

Ю. М. АНДРЕЄВ, Д. В. ЛАВІНСЬКИЙ, Є. І. ДРУЖИНІН

ТЕОРЕТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ДЛЯ ПРАКТИЧНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ АНАЛІТИЧНОГО КОМП'ЮТЕРНОГО ПОБУДУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ РІВНЯНЬ В ПСЕВДОКООРДИНАТАХ КЕРОВАНОГО ПОЛЬОТУ БПЛА

Стаття окреслює важливі питання теоретичного підґрунтя для керування безпілотними літальними апаратами (БПЛА). Актуальність теми статті ґрунтується на великому попиті до застосування БПЛА у різних сферах. Методи керування повинні базуватись на відповідних алгоритмах розв'язання задач динаміки польоту БПЛА. У статті наведено алгоритм для використання в системах комп'ютерної алгебри автоматичного побудування рівнянь динаміки дискретних механічних систем в аналітичній формі. Це обумовлено необхідністю проведення розрахунків динаміки, зокрема, систем БПЛА, структура механічних моделей яких можуть суттєво відрізнятися. Тому потрібні реалізації алгоритмів, які за формальним описом механічної моделі на формульному рівні, будують відповідні рівняння і проводять розрахунки модельованого руху систем з просторовим рухом. Спочатку докладно виводяться рівняння динаміки дискретних моделей з урахуванням фундаментального принципу механіки – загального варіаційного рівняння. Отримано рівняння динаміки в узагальнених координатах у векторно-матричному вигляді, зручному для комп'ютерної реалізації. Пояснюється принципова відмінність уявлення механічного стану систем в узагальнених та псевдо(квазі)координатах. На основі принципу диференціювання функцій узагальнених координат за псевдокоординатами шляхом заміни формул варіювання узагальнених координат, узагальнені швидкості яких можуть бути виражені через псевдошвидкості, виводяться динамічні рівняння у псевдокоординатах. Наводиться спосіб перетворення таких рівнянь до форми Коші, що дозволяє побудувати чисельні методи інтегрування таких рівнянь. Теоретично доведено, що для моделей БПЛА – одного або групи, застосування псевдокоординат робить створення динамічних рівнянь руху значно простішими у порівнянні із застосуванням традиційних узагальнених координат. Розглянуто приклад чисельних розрахунків рухів мультикоптера, який зібрано за гібридною (квадрокоптерною та гелікоптерною) схемою. Доведено якісну правильність розрахунків та переваги використання рівнянь у псевдокоординатах.

Ключові слова: рівняння динаміки у псевдокоординатах, рівняння динаміки в узагальнених координатах, комп'ютерна алгебра, керований політ БПЛА.

Yu. ANDRIEIEV, D. LAVINSKY, E. DRUZHYNIN

THEORETICAL JUSTIFICATION FOR THE PRACTICAL IMPLEMENTATION OF ANALYTICAL COMPUTER CONSTRUCTION OF DYNAMIC EQUATIONS IN PSEUDOCOORDINATES OF CONTROLLED UAV FLIGHT

The article outlines important issues of the theoretical basis for controlling unmanned aerial vehicles (UAVs). The relevance of the topic of the article is based on the great demand for the use of UAVs in various fields. Control methods should be based on appropriate algorithms for solving UAVs flight dynamics problems. The article has developed an algorithm for creating in computer algebra systems the automatic calculation of the dynamics of discrete mechanical systems in an analytical form. This is due to the need to carry out the development of dynamics, structure, systems of UAVs, the structure of mechanical models of which can be significantly modified. Therefore, there is a need for implementation of algorithms, such as a formal description of the mechanical model on the formula level, there will be similar levels and carry out the development of the modeled structure of systems with a spacious flow. The dynamics of discrete models are immediately clearly demonstrated in accordance with the fundamental principle of mechanics – the fundamental variational equation. The alignment of dynamics in coordinated coordinates has been extracted from a vector-matrix view, manual for computer implementation. The principle of the validity of the manifestation of the mechanical state of systems in formal and pseudo (quasi) coordinates is explained. Based on the principle of differentiation of functions of localized coordinates behind pseudo-coordinates, by replacing the formulas for variation of localized coordinates, the normalized speeds of which can be expressed through pseudo-coordinates, dynamic coordinates are derived at pseudo-coordinates. A method for transforming such equations to the Cauchy form is proposed, which allows for the development of numerical methods for integrating such equations. It has been theoretically proven that for UAV models - single or group, the use of pseudocoordinates makes the creation of dynamic equations of motion much simpler compared to the use of traditional generalized coordinates. An example of numerical calculations of multicopter movements, which is assembled according to a hybrid (quadcopter and helicopter) scheme, is considered. The qualitative correctness of calculations and the advantages of using equations in pseudocoordinates have been proven.

Keywords: equalization of dynamics in pseudo-coordinates, equalization of dynamics in real coordinates, computer algebra, UAV flight control.

Вступ. Останні роки відзначені бурхливим розвитком індустрії безпілотних літальних апаратів (БПЛА), що використовуються у різних галузях. У зв'язку з цим велике значення має створення надійних алгоритмів та програм динамічного комп'ютерного моделювання їх керованого польоту. Необхідність створення та вдосконалення надійних алгоритмів та програм розрахунків динаміки керованого просторового польоту обумовлена низкою критично важливих факторів:

– *Забезпечення безпеки польоту:* помилки в розрахунках можуть призвести до втрати апарату, аварійної посадки або зіткнення з іншими об'єктами.

– *Точність навігації та управління:* для досягнення цілей керованого польоту необхідна висока

точність розрахунків траєкторії, що можливо тільки при використанні досконалих алгоритмів.

– *Економія ресурсів:* ефективні алгоритми розрахунку динаміки керованого просторового польоту дозволяють мінімізувати витрату палива, а також знизити масу корисного навантаження та покращити співвідношення ціна/результат.

– *Стійкість до невизначеностей:* надійні алгоритми дозволяють адаптуватися до змін зовнішнього середовища і забезпечують стійке управління навіть за наявності шумів, помилок виміру та часткових відмов.

На кафедрах «Теоретична механіка та опір матеріалів» і «Комп'ютерне моделювання процесів та систем» НТУ «ХПІ» багато років розробляється та застосовується в дослідному, а також навчальному

процесі програмний комплекс КіДиМ [1-5] (Сучасна назва – Спеціальна система комп'ютерної алгебри КіДиМ). Цей програмний комплекс спеціально призначено до проведення кінематичних та динамічних розрахунків складних механічних систем [3-5]. До таких систем відносяться і системи БПЛА [6-8]. В більшості публікацій (наприклад, [6-7]) динамічні рівняння складаються вручну відповідно до досвіду авторів. З нашої точки зору, це не відповідає сучасним можливостям обчислювальної техніки. З другого боку, відповідно бурхливому розвитку такої галузі, склад і структура нових моделей БПЛА може сильно відрізнятися від тих, що розглядаються в джерелах.

Наведемо ще додаткову інформацію по суті питань статті. Безпілотні літальні апарати (БПЛА) у останні роки знаходять все більші й більший спектр застосування. Глобально напрями застосування БПЛА можуть бути розділеними на дві великі групи: військове застосування та цивільне застосування [9-11]. Цивільне спрямування БПЛА також має багато різноманітних задач. Тут можна відзначити і задачі доставки вантажів – ліків, їжі, поштових відправлень, товарів медичного призначення [10], що потребує особливих вимог з точки зору збереження вантажів; моніторингу різноманітних природних ситуацій (наприклад, виявлення осередків займання лісових пожеж [11]), застосування у сільському господарстві [12; 13] тощо.

Крім того, сучасні БПЛА розрізняються за розмірами, наприклад, широко використовуються мікро БПЛА [14; 15], за конструкційними особливостями, наприклад БПЛА із зупиненим ротором [16], БПЛА із поворотно-роторним механізмом [17] тощо. Критерієм успіху застосування БПЛА у цілому можна вважати його рух по заздалегідь сформованій траєкторії, при цьому зовнішні умови можуть викликати ситуації відходу від необхідної траєкторії [18-20]. Таким чином, важливою проблемою є створення алгоритмів керування польотом БПЛА.

У першому наближенні процес керування польотом БПЛА можна представити трьома групами алгоритмів [21]: старт БПЛА, керування в польоті та алгоритми корекції заздалегідь запланованої траєкторії польоту. Усі алгоритми повинні враховувати наявність перешкод, яких БПЛА повинен уникати, та поривів вітру в зоні дії БПЛА тощо. Також необхідно відзначити, що «успішний» спосіб керування БПЛА має на увазі мінімізацію втручання людини під час руху БПЛА [9], що забезпечується, перш за все, спеціальними алгоритмами, які є стійкими до зовнішніх збурень. У оглядовій статті [9] подано поглиблений аналіз найновіших та найсучасніших методів керування та оцінювання руху БПЛА.

Створення алгоритмів та методів керування БПЛА неможливе без дослідження динаміки його польоту. Розв'язання задач динаміки польоту БПЛА дозволяє, наприклад, визначити сили, які діють на елементи конструкції БПЛА та потім провести аналіз міцності. Також у багатьох випадках необхідно досліджувати коливальні процеси під час руху БПЛА

[11], що необхідно для оцінювання безпечного транспортування специфічних вантажів, запобігання резонансів, тощо.

У статті [16] досліджується метод моделювання динаміки польоту та управління БПЛА із зупиненим ротором, завдяки теорії нечіткої математики отримано закон керування такого БПЛА в повному режимі автоматичного польоту. Стаття [17] присвячена застосуванню чисельного моделювання перехідних процесів для випадку руху БПЛА із поворотно-роторним механізмом, створено динамічну модель такого БПЛА на основі зміни кута нахилу, враховано вплив ковзання ротора. У статті [18] розглядається проблема керування безпекою польоту квадрокоптерного БПЛА, що піддається впливу несправностей виконавчих механізмів та зовнішніх збурень, на основі квантування можливостей системи та запасу міцності, функція траєкторії будується «online» зі зворотним поширенням динаміки системи. У статті [19] запропоновано метод керування під назвою «оптимальне динамічне програмування», який, окрім того, що є обчислювально прийнятним, також ефективно контролює весь режим польоту БПЛА. Нелінійне моделювання, виконане за різних умов навколишнього середовища, продемонструвало ефективність запропонованої методології. Також при аналізі динаміки польоту БПЛА дослідники стикаються із виникненням нелінійних явищ, про що повідомляється у статті [14] стосовно мікро БПЛА. У статті [22] наведена математична модель БПЛА, а також програма моделювання, яка дозволила дослідити систему керування будь-яким БПЛА за кутом нахилу (висота), креном (напрямок), відхиленням та швидкістю залежно від змінних значень коефіцієнта керованості та коефіцієнта підсилення. Алгоритм моделювання системи керування враховує модель приводу, динаміку двигуна, тягу двигуна, модель рульових приводів та модель зовнішніх навантажень. Модель зовнішнього навантаження враховує зовнішні сили, що діють на БПЛА, включаючи сили та моменти тяжіння, аеродинамічні сили та моменти, аеродинамічний опір, аеродинамічні бічні сили, аеродинамічні підйомні сили, аеродинамічний момент крену, механізм локального кута атаки від демпфуючого моменту та сили і моменти від двигуна. У статті [23] показано, що для квадрокоптерного БПЛА аеродинамічні ефекти можна компенсувати за допомогою підходу розподілу керування з використанням нейронних мереж. Таким чином, продуктивність системи можна покращити, замінивши класичну матрицю розподілу, без безпосереднього використання рівнянь аеродинамічного потоку. Навчання мережі виконується «offline», що вимагає малої обчислювальної потужності.

Проведений аналіз літературних джерел свідчить, що розробка алгоритмів керування польотом БПЛА неможлива без створення ефективних методів аналізу динаміки польоту, які мають містити алгоритми і відповідну програмну реалізацію.

На наш погляд треба створювати такі програми і

комплекси, які можуть бути налаштовані на обчислення моделей будь-якої складності і структури. Єдиний шлях тут, як нам представляється, полягає у використанні спеціальних систем комп'ютерної алгебри, прикладом якої є ССКА КіДиМ.

Вважаючи обмежений обсяг статті, на думку авторів, пропонується публікація циклу статей, в першій з яких розкрито теоретичне обґрунтування методу автоматичного складання динамічних рівнянь БПЛА, в наступних – його практичне використання до розрахунків динаміки БПЛА.

Постановка задачі. У статті розглядаються аналітичні комп'ютерні алгоритми будування рівнянь динаміки дискретних механічних систем в узагальнених координатах і в псевдокоординатах. На прикладі динаміки мультикоптера, зібраного за гібридною схемою, яка об'єднує квадрокоптерну та гелікоптерну схеми, проводиться порівняння обох підходів.

Традиційний підхід, що реалізований в ССКА КіДиМ, і найбільш популярний в науковому та інженерному середовищі – це складання динамічних рівнянь в узагальнених координатах. Тут ми наводимо оригінальний вивід рівнянь, якими користується алгоритм в ССКА КіДиМ.

Менш популярний, але набагато ефективніший засіб складання рівнянь динаміки, називається «рівняннями в псевдо (квазі)координатах». Безумовний інтерес у фахівців повинен викликати алгоритм аналітичного комп'ютерного виводу таких рівнянь, який тут пропонується.

Обидва засоби ілюструються в статті на прикладі динаміки гібридного мультикоптера.

Вивід векторно-матричних рівнянь динаміки дискретних механічних систем в узагальнених координатах.

Розглядається механічна система з n твердих тіл з голономними ідеальними в'язями. Для кожного твердого тіла існує оптимальна система диференціальних рівнянь на базі теореми про рух центру мас та теореми моментів в формі Ейлера

$$\begin{cases} m\ddot{X}_C = F_X^{ex} \\ m\ddot{Y}_C = F_Y^{ex} \\ m\ddot{Z}_C = F_Z^{ex} \end{cases} \begin{cases} J_x\dot{\omega}_x + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x^{ex} \\ J_y\dot{\omega}_y + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y^{ex} \\ J_z\dot{\omega}_z + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z^{ex} \end{cases}, \quad (1)$$

де m – маса тіла; X_C, Y_C, Z_C – декартові координати центру мас тіла в абсолютній системі координат (далі – СК); $F_X^{ex}, F_Y^{ex}, F_Z^{ex}$ – проєкції головного вектору зовнішніх сил на ті ж самі осі; J_x, J_y, J_z – головні центральні моменти інерції тіла, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проєкції кутової швидкості тіла на головні центральні осі, $M_x^{ex}, M_y^{ex}, M_z^{ex}$ – проєкції головного моменту зовнішніх сил на ті ж самі осі.

Ліві частини рівнянь (1), взяті з оберненим знаком, дають проєкції головного вектора і головного моменту сіл інерції точок твердого тіла.

Віртуальна робота будь-якої системи сил, прикладеної до твердого тіла, виражається через її головний вектор і головний момент. Тому віртуальна робота сил інерції твердого тіла матиме вигляд

$$\delta A^u = \vec{\Phi} \delta \vec{r}_C + \vec{M}_C^u \delta \vec{\varphi}. \quad (2)$$

Віртуальна робота активних сил, прикладених до твердого тіла, дається аналогічною формулою

$$\delta A^a = \vec{F} \delta \vec{r}_C + \vec{M}_C \delta \vec{\varphi}, \quad (3)$$

де (в формулах (2) та (3)): $\delta \vec{r}_C$ та $\delta \vec{\varphi}$ – варіації радіус-вектору центру мас тіла та кута його повороту, $\vec{F}$ та $\vec{\Phi}$ – головні вектори, $\vec{M}_C$ та $\vec{M}_C^u$ – головні моменти щодо центру мас тіла активних та сил інерції.

Отримуємо узагальнене варіаційне рівняння для системи n твердих тіл

$$\begin{aligned} \delta A^u + \delta A^a = & \sum_{j=1}^n \vec{\Phi}_j \delta \vec{r}_{Cj} + \sum_{j=1}^n \vec{M}_{Cj}^u \delta \vec{\varphi}_j + \\ & + \sum_{j=1}^n \vec{F}_j \delta \vec{r}_{Cj} + \sum_{j=1}^n \vec{M}_{Cj} \delta \vec{\varphi}_j = \sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \delta \vec{r}_{Cj} + \\ & + \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{\varepsilon}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \delta \vec{\varphi}_j = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут $j - [\vec{J}_j] = \text{diag} \{ J_{jx}, J_{jy}, J_{jz} \}$ – тензор інерції j -го тіла в його головних осях, індекс твердих тіл системи.

Для системи твердих тіл можна призначити s узагальнених координат $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_s\}$. Тоді знайдемо варіації $\delta \vec{r}_{Cj}$ та $\delta \vec{\varphi}_j$ через узагальнені координати, маючи на увазі, що для цього є вирази

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Cj} &= \vec{r}_{Cj}(q_1, q_2, \dots, q_s, t), \\ \vec{\omega}_j &= \vec{\omega}_j(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Скористуємось тотожністю Лагранжа $\frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial q_k} = \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k}$

$$\delta \vec{r}_{Cj} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta \vec{\varphi}_j = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{\varphi}_j}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k. \quad (6)$$

Підстановка варіацій (6) в рівняння (4) і зміна порядку підсумовування дає

$$\begin{aligned} \delta A^u + \delta A^a = & \sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k + \\ & + \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{\varepsilon}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \sum_{k=1}^s \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k = \\ & = \sum_{k=1}^s \delta q_k \sum_{j=1}^n \left[\left\{ \vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj} \right\} \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} + \right. \\ & \left. + \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{\varepsilon}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \right] = 0 \end{aligned}$$

Так як варіації узагальнених координат незалежні, то робимо висновок, що внутрішня сума повинна дорівнюватися нулю. Зручно ще рознести інерційні і силові доданки по різні частини рівняння. Крім того, зауважимо, що роботи активних сил і моментів можна отримати не шляхом попереднього приведення їх до головних векторів і головних моментів на тілах, а підсумовуванням робіт фактично діючих активних сил і моментів. Тому використаємо в правій частині інші індекси сил і моментів. Отримаємо

$$\sum_{j=1}^n \left\{ m_j \ddot{\vec{r}}_{C_j} \frac{\partial \vec{r}_{C_j}}{\partial \dot{q}_k} + \left([\vec{J}_j] \vec{\varepsilon}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \right\} = \sum_{i=1}^{N_F} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} + \sum_{i=1}^{N_M} \vec{M}_i \frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \dot{q}_k}, \quad k=1, 2, \dots, s \quad (7)$$

Цю систему рівнянь можна записати в векторно-матричному вигляді

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_j}^u m_j \vec{a}_{C_j} + \mathbf{W}_{M_j}^u \left([\vec{J}_j] \vec{\varepsilon}_j^{(j)} + \vec{\omega}_j^{(j)} \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j^{(j)} \right) \right\} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P}, \quad (8)$$

де $\mathbf{W}_{R_j}^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{C_j}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$, $\mathbf{W}_{M_j}^u = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_j^{(j)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right]$ – згідно

термінології КіДиМ *геометричні* і *диференційні структурні матриці* сил інерції та їх моментів,

$\mathbf{W}_P = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$ – структурна матриця активних сил.

Як бачимо, ці матриці можна отримати шляхом аналітичного диференціювання виразів (5), які називаються тут *структурами*.

Для складання рівнянь (8) існує дуже наочне представлення механічної моделі системи як сукупності *дискретних елементів* – *інерційних* та *силових* [1]. Кожний з них має *найменування*, *координату*, та *характеристику* (значення). Ім'я силових елементів повинно починатися з латинської літери 'P', інерційних – з літери 'J'. Координатами силових елементів можуть бути декартові координати точок прикладання сил (кути повороту або проекції кутових швидкостей тіл для задання моментів), інерційних – координати центрів мас, або кути повороту (проекції кутових швидкостей) тіл. Значеннями (характеристиками) силових елементів будуть проекції сил і моментів сил на варіації їхніх координат, а інерційних – маси та моменти інерції.

Далі рівняння (8) перетворюються до форми Коши

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F} \end{cases} \quad (9)$$

де матриця $\mathbf{M}$ та вектор $\mathbf{F}$ будуються з рівнянь (8) за формулами

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{W}_{R_j}^u m_i \mathbf{W}_{R_j}^u + \mathbf{W}_{M_j}^u \left[\vec{J}_i \right] \mathbf{W}_{M_j}^u \right\}, \quad (10)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}_P^T \mathbf{P} - \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_{M_i}^u \left(\vec{\omega}_i^{(i)} \times [\vec{J}_i] \cdot \vec{\omega}_i^{(i)} \right).$$

Зауважимо, що замість обернення матриці $\mathbf{M}$ в (9) вигідніше розв'язувати систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F},$$

бо через недиагональність матриці $\mathbf{M}$ на це витрачається маса часу при чисельному інтегруванні системи (9).

В деяких випадках можна мати діагональну матрицю $\mathbf{M}$, що суттєво скорочує час розрахунків.

Один з таких випадків – використання псевдокоординат.

Векторно-матричні рівняння динаміки дискретних механічних систем у псевдокоординатах.

Зауважимо, що механічний стан систем прийнято характеризувати сукупністю незалежних координат і незалежних швидкостей. Вище розглянутий підхід до розв'язання задач динаміки механічних систем на базі узагальнених координат і узагальнених швидкостей як похідних за часом від узагальнених координат. Але практика показує, що використання узагальнених координат і псевдошвидкостей для характеристики механічного стану систем є кращим в порівнянні з використанням узагальнених координат і узагальнених швидкостей навіть для голономних систем. Через псевдошвидкості найпростіше записуються такі динамічні функції, як кінетична енергія, кінетичний момент, узагальнені імпульси, перші інтеграли диференціальних рівнянь. Тому рівняння руху виходять часто простішими при використанні псевдокоординат. Класичною ілюстрацією цього є динамічні рівняння Ейлера руху твердого тіла (див. формули (1), права частина), у яких роль псевдошвидкостей грають проекції кутової швидкості тіла на його центральні головні осі інерції.

Самі псевдокоординати не входять ні в рівняння в'язів, ні в кінематичні рівняння, ні в диференціальні рівняння руху, в яких присутні лише їхні перші та другі похідні за часом (псевдошвидкість та псевдоприскорення), а також узагальнені координати. Проте такі рівняння називаються *рівняннями у псевдокоординатах*.

Незважаючи на те, що аналітичних виразів узагальнених і взагалі «справжніх» координат через псевдокоординати не існує, операція диференціювання по псевдокоординатам цілком визначена. Нехай узагальнені швидкості $(\{\dot{q}_k\}, k=1, 2, \dots, s)$, виражаються через псевдошвидкості $(\{\dot{\pi}_j\}, j=1, 2, \dots, p)$ лінійними кінематичними рівняннями з коефіцієнтами, які можуть залежати від узагальнених координат та часу

$$\dot{q}_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} (q_1, q_2, \dots, q_s, t) \dot{\pi}_j + \beta_k (q_1, q_2, \dots, q_s, t), \quad (11)$$

Звідки, за правилом Лопітала,

$$\frac{\partial q_k}{\partial \pi_j} = \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\pi}_j} = \alpha_{kj}, \quad k=1, 2, \dots, s, \quad j=1, 2, \dots, p, \quad p \leq s, \quad (12)$$

Тоді для будь-якої функції узагальнених координат $f(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ отримаємо правило диференціювання за псевдокоординатами

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \pi_j} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{\pi}_j} = \sum_{k=1}^s \alpha_{kj} \frac{\partial f}{\partial q_k}. \quad (13)$$

З іншого боку, легко виражаються варіації узагальнених координат через варіації псевдокоординат. Для цього переписемо (11) у вигляді

$$dq_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} (q_1, q_2, \dots, q_s, t) d\pi_j + \beta_k (q_1, q_2, \dots, q_s, t) dt.$$

Зауважимо, що при варіюванні час не змінюється ($\delta t = 0$), тому

$$\delta q_k = \sum_{j=1}^p \alpha_{kj} \delta \pi_j \quad (14)$$

Розглянемо методику підготовки даних і складання рівнянь руху, яка реалізована у програмному комплексі КіДиМ.

Маючи на увазі частковий випадок, який безпосередньо має відношення до задачі руху коптерів, будемо вважати, що по-перше, механічний стан системи буде визначатися s узагальненими координатами, та частиною узагальнених швидкостей, через які визначаються швидкості їх центрів мас кількістю r і залишеною частиною псевдошвидкостей, які є ні чим іншим, як проєкціями кутових швидкостей коптерів на їх головні центральні осі інерції – осі пов'язаних з ними систем координат. Нехай кількість таких псевдошвидкостей буде p ($r + p = s$). Будемо відрізняти індекси узагальнених координат з незалежними швидкостями ($k=1, 2, \dots, r$) від індексів узагальнених координат, швидкості яких будуть залежати від псевдошвидкостей, а може їх швидкості і будуть псевдошвидкостями ($l=1, 2, \dots, p$). Тоді замість (5) маємо

$$\begin{aligned} \vec{r}_{Cj} &= \vec{r}_{Cj} \left(\{q_k\}_{k=1, \dots, r}, \{q_l\}_{l=1, \dots, p}, t \right), \\ \vec{\omega}_j &= \vec{\omega}_j \left(\{q_k\}_{k=1, \dots, r}, \{q_l\}_{l=1, \dots, p}, \{\dot{q}_k\}_{k=1, \dots, r}, \{\dot{\pi}_l\}_{l=1, \dots, p}, t \right). \end{aligned}$$

Тоді замість (6) отримаємо

$$\begin{aligned} \delta \vec{r}_{Cj} &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l, \\ \delta \vec{\omega}_j &= \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l. \end{aligned} \quad (15)$$

Далі запишемо суму віртуальних робіт (4)

$$\begin{aligned} \delta A^u + \delta A^a &= \sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \delta q_k + \\ &+ \sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{e}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \sum_{k=1}^r \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{e}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \sum_{l=1}^p \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} \delta \pi_l = 0 \end{aligned}$$

Зміна порядку підсумовування в формулах і об'єднання доданків з варіаціями узагальнених координат і псевдокоординат дає дві групи рівнянь

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{e}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} = 0 \\ &\sum_{j=1}^n (\vec{F}_j - m_j \ddot{\vec{r}}_{Cj}) \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} + \\ &+ \sum_{j=1}^n \left\{ \vec{M}_{Cj} - \left([\vec{J}_j] \vec{e}_j + \vec{\omega}_j \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j \right) \right\} \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$k=1, 2, \dots, r \quad \quad \quad l=1, 2, \dots, p$

Систему рівнянь (16) можна те ж, як і систему рівнянь (7) записати в векторно-матричному вигляді за допомогою структурних матриць

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{W}}_{Rj}^{uT} m_j \vec{a}_{Cj} + \tilde{\mathbf{W}}_{Mj}^{uT} \left([\vec{J}_j] \vec{e}_j^{(j)} + \vec{\omega}_j^{(j)} \times [\vec{J}_j] \vec{\omega}_j^{(j)} \right) \right\} = \tilde{\mathbf{W}}_p^T \mathbf{P}, \quad (17)$$

в якому відповідні матриці відрізняються від матриць системи (8) лише описаним вище (див. (13)) засобом отримання часткових похідних по псевдокоординатах

$$\mathbf{W}_{Rj}^u = \left[\frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial q_k} \dots \frac{\partial \vec{r}_{Cj}}{\partial \pi_l} \right], \quad \tilde{\mathbf{W}}_{Mj}^u = \left[\frac{\partial \vec{\omega}_j^{(j)}}{\partial \dot{q}_k} \dots \frac{\partial \vec{\omega}_j^{(j)}}{\partial \dot{\pi}_l} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_p = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial q_k} \dots \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \pi_l} \right] - \text{тут в квадратних дужках записано}$$

диференціювання векторів $\vec{r}_{Cj}$, $\vec{\omega}_j^{(j)}$, $\mathbf{p}$ по векторах $\{q_1, q_2, \dots, q_r, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p\}$ та $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_r, \dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, \dots, \dot{\pi}_p\}$ відповідно.

Дещо ускладнюється форма Коши

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}, \quad (18)$$

де матриця $\tilde{\mathbf{M}}$ та вектор-стовпець $\tilde{\mathbf{F}}$ будуються з рівнянь (17) за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^{uT} m_i \tilde{\mathbf{W}}_{R_j}^u + \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^{uT} [\tilde{\mathbf{J}}_i] \tilde{\mathbf{W}}_{M_j}^u \right\}, \\ \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{W}}_P^T \mathbf{P} - \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{W}}_{M_i}^T \left(\tilde{\omega}_i^{(i)} \times [\tilde{\mathbf{J}}_i] \cdot \tilde{\omega}_i^{(i)} \right).\end{aligned}\quad (19)$$

Тут має місце практично значимий випадок, коли положення центрів мас тіл систем визначається лише узагальненими координатами з незалежними варіаціями, а кутові швидкості тіл, навпаки, – не залежать від таких узагальнених швидкостей. В такому випадку з першої групи рівнянь (16) зникає перша група доданків, а в другій групі – остання, тобто

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \left\{ \tilde{M}_{C_j} - ([\tilde{\mathbf{J}}_j] \tilde{\epsilon}_j + \tilde{\omega}_j \times [\tilde{\mathbf{J}}_j] \tilde{\omega}_j) \right\} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial \dot{q}_k} = 0, \\ \sum_{j=1}^n (\tilde{F}_j - m_j \ddot{r}_{C_j}) \frac{\partial \tilde{r}_{C_j}}{\partial q_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{r}_{C_j}}{\partial q_l} = 0, \quad k=1,2,\dots,r \\ & \quad l=1,2,\dots,p\end{aligned}$$

В такому випадку ще можливо суттєво спрощення рівнянь, коли за узагальнені координати, що визначають положення центрів мас тіл взяти їх декартові координати, а в якості псевдошвидкостей – прийняти проєкції кутових швидкостей на центральні головні осі тіл. Тоді вказані нижче матриці стануть одиничними

$$\frac{\partial \tilde{r}_{C_j}}{\partial q_k} = E \quad \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial \dot{q}_l} \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial \dot{\pi}_l} = \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial \dot{\pi}_l} = E$$

і рівняння повністю розчіплюються

$$\begin{aligned}m_j \ddot{r}_{C_j} &= \tilde{F}_j, \quad k=1,2,\dots,r, \\ [\tilde{\mathbf{J}}_j] \tilde{\epsilon}_j + \tilde{\omega}_j \times [\tilde{\mathbf{J}}_j] \tilde{\omega}_j &= \tilde{M}_{C_j}, \quad l=1,2,\dots,p.\end{aligned}\quad (20)$$

Це може бути, коли розглядається просторовий рух групи незв'язаних тіл, або, взагалі, одного (така задача з ручним складанням рівнянь динаміки викладена, в роботах [6; 7]).

Таким чином, бачимо, що використання динамічних рівнянь у псевдокоординатах дозволяє отримати більш ефективну процедуру, бо в формі (7) загальні рівняння отримуються як лінійна комбінація рівнянь для кожного тіла. В рівняннях же (16), (17) та (19) комбінують тільки рівняння для узагальнених координат з залежними швидкостями (варіаціями).

Практична реалізація отриманих рівнянь на прикладі динаміки коптерів. На даний момент повністю реалізовано в ССКА КіДиМ алгоритми побудови рівнянь в узагальнених координатах у вигляді (7)-(10), та рівнянь у псевдокоординатах у вигляді (16)-(19). Для налагодження реалізованих алгоритмів і порівняння результатів розрахунків спочатку була прорахована задача керованого польоту мультикоптера (МК), схема якого представлена на рис. 1, що розглянута в роботі [7].

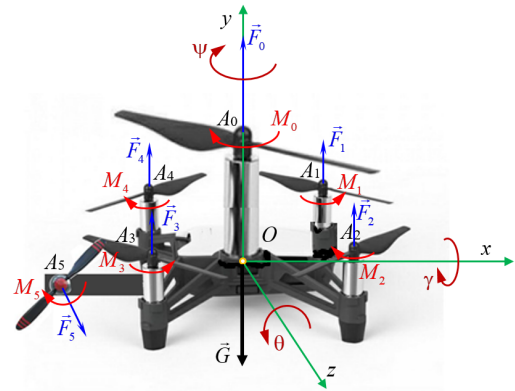


Рис. 1 – Схема мультикоптера з вказаними аеродинамічними силами і моментами

Він має п'ять двигунів з вертикальними осями – центральний потужний, чотири малих, що розташовані в кутах квадрата та ще один малий з горизонтального віссю. Тобто тут використана гібридна схема – квадрокоптерна та гелікоптерна. Відповідно до роботи [7] було використано логіку та параметри системи керування і взято параметри моделі:

- маси і моменти інерції МК: $m=18 \text{ кг}$; $J_x=1.8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $J_y=2.8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $J_z=3.0 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$;
- моменти інерції – головного $j_0=0.04 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, допоміжних $j_{1-5}=0.00016 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ пропелерів;
- підйомні сили пропорційні квадрату кутових швидкостей з коефіцієнтами для головного $KF_0=0.01 \text{ н}\cdot\text{с}^2$, допоміжних $KF=0.0005 \text{ н}\cdot\text{с}^2$ пропелерів;
- моменти опору повітря пропорційні квадрату кутових швидкостей з коефіцієнтами для головного $KM_0=0.0004 \text{ н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$, допоміжних $KM=0.0001 \text{ н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$ пропелерів.

Отримано результати, що збігаються з розрахунками авторів роботи [7].

Викладання всіх нюансів опису механічної моделі з параметрами управління, побудови рівнянь та результатів приведе до дуже значного зростання обсягу статті. Тому авторами прийнято рішення про публікацію такої інформації в найближчому наступному номері збірника ДММ. Наведемо для прикладу тільки два графіки – зміни висоти мультикоптера (рис. 2) і стабілізації крену (рис. 3) при відпрацюванні завдання зміни висоти за законом

$$H = \begin{cases} 60 \text{ м}, & t < 60 \text{ с} \\ 10 \text{ м}, & t < 100 \text{ с} \\ 0, & t < 150 \text{ с} \end{cases}$$

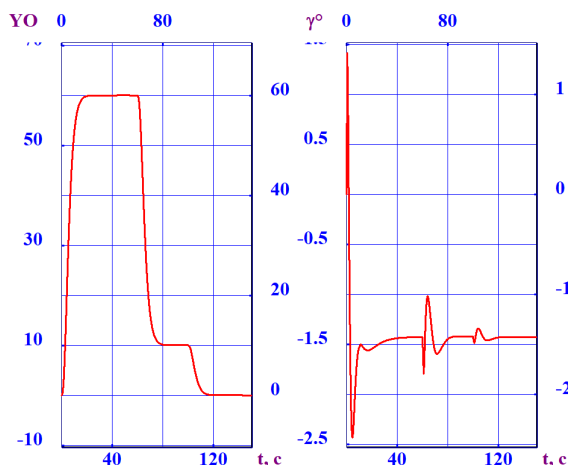


Рис. 2 – Зміна висоти

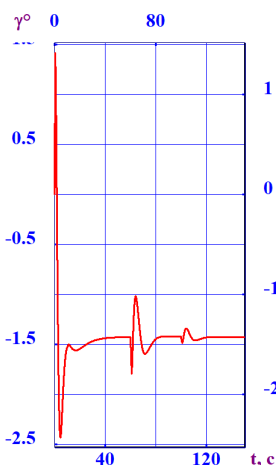


Рис. 3 – Стабілізація крену

Характер встановлювання значення кута крену свідчить про вірність результатів, бо рівновага такого мультикоптера встановлюється при $\gamma^\circ \approx -1,5^\circ$. Це значення пояснюється необхідністю компенсувати бокову складову підйомної сили 5-го пропелера, що підтверджено експериментально.

На цьому прикладі отримано також підтвердження переваг використання рівнянь у псевдокоординатах відносно рівнянь в узагальнених координатах. Переваги мають місце в кількості математичних операцій, що зосереджені в отриманих рівняннях динаміки:

- в рівняннях з УК: '+374, -71, *770, /5, ^174.
- в рівняннях з ПК: '+189, -44, *390, /13, ^37.

Час автоматичного складання рівнянь: з УК – 0.22 с, з ПК – 0.015 с. Кількість використаних змінних в рівняннях: з УК – 1821, з ПК – 873.

Висновки. У статті аналітично отримано 2 види рівнянь динаміки для реалізації в системах комп'ютерної алгебри. Спочатку – більш традиційні в узагальнених координатах, а потім – у псевдокоординатах. Показано привабливість і переваги використання останніх, особливо в задачах моделювання просторового польоту БПЛА. Такій підхід реалізовано в спеціальній системі комп'ютерної алгебри КіДиМ. Через обмеження обсягу статті опис прикладів використання отриманих рівнянь для моделювання польотів БПЛА перенесено на найближчі публікації авторів у цьому збірнику. Тому кратко наведено лише один приклад для розрахунків рухів мультикоптера, який зібрано для гібридною схемою – квадрокоптера та гелікоптера. Але на ньому вже продемонстровано якісно вірний розрахунок експериментально підтвердженого факту перекосу мультикоптера за креном в сталому положенні та переваги використання рівнянь у псевдокоординатах при їх комп'ютерному аналітичному складанні. В кількості математичних операцій та кількості використаних змінних – в 2 рази, в часі – в 15 разів.

Список литературы:

1. Андреев, Ю. М., Дзюба, В. Л. Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв у ССКА КіДиМ / Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (2023). – С. 34 – 40. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293010>.
2. Andrzejew, Yu., Breslavsky, D., Larin, A., Mitielov, V. Computer Modelling of UAV Flight, in Proc 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), 13-17 Sept. 2021, Kharkiv, Ukraine, IEEE, 2021, pp. 455-459. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991>.
3. Андреев, Ю. М. Реализация и использование алгоритма Левенберга-Марквардта в задачах калибровки роботоманипуляторов / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2021.2.249537>.
4. Andriev, Yu., Breslavsky, D., Chystilina, H., Ivanchenko, K., Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robot's with a free foot walking control, in Proc 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek), October 3-7, 2022, Kharkiv, Ukraine, IEEE, 2022, pp. 324-329. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395>.
5. Andriev, Y., Breslavsky, D., Shabanov, H., Naumenko, K., Altenbach H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom / Applied Sciences. 2025; 15(5):2840. DOI: <https://doi.org/10.3390/app15052840>.
6. Успенський, В. Б., Некрасова, С. Є. Розробка та комп'ютерна реалізація моделі руху та алгоритмів управління гібридного мультикоптера / Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1 (2022). – С. 94 – 106. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.1.263784>.
7. Успенський В. Б., Гардер С. Є. Розробка та комп'ютерна реалізація моделі руху та алгоритмів управління гібридного мультикоптера / Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2022. – № 1 (2022). – С. 94 – 106. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.1.263784>.
8. Fahlstrom Paul, G. Introduction to UAV Systems / Paul G. Fahlstrom, Thomas J. Gleason, Mohammad H. Sadraey // Fifth edition. – Pondicherry, India. Hoboken, NJ : Wiley. – 2022. – 425 p.
9. Tahir, M. A., Mir, I., & Islam, T. U. Control algorithms, Kalman estimation and near actual simulation for UAVs: state of art perspective. Drones, 7(6), 339 (2023). DOI: <https://doi.org/10.3390/drones7060339>.
10. Geronel, R. S., Beghini, G. R., Botez, R. M. et al. An overview on the use of unmanned aerial vehicles for medical product transportation: flight dynamics and vibration issues. J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng. 44, 349 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03644-2>.
11. John, J., Harikumar, K., Senthilnath, J., & Sundaram, S. An efficient approach with dynamic multiswarm of UAVs for forest firefighting. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 54(5), 2860-2871. (2024). DOI: <https://doi.org/10.1109/TSMC.2024.3352660>.
12. Kim, J., Kim, S., Ju, C., & Son, H. I. Unmanned aerial vehicles in agriculture: A review of perspective of platform, control, and applications. Ieee Access, 7, 105100-105115. (2019). DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2932119>.
13. Tsouros, D. C., Bibi, S., & Sarigiannidis, P. G. A review on UAV-based applications for precision agricul. Information, 10(11), 349. (2019). DOI: <https://doi.org/10.3390/info10110349>.
14. Aboelezz, A., Mohamady, O., Hassanalian, M. et al. Nonlinear Flight Dynamics and Control of a Fixed-Wing Micro Air Vehicle: Numerical, System Identification and Experimental Investigations. J Intell Robot Syst 101, 64 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01352-y>.
15. Dominguez V. H., Garcia-Salazar, O., Amezcua-Brooks, L., Reyes-Osorio, L. A., Santana-Delgado, C., & Rojo-Rodriguez, E. G. Micro coaxial drone: Flight dynamics, simulation and ground testing. Aerospace, 9(5), 245. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace9050245>.
16. Ao, H. E., Honggang, G. A. O., Zhenghong, G. A. O., Bodi, M. A., Lulu, C. H. E. N., & Wei, D. A. I. Full mode flight dynamics modelling and control of stopped-rotor UAV. Chinese Journal of

- Aeronautics, 35(10), 95-105. (2022). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.03.016>
17. Wang, H., Sun, W., Zhao, C., Zhang, S., & Han, J. Dynamic modeling and control for tilt-rotor UAV based on 3D flow field transient CFD. *Drones*, 6(11), 338. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/drones6110338>
 18. Zhou, X., Yu, X., Guo, K., Zhou, S., Guo, L., Zhang, Y., & Peng, X. Safety flight control design of a quadrotor UAV with capability analysis. *IEEE transactions on cybernetics*, 53(3), 1738-1751. (2021). DOI: <https://doi.org/10.1109/TCYB.2021.3113168>
 19. Din, A. F. U., Mir, I., Gul, F. et al. Robust flight control system design of a fixed wing UAV using optimal dynamic programming. *Soft Comput* 27, 3053–3064 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07484-z>
 20. Alkayas, A. Y., Chehadeh, M., Ayyad, A., & Zweiri, Y. Systematic online tuning of multirotor UAVs for accurate trajectory tracking under wind disturbances and in-flight dynamics changes. *IEEE Access*, 10, 6798–6813. (2022). DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3142388>
 21. Chodnicki, M., Siemiatkowska, B., Stecz, W., & Stepień, S. Energy efficient UAV flight control method in an environment with obstacles and gusts of wind. *Energies*, 15(10), 3730. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/en15103730>
 22. Adamski, M. Modelling of the unmanned aerial vehicles flight control system. *Aviation*, 25(2), 79–85. (2021). DOI: <https://doi.org/10.3846/aviation.2021.13391>
 23. Madruga, S. P., Tavares, A. H., Luiz, S. O., do Nascimento, T. P., & Lima, A. M. N. Aerodynamic effects compensation on multi-rotor UAVs based on a neural network control allocation approach. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 9(2), 295–312. DOI: (2021). <https://doi.org/10.1109/JAS.2021.1004266>
- References (transliterated)**
1. Andreev, Yu. M., Dziuba, V. L. Udoshkonalennyi algoritmyt rozv'yazannya obernenykh zadach dynamiky robototekhnichnykh prystroyiv u SSKA KiDiM // *Visnyk NTU "KhPI"*. Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2023. – № 2 (2023). – S. 34–40. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293010..>
 2. Andrijev, Yu., Breslavsky, D., Larin, A., Mitielov, V., Computer Modelling of UAV Flight, in *Proc 2021 IEEE 2nd KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek)*, 13-17 Sept. 2021, Kharkiv, Ukraine, IEEE, 2021, pp. 455-459. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek53812.2021.9569991>.
 3. Andreev, Yu. M. Realizatsiya i ispol'zovaniye algoritma Levenberha-Markvardta v zadachakh kalibrovki robotov-manipulyatorov / Yu. M. Andreev // *Visnyk NTU "KhPI"*. Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2021. – № 2 (2021). – S. 86–93. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2021.2.249537>
 4. Andrieiev, Yu., Breslavsky, D., Chystilina, H., Ivanchenko, K., Algorithm for kinematic design of anthropomorphic robot's with a free foot walking control, in *Proc 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology Conference (KhPIWeek)*, October 3-7, 2022, Kharkiv, Ukraine, IEEE, 2022, pp. 324-329. DOI: <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek57572.2022.9916395>.
 5. Andrieiev, Y., Breslavsky, D., Shabanov, H., Naumenko, K., Altenbach, H. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom / *Applied Sciences*. 2025; 15(5):2840. DOI: <https://doi.org/10.3390/app15052840>.
 6. Uspenskiy, V. B., Nekrasova, M. V. Matematichnyi opys hibridnoho kvadrokoptera z metoyu komp'yuternoho modeliuвання kerovanoho rukhu // *Visnyk NTU "KhPI"*. Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2021. – № 2 (2021). – S. 78–83. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.1.263784>.
 7. Uspenskiy, V. B., Harder, S. Ye. Rozrobka ta komp'yuterna realizatsiya modeli rukhu ta alhorytmiv upravlinnya hibridnoho multykoptera // *Visnyk NTU "KhPI"*. Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2022. – № 1 (2022). – S. 94–106. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.1.263784>.
 8. Fahlstrom Paul, G. Introduction to UAV Systems / Paul G. Fahlstrom, Thomas J. Gleason, Mohammad H. Sadraey // Fifth edition. – Pondicherry, India. Hoboken, NJ : Wiley. – 2022. – 425 p.
 9. Tahir, M. A., Mir, I., & Islam, T. U.. Control algorithms, Kalman estimation and near actual simulation for UAVs: state of art perspective. *Drones*, 7(6), 339 (2023). DOI: <https://doi.org/10.3390/drones7060339>
 10. Geronel, R. S., Beghini, G. R., Botez, R. M. et al. An overview on the use of unmanned aerial vehicles for medical product transportation: flight dynamics and vibration issues. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 44, 349 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03644-2>
 11. John, J., Harikumar, K., Senthilnath, J., & Sundaram, S. An efficient approach with dynamic multiswarm of UAVs for forest firefighting. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 54(5), 2860-2871. (2024) DOI: <https://doi.org/10.1109/TSMC.2024.3352660>
 12. Kim, J., Kim, S., Ju, C., & Son, H. I. Unmanned aerial vehicles in agriculture: A review of perspective of platform, control, and applications. *Ieee Access*, 7, 105100-105115. (2019). DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2932119>
 13. Tsouros, D. C., Bibi, S., & Sarigiannidis, P. G. A review on UAV-based applications for precision agriculture. *Information*, 10(11), 349. (2019) DOI: <https://doi.org/10.3390/info10110349>.
 14. Aboelezz, A., Mohamady, O., Hassanalian, M. et al. Nonlinear Flight Dynamics and Control of a Fixed-Wing Micro Air Vehicle: Numerical, System Identification and Experimental Investigations. *J Intell Robot Syst* 101, 64 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10846-021-01352-y>
 15. Dominguez, V. H., Garcia-Salazar, O., Amezcua-Brooks, L., Reyes-Osorio, L. A., Santana-Delgado, C., & Rojo-Rodriguez, E. G. Micro coaxial drone: Flight dynamics, simulation and ground testing. *Aerospace*, 9(5), 245. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/aerospace9050245>
 16. Ao, H. E., Honggang, G. A. O., Zhenghong, G. A. O., Bodi, M. A., Lulu, C. H. E. N., & Wei, D. A. I. Full mode flight dynamics modelling and control of stopped-rotor UAV. *Chinese Journal of Aeronautics*, 35(10), 95-105. (2022) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.03.016> <https://doi.org/10.1016/j.cja.2022.03.016>
 17. Wang, H., Sun, W., Zhao, C., Zhang, S., & Han, J. Dynamic modeling and control for tilt-rotor UAV based on 3D flow field transient CFD. *Drones*, 6(11), 338. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/drones6110338>
 18. Zhou, X., Yu, X., Guo, K., Zhou, S., Guo, L., Zhang, Y., & Peng, X. Safety flight control design of a quadrotor UAV with capability analysis. *IEEE transactions on cybernetics*, 53(3), 1738-1751. (2021). DOI: <https://doi.org/10.1109/TCYB.2021.3113168>
 19. Din, A. F. U., Mir, I., Gul, F. et al. Robust flight control system design of a fixed wing UAV using optimal dynamic programming. *Soft Comput* 27, 3053–3064 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1007/s00500-022-07484-z>
 20. Alkayas, A. Y., Chehadeh, M., Ayyad, A., & Zweiri, Y. Systematic online tuning of multirotor UAVs for accurate trajectory tracking under wind disturbances and in-flight dynamics changes. *IEEE Access*, 10, 6798–6813. (2022). DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2022.3142388>
 21. Chodnicki, M., Siemiatkowska, B., Stecz, W., & Stepień, S. Energy efficient UAV flight control method in an environment with obstacles and gusts of wind. *Energies*, 15(10), 3730. (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/en15103730>
 22. Adamski, M. Modelling of the unmanned aerial vehicles flight control system. *Aviation*, 25(2), 79–85. (2021). DOI: <https://doi.org/10.3846/aviation.2021.13391>
 23. Madruga, S. P., Tavares, A. H., Luiz, S. O., do Nascimento, T. P., & Lima, A. M. N. Aerodynamic effects compensation on multi-rotor UAVs based on a neural network control allocation approach. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 9(2), 295–312. (2021). DOI: <https://doi.org/10.1109/JAS.2021.1004266>

Надійшла (received) 05.06.2025

Прийнята до друку (accepted) 20.08.2025

Опублікована (published) 03.09.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Андрєєв Юрій Михайлович (Andrieiev Yuriy) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; e-mail: andrjeiev@gmail.com

Лавінський Денис Володимирович (Lavinsky Denys) – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри «Теоретична механіка та опір матеріалів»; м. Харків, Україна; тел. +380 (50) 5664292; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1380-3131>; e-mail: Denys.Lavinskiy@khpi.edu.ua.

Дружинін Євген Іванович (Druzhynin Yevhen) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Теоретична механіка та опір матеріалів»; м. Харків, Україна; тел. +380 (97) 7273101; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1774-9582>; e-mail: Yevhen.Druzhynin@khpi.edu.ua.

Бібліографічні описи / Bibliographic descriptions

Андрєєв Ю. М. Теоретичне обґрунтування для практичної реалізації аналітичного комп'ютерного побудування динамічних рівнянь в псевдокоординатах керованого польоту БПЛА / Ю. М. Андрєєв, Д. В. Лавінський, Є. І. Дружинін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 1 (2025). – С. 12 – 20. Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130.

Andrieiev Yu. M. Theoretical justification for the practical implementation of analytical computer construction of dynamic equations in pseudocoordinates of controlled UAV flight / Yu. M. Andrieiev, D. V. Lavinsky, E. I. Druzhynin // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2025. – No. 1 (2025). – pp. 12 – 20. Bibliography: 10 titles. – ISSN 2078-9130.