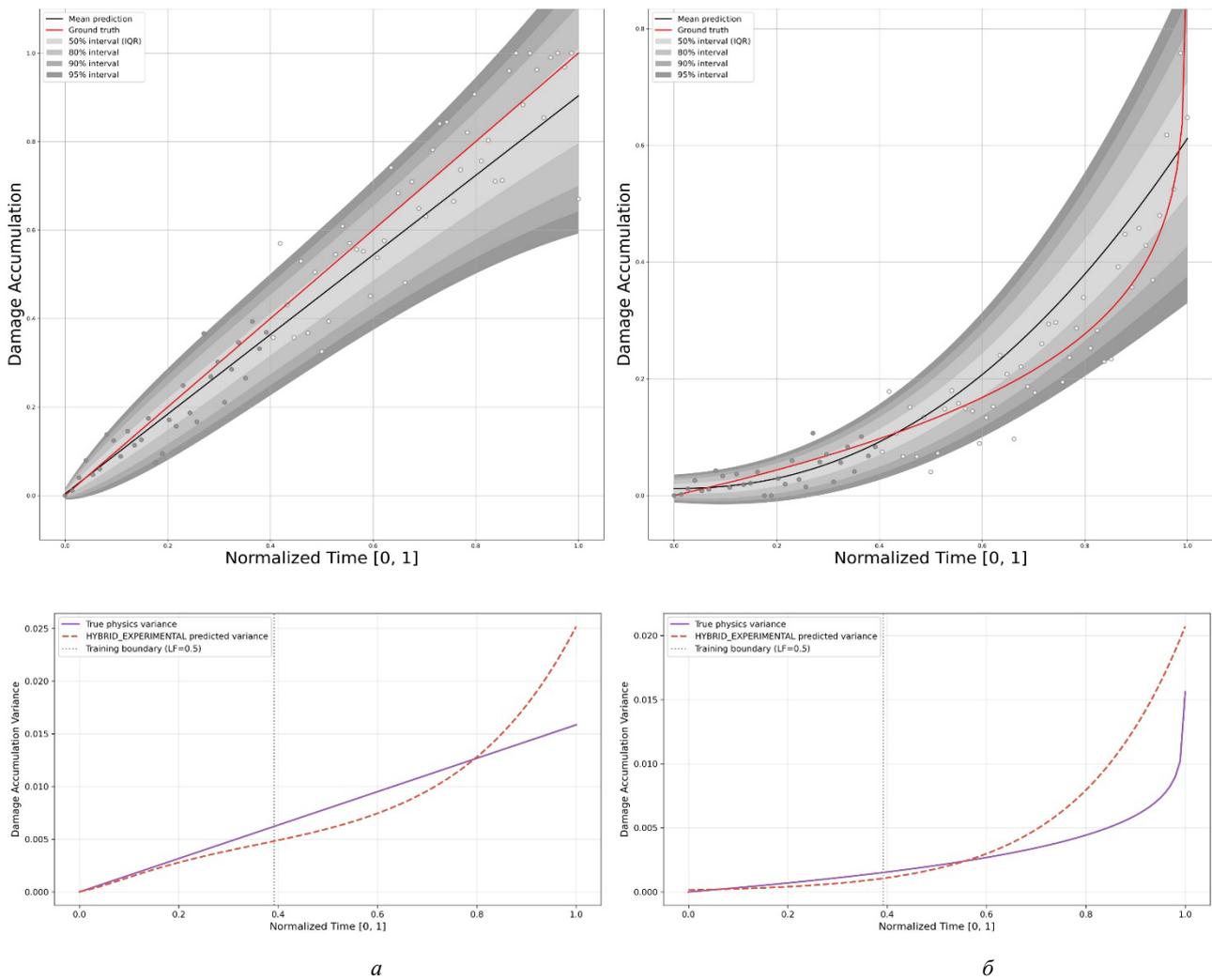


Рис. 2 – Демонстрація роботи PG-CGPR: а – сценарій лінійного пошкодження; б – сценарій пошкодження за степеневим законом. У верхньому ряду показано прогнози PG-CGPR після досягнення збіжності (чорна лінія) у порівнянні з еталонними даними (червона лінія). У нижньому ряду показано, що PG-CGPR (пунктирна лінія) коректно відтворює зростаючу дисперсію накопичення пошкоджень, узгоджуючись із теоретичною фізичною дисперсією (суцільна лінія) .

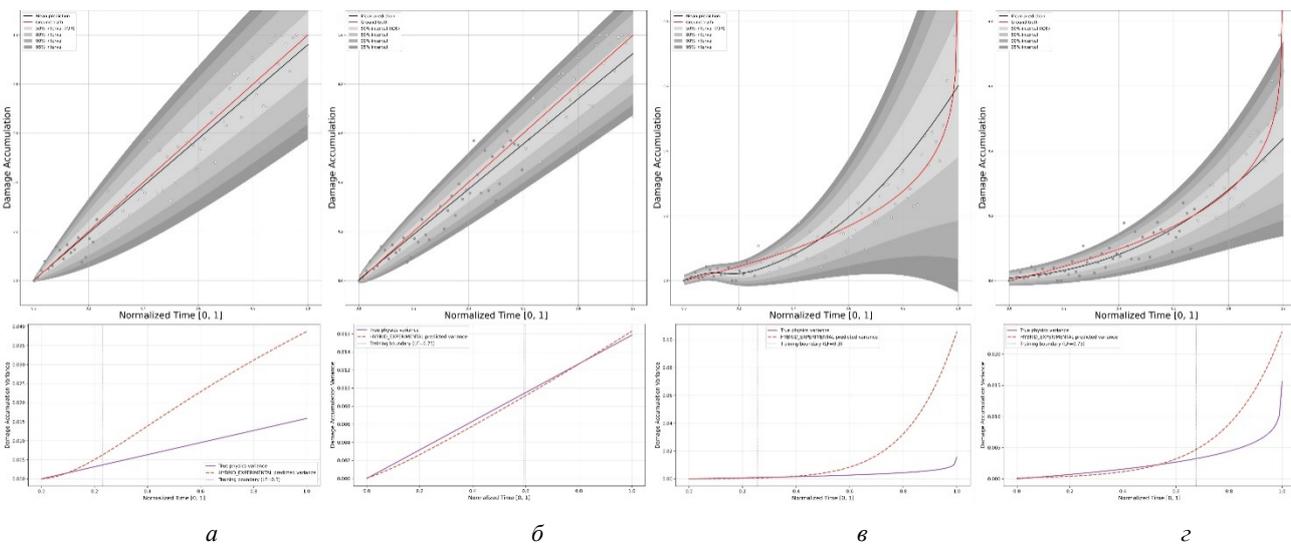


Рис. 3 – Ефективність екстраполяції PG-CGPR для інших часток вичерпання ресурсу (LF): а – результати для лінійного пошкодження при  $LF = 0.3$ ; б – результати для лінійного пошкодження при  $LF = 0.75$ ; в – результати для степеневому закону при  $LF = 0.3$ ; г – результати для степеневому закону при  $LF = 0.75$ . Як і очікувалося, точність прогнозування підвищується зі збільшенням обсягу доступних даних.

Таблиця 2 – Ефективність екстраполяції

Модель	Набір даних	LF	MAPE, % (тест)	R <sup>2</sup>
CGPR	Лінійний	0.3	90.9	-9.47
CGPR	Степеневий	0.3	95.3	-2.19
PG-CGPR	Лінійний	0.3	3.8	0.98
PG-CGPR	Степеневий	0.3	21.2	0.77
CGPR	Лінійний	0.5	28.9	-2.14
CGPR	Степеневий	0.5	67.8	-2.001
PG-CGPR	Лінійний	0.5	9.6	0.74
PG-CGPR	Степеневий	0.5	27.3	0.62
CGPR	Лінійний	0.75	18.4	-4.55
CGPR	Степеневий	0.75	57.3	-2.50
PG-CGPR	Лінійний	0.75	7.5	0.18
PG-CGPR	Степеневий	0.75	8.9	0.37

**6. Висновки.** У цьому дослідженні розроблено та оцінено структуру фізично-керованої регресії на основі ланцюгових гаусівських процесів (PG-CGPR) для прогнозування накопичення втомного пошкодження в умовах дефіциту даних.

Встановлено, що використання стандартних стаціонарних ядер (наприклад, RBF) у задачах прогнозування втоми є фундаментально помилковим. В області екстраполяції такі моделі демонструють «повернення до середнього», прогножуючи незмінний рівень пошкодження, що порушує фізичний закон монотонного накопичення дефектів і призводить до небезпечної недооцінки ймовірності відмови.

Запропонований підхід, що поєднує жорстке параметричне середнє (засноване на фізичних законах) із гнучкою коваріаційною структурою, дозволяє ефективно екстраполювати тренд навіть за межами навчальної вибірки. Параметричні апріорні значення слугують «каркасом», що утримує прогноз у фізично допустимих межах, тоді як ланцюгова структура GP моделює локальні відхилення

Метод PG-CGPR продемонстрував значне зниження похибки прогнозування порівняно з базовою моделлю. Для лінійного закону накопичення пошкоджень помилка (MAPE) на етапі 50% ресурсу знизилася з 28,9% до 9,5%, а для нелінійного степеневого закону – з 67,8% до 27,3%. Це підтверджує здатність моделі адаптуватися до різних фізичних механізмів деградації.

На відміну від гомоскедастичних підходів, розроблена модель коректно відтворює гетероскедастичність втомного процесу. Введення нестационарних ядер (лінійних, поліноміальних) для процесу дисперсії дозволяє моделювати зростання стохастичної невизначеності пошкодження з часом, забезпечуючи реалістичні довірчі інтервали, що розширюються в міру віддалення від навчальних даних, що є критично важливим для консервативної оцінки надійності. Слід зазначити, що верифікація

проведена виключно на синтетичних даних, згенерованих на основі детерміністичних моделей Пальмгрена-Майнера та Качанова-Работнова з контрольованим гетероскедастичним шумом. Такий підхід обрано навмисно: він створює контрольоване середовище, де еталонна траєкторія та закон зростання дисперсії відомі аналітично, що дозволяє ізолювати внесок саме фізичних обмежень у точність прогнозу від впливу інших факторів. Водночас синтетична валідація має суттєві обмеження. По-перше, вона не дозволяє оцінити стійкість методу до невідповідності моделі - ситуації, коли реальний механізм деградації відхиляється від обраної параметричної форми апріорного середнього. По-друге, реальні дані характеризуються складнішою структурою шуму та взаємодією механізмів деградації. Перспективним напрямком подальших досліджень є застосування PG-CGPR до клінічних даних прогресії атеросклеротичного ураження судин, де модель Качанова-Работнова може бути інтерпретована як опис накопичення пошкодження судинної стінки, а гетероскедастичність природно відображає міжпацієнтну мінливість перебігу захворювання.

#### Список літератури

- Song C., Kawai R. Monte Carlo and variance reduction methods for structural reliability analysis: A comprehensive review. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2023, vol. 73, 103479. <https://doi.org/10.1016/j.probenmech.2023.103479>
- Thaler D., Dhulipala S. L. N., Bamer F., Markert B., Shields M. D. Reliability analysis of complex systems using subset simulations with Hamiltonian Neural Networks. *Structural Safety*. 2024, vol. 109, 102475. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2024.102475>
- Hasofer A. M., Lind N. C. An exact and invariant first-order reliability format. *Journal of Engineering Mechanics*. 1974, vol. 100, no. 1, pp. 111–121. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001848>
- Hu Z., Mansour R., Olsson M., Du X. Second-order reliability methods: a review and comparative study. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2021, vol. 64, no. 6, pp. 3233–3263. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03013-y>
- Rasmussen C. E., Williams C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, The MIT Press Publ., 2005. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>
- Sacks J., Welch W. J., Mitchell T. J., Wynn H. P. Design and Analysis of Computer Experiments. *Statist. Sci.* 1989, vol. 4, no. 4. <https://doi.org/10.1214/ss/1177012413>
- Kennedy M. C., O'Hagan A. Bayesian Calibration of Computer Models. *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*. 2001, vol. 63, no. 3, pp. 425–464. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00294>
- Swiler L., Gulian M., Frankel A., Safta C., Jakeman J. A Survey of Constrained Gaussian Process Regression: Approaches and Implementation Challenges. *arXiv*. 2020. <https://doi.org/10.1615/JMachLearnModelComput.2020035155>
- Bachoc F., López-Lopera A. F., Roustant O. Sequential construction and dimension reduction of Gaussian processes under inequality constraints. *SIAM Journal on Mathematics of Data Science*. 2022, vol. 4, no. 2, pp. 772–800. <https://doi.org/10.1137/21M1407513>
- Chang C., Zeng T. A hybrid data driven-physics constrained Gaussian process regression framework with deep kernel for uncertainty quantification. *arXiv*. 2022. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4154355>
- Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F. Scientific machine learning through physics-informed neural networks: Where we are and what's next. *Journal of Scientific*

- Computing. 2022, vol. 92, no. 3, Article 88. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>
12. Padilla-Segarra A., Noble P., Roustant O., Savin É. Physics-informed, boundary-constrained Gaussian process regression for the reconstruction of fluid flow fields. arXiv. 2025. doi: 10.48550/ARXIV.2507.17582.
  13. Agrell C. Gaussian processes with linear operator inequality constraints. arXiv. 2019. doi: 10.48550/ARXIV.1901.03134.
  14. Saul A. D., Hensman J., Vehtari A., Lawrence N. D. Chained Gaussian Processes (Version 1). arXiv. 2016. Available at: <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1604.05263>.
  15. Miner M. A. Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics. 1945, vol. 2, no. 3, pp. A159–A164. <https://doi.org/10.1115/1.4009458>.
  16. Larin O., Vodka O. A probability approach to the estimation of the process of accumulation of the high-cycle fatigue damage considering the natural aging of a material. International Journal of Damage Mechanics. 2014, vol. 24, no. 2, pp. 294–310. <https://doi.org/10.1177/1056789514536067>
  17. Tran A., Maupin K., Rodgers T. Monotonic Gaussian process for physics-constrained machine learning with materials science applications. Journal of Computing and Information Science in Engineering (ASME). 2023, vol. 23, no. 1, 011011. <https://doi.org/10.1115/1.4055852>
  18. Da Veiga S., Marrel A. Gaussian process modeling with inequality constraints. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques. 2012, vol. 21, no. 3, pp. 529–555. <https://doi.org/10.5802/afst.1344>.
  19. Jidling C., Wahlström N., Wills A., Schön T. B. Linearly constrained Gaussian processes. arXiv. 2017. doi: 10.48550/ARXIV.1703.00787.
  20. López-Lopera A. F., Bachoc F., Durrande N., Roustant O. Finite-dimensional Gaussian approximation with linear inequality constraints. arXiv. 2017. <https://doi.org/10.1137/17M1153157>
  21. Hohenwarter A., Leitner T., Pippan R. Fatigue crack propagation across the multiple length scales of technically relevant metallic materials. Annual Review of Materials Research. 2024, vol. 54, no. 1, pp. 223–246. <https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-080222-101859>.
  22. Krasii D., Larin O. Application of Markov Processes Theory for Computational Prediction of Turbine Blade Reliability. Lecture Notes in Networks and Systems. Switzerland, Springer Nature Publ., 2023, pp. 335–345. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_29).
  23. Goldberg P. W., Williams C. K., Bishop C. M. Regression with Input-dependent Noise: A Gaussian Process Treatment. Neural Information Processing Systems. 1997.
  24. Liu H., Ong Y.-S., Cai J. Large-scale heteroscedastic regression via Gaussian process. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2021, vol. 32, no. 2, pp. 708–721. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2020.2979188>.
  25. Kim D., Kim D., Ko T., Hwan Lee S. Physics-informed Gaussian process regression model for predicting the fatigue life of welded joints. International Journal of Fatigue. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108644>
  26. Krasii D., Larin O. ML-surrogate modeling for the estimation of random system performance parameter progress by the Chained Gaussian Process Regression method. 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). IEEE Publ., 2023, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312806>
  27. Perrin G., Da Veiga S. Constrained Gaussian process regression: an adaptive approach for the estimation of hyperparameters and the verification of constraints with high probability. Journal of Machine Learning for Modeling and Computing. 2021, vol. 2, no. 2, pp. 55–76. <https://doi.org/10.1615/JMachLearnModelComput.2021039837>.
  102475. <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2024.102475>.
  3. Hasofer A. M., Lind N. C. An exact and invariant first-order reliability format. Journal of Engineering Mechanics. 1974, vol. 100, no. 1, pp. 111–121. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001848>
  4. Hu Z., Mansour R., Olsson M., Du X. Second-order reliability methods: a review and comparative study. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2021, vol. 64, no. 6, pp. 3233–3263. <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03013-y>.
  5. Rasmussen C. E., Williams C. K. I. Gaussian Processes for Machine Learning. Cambridge, The MIT Press Publ., 2005. <https://doi.org/10.7551/mitpress/3206.001.0001>.
  6. Sacks J., Welch W. J., Mitchell T. J., Wynn H. P. Design and Analysis of Computer Experiments. Statist. Sci. 1989, vol. 4, no. 4. <https://doi.org/10.1214/ss/1177012413>
  7. Kennedy M. C., O'Hagan A. Bayesian Calibration of Computer Models. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology. 2001, vol. 63, no. 3, pp. 425–464. <https://doi.org/10.1111/1467-9868.00294>.
  8. Swiler L., Gulian M., Frankel A., Safta C., Jakeman J. A Survey of Constrained Gaussian Process Regression: Approaches and Implementation Challenges. arXiv. 2020. <https://doi.org/10.1615/JMachLearnModelComput.2020035155>.
  9. Bachoc F., López-Lopera A. F., Roustant O. Sequential construction and dimension reduction of Gaussian processes under inequality constraints. SIAM Journal on Mathematics of Data Science. 2022, vol. 4, no. 2, pp. 772–800. <https://doi.org/10.1137/21M1407513>.
  10. Chang C., Zeng T. A hybrid data driven-physics constrained Gaussian process regression framework with deep kernel for uncertainty quantification. arXiv. 2022. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4154355>.
  11. Cuomo S., Schiano Di Cola V., Giampaolo F., Rozza G., Raissi M., Piccialli F. Scientific machine learning through physics-informed neural networks: Where we are and what's next. Journal of Scientific Computing. 2022, vol. 92, no. 3, Article 88. <https://doi.org/10.1007/s10915-022-01939-z>
  12. Padilla-Segarra A., Noble P., Roustant O., Savin É. Physics-informed, boundary-constrained Gaussian process regression for the reconstruction of fluid flow fields. arXiv. 2025. doi: 10.48550/ARXIV.2507.17582.
  13. Agrell C. Gaussian processes with linear operator inequality constraints. arXiv. 2019. doi: 10.48550/ARXIV.1901.03134.
  14. Saul A. D., Hensman J., Vehtari A., Lawrence N. D. Chained Gaussian Processes (Version 1). arXiv. 2016. Available at: <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1604.05263>.
  15. Miner M. A. Cumulative Damage in Fatigue. Journal of Applied Mechanics. 1945, vol. 12, no. 3, pp. A159–A164. <https://doi.org/10.1115/1.4009458>.
  16. Larin O., Vodka O. A probability approach to the estimation of the process of accumulation of the high-cycle fatigue damage considering the natural aging of a material. International Journal of Damage Mechanics. 2014, vol. 24, no. 2, pp. 294–310. <https://doi.org/10.1177/1056789514536067>.
  17. Tran A., Maupin K., Rodgers T. Monotonic Gaussian process for physics-constrained machine learning with materials science applications. Journal of Computing and Information Science in Engineering (ASME). 2023, vol. 23, no. 1, 011011. <https://doi.org/10.1115/1.4055852>.
  18. Da Veiga S., Marrel A. Gaussian process modeling with inequality constraints. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques. 2012, vol. 21, no. 3, pp. 529–555. <https://doi.org/10.5802/afst.1344>.
  19. Jidling C., Wahlström N., Wills A., Schön T. B. Linearly constrained Gaussian processes. arXiv. 2017. doi: 10.48550/ARXIV.1703.00787.
  20. López-Lopera A. F., Bachoc F., Durrande N., Roustant O. Finite-dimensional Gaussian approximation with linear inequality constraints. arXiv. 2017. <https://doi.org/10.1137/17M1153157>.
  21. Hohenwarter A., Leitner T., Pippan R. Fatigue crack propagation across the multiple length scales of technically relevant metallic materials. Annual Review of Materials Research. 2024, vol. 54, no. 1, pp. 223–246. <https://doi.org/10.1146/annurev-matsci-080222-101859>.

#### References (transliterated )

1. Song C., Kawai R. Monte Carlo and variance reduction methods for structural reliability analysis: A comprehensive review. Probabilistic Engineering Mechanics. 2023, vol. 73, 103479. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2023.103479>.
2. Thaler D., Dhulipala S. L. N., Bamer F., Markert B., Shields M. D. Reliability analysis of complex systems using subset simulations with Hamiltonian Neural Networks. Structural Safety. 2024, vol. 109,

22. Krasii D., Larin O. Application of Markov Processes Theory for Computational Prediction of Turbine Blade Reliability. Lecture Notes in Networks and Systems. Switzerland, Springer Nature Publ., 2023, pp. 335–345. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9\\_29](https://doi.org/10.1007/978-3-031-36201-9_29).
23. Goldberg P. W., Williams C. K., Bishop C. M. Regression with Input-dependent Noise: A Gaussian Process Treatment. Neural Information Processing Systems. 1997.
24. Liu H., Ong Y.-S., Cai J. Large-scale heteroscedastic regression via Gaussian process. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2021, vol. 32, no. 2, pp. 708–721. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2020.2979188>
25. Kim D., Kim D., Ko T., Hwan Lee S. Physics-informed Gaussian process regression model for predicting the fatigue life of welded joints. International Journal of Fatigue. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108644>
26. Krasii D., Larin O. ML-surrogate modeling for the estimation of random system performance parameter progress by the Chained Gaussian Process Regression method. 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek). IEEE Publ., 2023, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312806>
27. Perrin G., Da Veiga S. Constrained Gaussian process regression: an adaptive approach for the estimation of hyperparameters and the verification of constraints with high probability. Journal of Machine Learning for Modeling and Computing. 2021, vol. 2, no. 2, pp. 55–76. <https://doi.org/10.1615/JMachLearnModelComput.2021039837>.

Надійшла (received) 06.12.2025

Прийнята до друку (accepted) 19.12.2025

Опублікована (published) 29.12.2025

*About the Authors / Відомості про авторів*

**Красій Данило Максимович (Danylo Krasii)** – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.: (093)493-10-29; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1599-2295>; e-mail: [Danylo.Krasii@infiz.khpi.edu.ua](mailto:Danylo.Krasii@infiz.khpi.edu.ua)

**Ларін Олексій Олександрович (Oleksiy Larin)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», директор навчально наукового інституту комп'ютерного моделювання, прикладної фізики та математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5721-4400>; e-mail: [oleksiy.larin@khpi.edu.ua](mailto:oleksiy.larin@khpi.edu.ua)