

*Д. С. ФЕДОТОВ, Ю. В. МІХЛІН***ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ПРИ НАЯВНОСТІ ПАНЕЛІ-АМОРТИЗАТОРА**

Розглянуто вимушені періодичні коливання моделі транспортного засобу, що складається з кузова, невідпідвісних мас, які моделюють колеса та елементи підвіски, а також додаткової панелі-амортизатора. Кузов та панель-амортизатор представлені у вигляді жорстких паралелепіпедів. Елементи моделі зв'язані між собою системою пружин та амортизаторів. Динаміка запропонованої моделі, що може відноситися як до легкових, так і до вантажних автомобілів, описується нелінійною дисипативною системою з 10 степенями свободи. Наведено значення власних частот та домінуючі координати, що притаманні модам коливань лінеаризованої системи, параметри якої відповідають конкретному автомобілю. Для оцінки реакції системи на зовнішні впливи обрано гармонічні навантаження, що прикладено до невідпідвісних мас. Методами числового моделювання отримано амплітудно-частотні характеристики системи для п'яти варіантів пружних характеристик пружин, що зв'язують кузов та додаткову панель, причому розглядаються також випадки суттєво нелінійних пружин. Деякі варіанти по суті належать до класу так званих «квазінульових пружних характеристик». Наближена оцінка часу перехідних процесів визначається з використанням власних значень лінеаризованої системи. Застосована оцінка гарантує, що навіть найповільніша мода власних коливань згасне до менше ніж 1% від її початкового внеску. З цього моменту коливання системи майже повністю визначаються ustalеним режимом з частотою зовнішнього навантаження. Амплітудно-частотна характеристика формується максимальними за абсолютними значеннями амплітудами координат, що визначені після виключення перехідних процесів. Розрахунки демонструють, що використання пружин з нелінійними характеристиками забезпечує суттєве зменшення коливань вантажу, що може бути розташований в центрі мас додаткової панелі-амортизатора, тобто саме в такому випадку ця панель виконує роль ефективного амортизатора. Це дає змогу забезпечити комфортне та безпечне перевезення важливих вантажів, розташованих на цій додатковій панелі.

Ключові слова: вимушені коливання, підвіска автомобіля, невідпідвісні маси, амплітудно-частотна характеристика, моди коливань.

*D. FEDOTOV, Yu. MIKHLIN***FORCED VIBRATIONS OF THE VEHICLE HAVING PANEL SHOCK ABSORBER**

Forced periodic vibrations of a vehicle model consisting of a body, unsprung masses that model the wheels and suspension elements, as well as an additional shock absorber panel, are considered. The body and the absorber panel are represented in the form of rigid parallelepipeds. The elements of the model are interconnected by a system of springs and shock absorbers. The dynamics of the proposed model, which can apply to both passenger cars and trucks, is described by the nonlinear dissipative system with 10 degrees of freedom. The values of the natural frequencies and dominant coordinates inherent in the vibration modes of the linearized system, the parameters of which correspond to a specific car, are given. To assess the system's response to external influences, harmonic loads applied to the unsprung masses are considered. Numerical modeling has been used to obtain the frequency responses of the system for five variants of the elastic characteristics of the spring connecting the body and the additional panel, and cases of significantly nonlinear springs are also considered. Some variants essentially belong to the class of so-called "quasi-zero elastic characteristics". An approximate estimate of the transient time is determined using the eigenvalues of the linearized system. The estimate used guarantees that even the slowest mode of natural oscillations will die out to less than 1% of its initial contribution. From this moment on, the system vibrations are almost completely determined by the steady-state mode with the frequency of the external load. The amplitude-frequency characteristic is formed by the maximum absolute values of the amplitudes of the coordinates, which are determined after the transient is excluded. Calculations show that the use of springs with essentially nonlinear characteristics provides a significant reduction in cargo vibrations, which can be located in the center of mass of the additional panel, i.e. in this case, this panel acts as an effective shock absorber. This allows for comfortable and safe transportation of important cargo located on this additional panel.

Keywords: forced vibrations, car suspension, unsprung masses, amplitude-frequency characteristic, vibration modes.

Вступ. Для дослідження динамічної поведінки транспортного засобу дуже часто використовуються моделі динамічних систем з кількома степенями свободи. Це дозволяє як провести модальний аналіз підвіски, а також дослідити поведінку системи при наявності зовнішніх навантажень. Іноді в таких дослідженнях обмежуються спрощеними моделями транспортного засобу, наприклад, моделлю «чверті машини» (що приводить до аналізу системи з двома степенями свободи) [1-3], або моделлю «половини машини» (система з чотирма степенями свободи) [4, 5]. Хоча такі моделі є популярними, але вони не можуть описати основні ефекти, що характеризують динаміку автомобіля [6]. В цій публікації дано також обговорення різних видів динамічних моделей транспортного засобу. Значного поширення набула модель з 7 степенями свободи, яка дає змогу описати як динаміку підвіски, так і динаміку коліс у вигляді невідпідвісних мас, що зв'язані з корпусом за допомогою пружних елементів. Використовуючи цю модель, можна досліджувати всі основні рухи

транспортного засобу, а саме, вертикальні рухи, рухи качки, тангажу та крену [7, 8]. Аналіз теорії динаміки транспортних засобів та багато прикладів застосування теорії можна знайти у роботі [9]. У представленій роботі розглядається узагальнення вказаної моделі підвіски автомобіля, в якій до підвіски додано панель-амортизатор, що розміщена над корпусом автомобіля. Детальний модальний аналіз відповідної лінеаризованої системи при невеликих амплітудах коливань, зроблено в роботі [10]. Для оцінки реакції системи на зовнішні впливи обрано гармонічні навантаження, що діють на колеса. Це дає змогу оцінити реакцію системи у вигляді амплітудно-частотних характеристик. Передбачається, що пружини, які зв'язують корпус та додаткову панель, є нелінійними. Саме при збільшенні степені нелінійності в цих пружинах, відбувається ефективне гасіння коливань центру мас панелі, де може бути закріплений чутливий вантаж, що перевозиться.

1. Модель транспортного засобу, що розглядається. У даній роботі розглядається спрощена

динамічна модель взаємодії кузова автомобіля, невіднесених мас, а також додаткової панелі-амортизатора, що розміщена над кузовом. На Рис. 1 зображені відповідні координати, а також основні геометричні та фізичні характеристики цієї моделі. Як кузов автомобіля, так і додаткову панель представлено у вигляді жорстких паралелепіпедів.

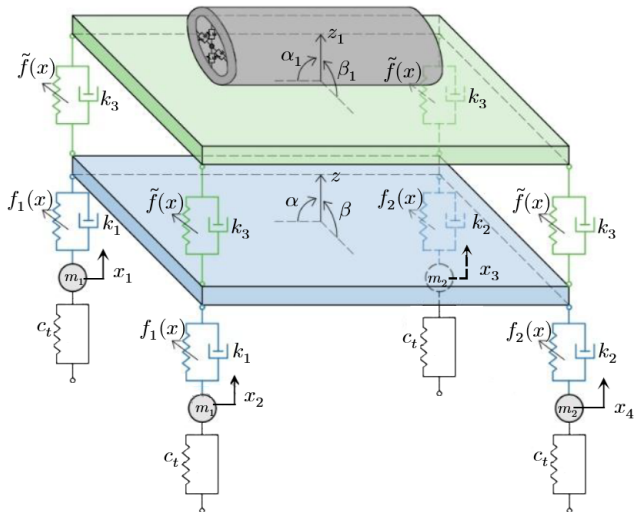


Рис. 1 – Модель взаємодії кузова автомобіля, невіднесених мас та панелі-амортизатора

Тут невіднесені маси моделюють колеса та елементи підвіски, які з'єднуються з кузовом через систему амортизаторів і пружин, що дозволяють поглинати небажані впливи на транспорт, що виникають під час руху. Вважаємо, що геометричні розміри верхньої панелі-амортизатора, за винятком товщини, співпадають з розмірами кузова. На панелі може бути розташований вантаж різного походження. У подальшому, для спрощення аналізу, припускаємо, що вантаж розташований в центрі мас панелі.

Динаміка запропонованої моделі, що може відноситися як до легкових, так і до вантажних автомобілів, описується наступною системою з 10 степенями свободи:

$$\begin{cases} M_c \ddot{q} + H^T C_{NL}(q, x) - H^T \tilde{C}_{NL}(q_1, q) + H^T KV - H^T \tilde{K}V_1 = 0, \\ M_s \ddot{x} - C_{NL}(q, x) + C_1 x - KV = F(t), \\ M_{c_1} \ddot{q}_1 + H_1^T \tilde{C}_{NL}(q_1, q) + H_1^T \tilde{K}V_1 = 0; \end{cases} \quad (1)$$

де узагальнені координати представлені трьома векторами, що описують рухи кузова, панелі-амортизатора та невіднесених мас, а саме,

$$q = (z, \alpha, \beta)^T, q_1 = (z_1, \alpha_1, \beta_1)^T, x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

Тут z — вертикальні переміщення центру ваги кузова (змінна відображає ступінь розгойдування); α — кут обертання центру ваги кузова у повздовжній осі; β — кут обертання центру ваги кузова у поперечній осі (міра похитування транспортного засобу). Коливання невіднесених мас описуються чотирма узагальненими координатами $x_i, i = \overline{1,4}$, що відповідають вертикальним переміщенням. Матриці мас кузова, частин підвіски та амортизатора представлено у діагональному вигляді відповідно:

$$M_c = \text{diag}(M, I_\alpha, I_\beta), \quad M_s = \text{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2)$$

$$M_{c_1} = \text{diag}(M_1, I_{\alpha_1}, I_{\beta_1})$$

Рух центру ваги верхньої панелі визначається координатою z_1 , кутів повороту панелі — координатами α_1, β_1 . Маса панелі позначено як M_1 .

Як можна побачити на Рис. 1, кути кузова та панелі можна виразити відповідно через координати векторів q та q_1 . Відповідна залежність описується матрицею H . Маємо

$$\begin{aligned} U &= Hq - x, & V &= H\dot{q} - \dot{x}, \\ U_1 &= Hq_1 - Hq, & V_1 &= H\dot{q}_1 - H\dot{q}, \end{aligned}$$

де

$$H = H_1 = \begin{pmatrix} 1 & -l_1 & d_1 \\ 1 & -l_1 & -d_1 \\ 1 & l_2 & d_2 \\ 1 & l_2 & -d_2 \end{pmatrix}$$

Тут вектор U описує стиснення між невіднесеними масами та кузовом, вектор V — швидкість зміни цього стиснення за часом; вектор U_1 описує стиснення між додатковою панеллю та кузовом, вектор V_1 — швидкість зміни цього стиснення за часом. У лінеаризованій системі матриці жорсткості зв'язуючих пружин мають діагональний вигляд:

$$C = \text{diag}(c_1, c_1, c_2, c_2), \quad \tilde{C} = \text{diag}(c_3, c_3, c_3, c_3),$$

$$C_1 = \text{diag}(c_t, c_t, c_t, c_t)$$

матриці, що визначають дисипацію в пружинах під корпусом та між корпусом і верхньою панеллю:

$$K = \text{diag}(k_1, k_1, k_2, k_2), \quad \tilde{K} = \text{diag}(k_3, k_3, k_3, k_3)$$

Вектор-функції $C_{NL}(q, x)$ та $\tilde{C}_{NL}(q_1, q)$ описують нелінійну пружну взаємодію відповідно між невіднесеними масами та кузовом, а також між кузовом та додатковою панеллю. Конкретні залежності, що були використані в розрахунках, представлені в Розділі 3.

Зауважимо, що рівняння, подібні системі (1), але без наявності додаткової панелі, описують відому систему з 7 степенями свободи, яка представлена в кількох публікаціях, зокрема, в статтях [7-9].

2. Власні моди коливань системи.

Лінеаризована система, куди входять тільки лінійні складові жорсткісних характеристик, описує вільні коливання в лінійній постановці:

$$\begin{cases} M_c \ddot{q} + H^T CU - H^T \tilde{C}U_1 + H^T KV - H^T \tilde{K}V_1 = 0, \\ M_s \ddot{x} - CU + C_1 x - KV = 0, \\ M_{c_1} \ddot{q}_1 + H_1^T \tilde{C}U_1 + H_1^T \tilde{K}V_1 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

Дослідження мод коливань даної системи важливе, оскільки дозволяє заздалегідь оцінити моди коливань більш складної нелінійної системи.

Для конкретних розрахунків, що представлені в цьому та в наступних розділах, розглядається автомобіль з параметрами, що подано далі. Зазначимо,

що ці параметри відповідають конкретним автомобілям [7,11]. Обрано: маса кузова $M = 2369$ (кг), момент інерції кузова відносно поздовжньої вісі $I_\alpha = 4108$ (кг·м²), момент інерції кузова відносно поперечної вісі $I_\beta = 938$ (кг·м²), маса панелі-амортизатора $M_1=180$ (кг, разом з вантажем), або 80 (кг, без вантажу), момент інерції панелі відносно поздовжньої вісі $I_{\alpha_1} = 110.16$ (кг·м²), момент інерції панелі відносно поперечної вісі $I_{\beta_1} = 36.69$ (кг·м²), маса передніх невіднесених частин $m_1=80$ (кг), маса задніх невіднесених частин $m_2=80$ (кг), жорсткості шин $c_t=258000$ (Н/м), передньої підвіски $c_1=40000$ (Н/м), задньої підвіски $c_2=50000$ (Н/м) та пружини, що зв'язує кузов та панель $c_3=4170$ (Н/м), коефіцієнти демпфування у передній підвісці $k_1=700$ (Н с/м), у задній підвісці $k_2=900$ (Н с/м) та в пружині, що зв'язує кузов та панель, $k_3=75$ (Н с/м), відстань від центру ваги до передньої частини кузова $l_1=1.459$ (м), відстань від центру ваги до задньої частини кузова $l_2=1.486$ (м), половина передньої колії автомобіля $d_1=0.868$ (м), половина задньої колії автомобіля $d_2=0.837$ (м). Зауважимо, що моменти інерції панелі-амортизатора важкого автомобіля були обчислені без урахування вантажу (100 кг), який в розрахунках умовно розташовано в центрі панелі.

Наведемо значення власних частот для обраних значень параметрів системи:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.411 \pm 7.269i, & \lambda_2 &= -0.599 \pm 8.876i \\ \lambda_3 &= -0.957 \pm 10.455i, & \lambda_4 &= -0.838 \pm 10.529i \\ \lambda_5 &= -3.051 \pm 18.183i, & \lambda_6 &= -3.131 \pm 18.445i \\ \lambda_7 &= -4.543 \pm 60.873i, & \lambda_8 &= -4.506 \pm 60.883i \\ \lambda_9 &= -5.847 \pm 61.768i, & \lambda_{10} &= -5.889 \pm 61.779i \end{aligned} \quad (3)$$

Наведемо також домінуючі координати, що притаманні модам коливань, не розглядаючи останні чотири високочастотні моди. А саме, для моди 1 домінуючою є координата z_1 , для моди 2 — α, z_1, α_1 , для моди 3 — z, z_1 , для моди 4 — β, β_1 , для моди 5 — α_1 , для моди 6 — β_1 . Власні моди коливань можна застосувати в якості нульового наближення як при розрахунках нелінійних мод коливань при значних переміщеннях елементів системи, так і коливань при наявності зовнішніх навантажень.

3. Побудова амплітудно-частотних характеристик системи. Амплітудно-частотні характеристики обчислюються для випадку наявності кубічної нелінійності в характеристиках пружин $C_{NL}, \tilde{C}_{NL}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, що з'єднують відповідно невіднесені маси з кузовом, та кузов з пластиною-амортизатором,

$$C_{NL} = C(\gamma_1 U + \gamma_3 U^3), \quad \tilde{C}_{NL} = \tilde{C}(\tilde{\gamma}_1 U_1 + \tilde{\gamma}_3 U_1^3) \quad (4)$$

Обрано п'ять варіантів жорсткісних характеристик пружин. А саме, для матриці $\begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_3 \\ \tilde{\gamma}_1 & \tilde{\gamma}_3 \end{pmatrix}$ маємо

$$\begin{aligned} 1) & \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0.8 & 375 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0.6 & 750 \end{pmatrix}, \\ 4) & \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0.4 & 1125 \end{pmatrix}, \quad 5) \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0.2 & 1500 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ці жорсткісні характеристики представлено на Рис. 2. Зазначимо, що для варіантів 4), 5) характеристики пружини $\tilde{C}_{NL}$ по суті належать до класу так званих «квазінульових характеристик». Пружні елементи з такими характеристиками досліджуються в деяких роботах [12-14].

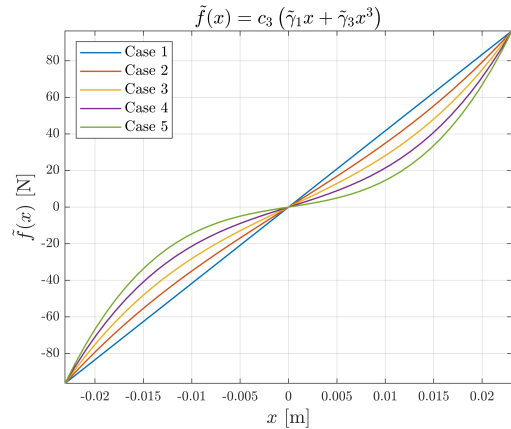


Рис. 2 — Жорсткісні характеристики пружини $\tilde{C}_{NL}$, що з'єднує кузов з панеллю-амортизатором

Для того, щоб оцінити реакцію системи на зовнішні навантаження, розглядаються такі періодичні впливи на невіднесені маси (колеса): $A \sin(\omega t)$ — на передні колеса та $A \sin(\omega t + \nu)$ — на задні колеса, де ν — параметр запізнювання, який в розрахунках прийнято рівним 0.1. Зазначимо, що перехідні процеси описуються членами виду $\exp(\operatorname{Re}\{\lambda_i\}t)$, які визначаються початковим відхиленням від усталеного режиму, тому при побудові АЧХ введено наближену оцінку тривалості перехідного процесу з використанням власних значень лінеаризованої системи. Вважаємо, що час перехідних процесів не залежить від обраних конфігурацій пружин,

$$t_{\text{transient}} = \left\lceil \frac{5}{\min|\operatorname{Re}\{\lambda_i\}|} \right\rceil \quad (5)$$

Така оцінка гарантує, що навіть найповільніша мода власних коливань згасне до $\exp(-5) \approx 0.00673$, тобто до менше ніж 1% від її початкового внеску. З цього моменту коливання системи майже повністю визначаються усталеним режимом з частотою зовнішнього навантаження, яка варіювалась у діапазоні $[0, |\operatorname{Im}\{\lambda_{10}\}| + 1]$ з 1000 точками.

Для кожного значення частоти та набору жорсткісних характеристик пружин система інтегрувалась явним методом Рунге—Кутти—Бутчера 5-го порядку [15] з нульовими початковими умовами на інтервалі часу, достатньому для загасання перехідних процесів та досягнення усталеного режиму. Вибір саме цього методу обґрунтований його більшою областю стійкості (рис. 3), що забезпечує збереження чисельної стабільності при більших кроках інтегрування та дозволяє зменшити обчислювальні витрати під час розрахунку амплітудно-частотних характеристик. Максимальні за абсолютними значеннями амплітуди координат на усталеному режимі формували АЧХ, які зберігаються у вигляді

тривимірних масивів розмірами $5 \times 1000 \times 20$, що відповідають обраним варіантам жорсткісних характеристик пружин, значенням частот зовнішнього навантаження та числу фазових координат системи. Для прискорення розрахунків застосовувалися паралельні обчислення з використанням 4 ядер, що значно скоротили час роботи, забезпечивши ефективний аналіз великого обсягу даних.

Амплітудно-частотні характеристики координат, що є найбільш вагомими в режимі вимушених коливань, представлено на Рис. 4. Як можна було передбачити, отримані резонансні коливання зі значними амплітудами з'являються поблизу частот та мод коливань лінеаризованої системи. Але розглянуті періодичні впливи, що спрямовані на колеса транспортного засобу, не збуджують коливання з частотами, близькими до власних частот λ_5 та λ_6 , що відповідають модам значних коливань одного з кутів додаткової панелі. З представлених графіків можна побачити, що у випадку незначної нелінійності в пружинах, що з'єднують кузов з панеллю, амплітуди коливань центру мас панелі, що визначається координатою z_1 , є значними, тобто, ця панель виступає як абсорбер коливань. При збільшенні ступеня нелінійності в цих пружинах, амплітуди коливань центру мас панелі суттєво зменшуються, тобто, саме в такому випадку ця панель виконує роль ефективного амортизатора.

Висновки. Проведене дослідження дозволяє виявити реакцію транспортного засобу з додатковою панеллю, що розташована над кузовом цього засобу, на зовнішні періодичні впливи, що прикладено на колеса.

Показано, що при наявності цієї панелі, що розташована над кузовом автомобіля, саме наявність суттєвої нелінійності в пружинах, що з'єднують її з кузовом, значно зменшує амплітуди коливань центру мас панелі. Це дає змогу забезпечити та безпечно перевезення важливих вантажів, розташованих на цій додатковій панелі-амортизаторі.

Роботу виконано за фінансовою підтримкою Національного фонду досліджень України в рамках проекту 2023.03/0255 «Вібраційний захист пристроїв, апаратури, вантажів та людей від динамічних впливів в надзвичайних умовах на основі дослідження нелінійних коливань систем складної структури з керованими і пасивними елементами».

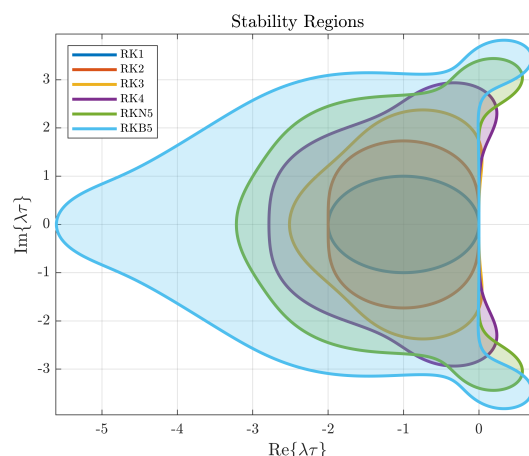


Рис. 3 – Області стійкості деяких явних методів Рунге—Кутти

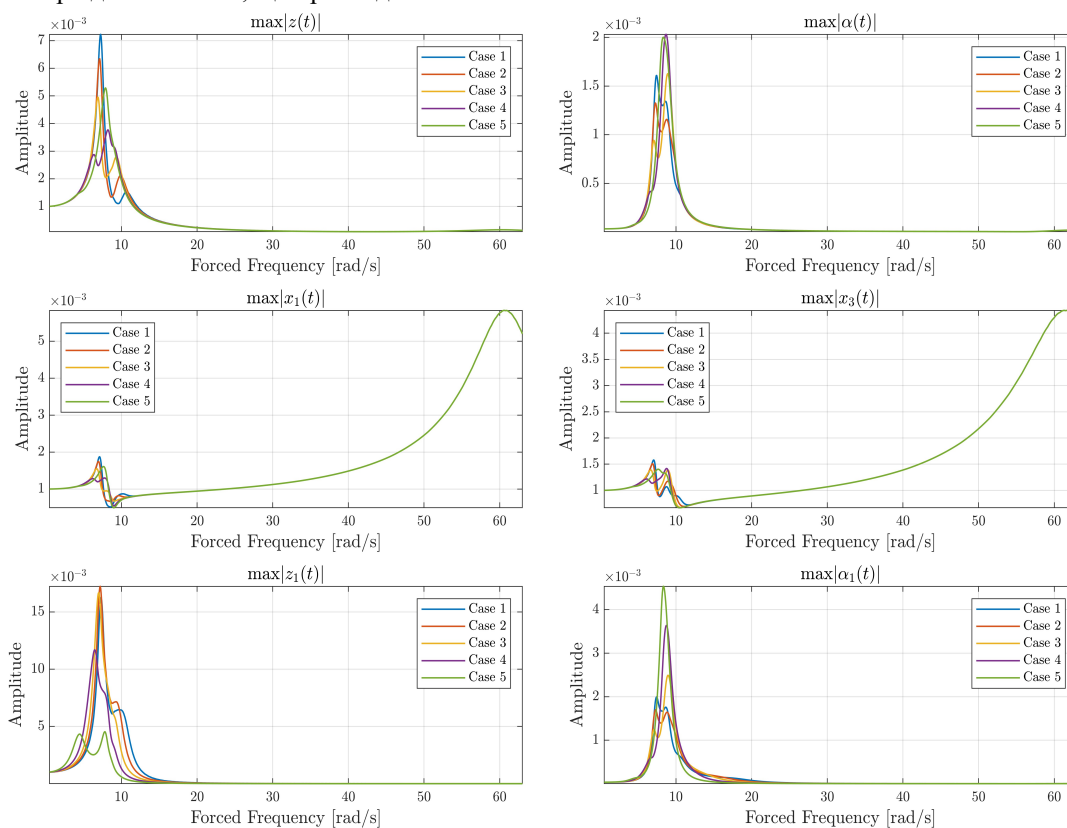


Рис. 4 – Амплітудно-частотні характеристики для змінних $z, \alpha, x_1, x_3, z_1, \alpha_1$

Список літератури

1. Haroon, Muhammad, et al. "A time and frequency domain approach for identifying nonlinear mechanical system models in the absence of an input measurement." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, no. 3–5, Dec. 2004, pp. 1137–55. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.008>
2. Türkay, Semiha, and Hüseyin Akçy. "A Study of Random Vibration Characteristics of the Quarter-Car Model." IFAC Proceedings Volumes, vol. 37, no. 22, Apr. 2004, pp. 739–44. [https://doi.org/10.1016/s1474-6670\(17\)30432-9](https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)30432-9)
3. Soong, Ming Foong, et al. "Between simplicity and accuracy: Effect of adding modeling details on quarter vehicle model accuracy." *PLoS ONE*, vol. 12, no. 6, June 2017, p. e0179485. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0179485>
4. Marzbanrad, Javad, et al. "Stochastic Optimal Preview Control of a Vehicle Suspension." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, no. 3–5, Oct. 2003, pp. 973–90. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(03\)00812-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(03)00812-5)
5. Rao, L. V. V., and S. Narayanan. "Preview Control of Random Response of a Half-car Vehicle Model Traversing Rough Road." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 1–2, Sept. 2007, pp. 352–65. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.004>
6. Ersal, Tulga, et al. "Model Reduction in Vehicle Dynamics Using Importance Analysis." *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 7, Jan. 2009, pp. 851–65. <https://doi.org/10.1080/00423110802444071>
7. Kumar, Hemanta, et al. "Study the Dynamic Behaviour of Seven DOF of Full Car Model With Semi-active Suspension System." *International Journal of Vehicle Performance*, vol. 7, no. 1/2, Jan. 2021, p. 21. <https://doi.org/10.1504/ijvp.2021.10035865>
8. Palli, S., et al. "Dynamic Behaviour of a 7 DoF Passenger Car Model." *International Journal of Vehicle Structures and Systems*, vol. 9, no. 1, Feb. 2017. <https://doi.org/10.4273/ijvss.9.1.12>
9. Jazar, Reza N. "Vehicle Dynamics." Springer eBooks, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53441-1>
10. Сурганова, Ю. Е., et al. "МОДИ КОЛИВАНЬ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ЗА НАЯВНОСТІ ПАНЕЛІ-АМОРТИЗАТОРА." *Проблеми Обчислювальної Механіки І Міцності Конструкцій*, vol. 1, no. 38, Dec. 2024, pp. 176–95. <https://doi.org/10.15421/4224114>
11. Pylypchuk, Valery N., et al. "Vehicle State Estimation Using Dynamic 7 Degree-of-Freedom Observer." *ASME 2006 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Jan. 2006, pp. 441–48. <https://doi.org/10.1115/imece2006-15173>
12. Wang, Kai, et al. "A nonlinear ultra-low-frequency vibration isolator with dual quasi-zero-stiffness mechanism." *Nonlinear Dynamics*, vol. 101, no. 2, July 2020, pp. 755–73. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05806-0>
13. Fan, Haigui, et al. "Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation." *Composite Structures*, vol. 243, Mar. 2020, p. 112244. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112244>
14. Jin, Yang, et al. "Cascaded essential nonlinearities for enhanced vibration suppression and energy harvesting." *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 2, Jan. 2021, pp. 1427–38. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06165-6>
15. Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2016. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>

References (transliterated)

1. Haroon, Muhammad, et al. "A time and frequency domain approach for identifying nonlinear mechanical system models in the absence of an input measurement." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, no. 3–5, Dec. 2004, pp. 1137–55. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.06.008>
2. Türkay, Semiha, and Hüseyin Akçy. "A Study of Random Vibration Characteristics of the Quarter-Car Model." IFAC Proceedings Volumes, vol. 37, no. 22, Apr. 2004, pp. 739–44. [https://doi.org/10.1016/s1474-6670\(17\)30432-9](https://doi.org/10.1016/s1474-6670(17)30432-9)
3. Soong, Ming Foong, et al. "Between simplicity and accuracy: Effect of adding modeling details on quarter vehicle model accuracy." *PLoS ONE*, vol. 12, no. 6, June 2017, p. e0179485. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0179485>
4. Marzbanrad, Javad, et al. "Stochastic Optimal Preview Control of a Vehicle Suspension." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 275, no. 3–5, Oct. 2003, pp. 973–90. [https://doi.org/10.1016/s0022-460x\(03\)00812-5](https://doi.org/10.1016/s0022-460x(03)00812-5)
5. Rao, L. V. V., and S. Narayanan. "Preview Control of Random Response of a Half-car Vehicle Model Traversing Rough Road." *Journal of Sound and Vibration*, vol. 310, no. 1–2, Sept. 2007, pp. 352–65. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.08.004>
6. Ersal, Tulga, et al. "Model Reduction in Vehicle Dynamics Using Importance Analysis." *Vehicle System Dynamics*, vol. 47, no. 7, Jan. 2009, pp. 851–65. <https://doi.org/10.1080/00423110802444071>
7. Kumar, Hemanta, et al. "Study the Dynamic Behaviour of Seven DOF of Full Car Model With Semi-active Suspension System." *International Journal of Vehicle Performance*, vol. 7, no. 1/2, Jan. 2021, p. 21. <https://doi.org/10.1504/ijvp.2021.10035865>
8. Palli, S., et al. "Dynamic Behaviour of a 7 DoF Passenger Car Model." *International Journal of Vehicle Structures and Systems*, vol. 9, no. 1, Feb. 2017. <https://doi.org/10.4273/ijvss.9.1.12>
9. Jazar, Reza N. "Vehicle Dynamics." Springer eBooks, 2017. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53441-1>
10. Surhanova, Yu. E., et al. "МОДИ КОЛИВАНЬ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ЗА НАЯВНОСТІ ПАНЕЛІ-АМОРТИЗАТОРА." *Проблеми Обчислювальної Механіки І Міцності Конструкцій*, vol. 1, no. 38, Dec. 2024, pp. 176–95. <https://doi.org/10.15421/4224114>
11. Pylypchuk, Valery N., et al. "Vehicle State Estimation Using Dynamic 7 Degree-of-Freedom Observer." *ASME 2006 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, Jan. 2006, pp. 441–48. <https://doi.org/10.1115/imece2006-15173>
12. Wang, Kai, et al. "A nonlinear ultra-low-frequency vibration isolator with dual quasi-zero-stiffness mechanism." *Nonlinear Dynamics*, vol. 101, no. 2, July 2020, pp. 755–73. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05806-0>
13. Fan, Haigui, et al. "Design of metastructures with quasi-zero dynamic stiffness for vibration isolation." *Composite Structures*, vol. 243, Mar. 2020, p. 112244. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112244>
14. Jin, Yang, et al. "Cascaded essential nonlinearities for enhanced vibration suppression and energy harvesting." *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 2, Jan. 2021, pp. 1427–38. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-06165-6>
15. Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, 2016. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>

Надійшла (received) 11.05.2025

Прийнята до друку (accepted) 20.08.2025

Опублікована (published) 03.09.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Федотов Денис Сергійович (Fedotov Denys) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», бакалавр з прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-9243-1192>; e-mail: Denys.Fedotov@infiz.khpi.edu.ua

Міхлін Юрій Володимирович (Mikhlin Yuri) – доктор фізико-математичних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (068) 888-95-33; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1780-9346>; e-mail: Yuriy.Mikhlin@khpi.edu.ua