

В. Б. УСПЕНСЬКИЙ**МЕТОД ВІДНОСНОЇ НАВІГАЦІЇ ДЛЯ ОРБІТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ**

Сьогодні проблема космічного сміття є вельми актуальною, бо кількість уламків штучного походження у навколоземному просторі робить небезпечними подальші космічні польоти. Пропонуються різні програми по знищенню такого сміття, але є багато наукових і технологічних проблем для їх реалізації. Однією з таких проблем є відстеження пасивного орбітального об'єкту та прогнозування його руху в умовах втрати контакту з ним з борту іншого апарату. Особливістю такої задачі є те, що для пасивного об'єкту можливі тільки відносні виміри, а вихідна модель його руху апіорі не повна. У зв'язку з цим у статті викладено результати вирішення навігаційної задачі для двох орбітальних об'єктів, один з яких є активним, другий – пасивним. На першому об'єкті розміщена навігаційна система, яка містить систему визначення орієнтації, обчислювач, приймач сигналів GPS, радіотехнічну слідкуючу систему. Задача полягає у розробці алгоритмів визначення поточних координат та швидкості за наявними вимірами від GPS для першого об'єкту та відносними вимірами віддаленості між об'єктами та напрямку лінії візування до пасивного об'єкту від слідкуючої системи для другого об'єкту. В обох випадках використовується 9-вимірний розширений фільтр Калмана у дискретному вигляді. Корекція здійснюється за замкненою схемою. Додатковою компонентою вектору стану фільтра призначено поправку до модельного прискорення, яка визначається у процесі фільтрації. Шляхом моделювання обґрунтовано вибір саме такого фільтра серед інших схем корекції. Виявлено необхідність спеціального налаштування обраного фільтра під конкретні умови функціонування. Описано алгоритм розв'язку задачі та наведено конкретні формули для налаштування розширеного фільтра, а саме для обрання матриць дисперсій вхідних шумів. Моделювання роботи фільтрів для конкретних моделей похибок GPS та слідкуючої системи демонструє покращення точності визначення координат відносно точності GPS для активного об'єкту до 10 разів, для пасивного об'єкту в 3–4 рази. Додатково оцінюються також поправки до модельного прискорення, які зменшують рівень невизначеного фактичного прискорення в рази. Така властивість корисна в автономному режимі навігації, коли тимчасово відсутні ті чи інші зовнішні виміри. Проаналізовано аспекти практичної реалізації алгоритмів у складі бортового програмного забезпечення.

Ключові слова: орбітальні об'єкти, відносна навігація, GPS, слідкуюча система, розширений фільтр Калмана, налаштування фільтра.

V. USPENSKYI**RELATIVE NAVIGATION METHOD FOR ORBITAL OBJECTS**

Now the problem of space debris is relevant, because the amount of artificial debris in near-Earth space makes further space flights dangerous. Various programs are proposed to destroy such waste, but there are many scientific and technological challenges to their implementation. One of such problems is tracking a passive orbital object and predicting its motion in the event of loss of contact with it from another device. The peculiarity of such a problem is that only relative measurements are possible for a passive object, and the initial model of its motion is a priori incomplete. In this regard, the article presents the results of solving the navigation problem for two orbital objects, one of which is active, the second is passive. The first object is equipped with a navigation system that includes an orientation determination system, a computer, a GPS signal receiver, and a radio-technical tracking system. The task is to develop algorithms for determining the current coordinates and speed based on available measurements from GPS for the first object and relative measurements of the distance between the objects and the direction of the line of sight to the passive object from the tracking system for the second object. In both cases, a 9-dimensional extended Kalman filter in discrete form is used. Correction is carried out according to a closed-loop scheme. An additional component of the filter state vector is assigned to the correction to the model acceleration. The choice of such a filter among other correction schemes is justified by modeling. The need for special tuning of the selected filter for specific operating conditions is identified. The algorithm for solving the problem is described and specific formulas for tuning the extended filter are given, namely for selecting the input noise dispersion matrices. Modeling the operation of filters for specific GPS error models and the tracking system demonstrates an improvement in the accuracy of determining coordinates relative to the GPS accuracy for an active object by up to 10 times, for a passive object by 3–4 times. This property is useful in autonomous navigation mode, when certain external measurements are temporarily absent. Aspects of the practical implementation of algorithms in the onboard software are analyzed.

Keywords: orbital objects, relative navigation, GPS, tracking system, extended Kalman filter, filter settings.

Проблема, що розглядається, та аналіз її стану. За роки практичної космонавтики кількість уламків штучного походження у навколоземному просторі стала дуже великою. За оцінками уламків з розміром за 10 см, більш 17 тис., а менших за розміром – 900 тис. До того ж їх угруповання спонтанно множиться внаслідок неконтрольованих зіткнень та руйнувань. Все це робить небезпечними подальші космічні польоти. Пропонуються різні методи по знищенню такого сміття [1; 2], але є багато наукових і технологічних проблем щодо їх реалізації. Однією з проблем є високоточне відстеження таких пасивних об'єктів, якими є уламки, з борту апарату-перехоплювача. Для вирішення такої проблеми, як найменше, необхідно визначати відстань між об'єктами за допомогою спеціального обладнання. Подібна проблема виникає не тільки у зв'язку із космічним сміттям, але й для багатьох місій, що виконуються мережами супутників зв'язку та навігації

[3]. Виявляється, що точні вимірювання міжсупутникових відстаней мають вирішальне значення для успішної роботи розподілених мереж апаратів [4]. Так в [5] розглянуто результати 44 багатосупутникових місій та проаналізовано кореляцію їх ефективності з показниками точності відносної навігації, яка мала місце в місіях. В [6] вказано, що для отримання вимірювань відстані між супутниками використовуються два основних методи: непрямі та прямий. Перший використовує існуючу інфраструктуру, таку як глобальні навігаційні супутникові системи і наземні станції стеження для незалежного визначення абсолютних положень кожного супутника, які потім математично перетворюються на відносні положення. Аналіз показав, що навколо Землі зазвичай використовуються саме виміри глобальних супутникових навігаційних систем, які здійснюються на всіх супутниках мережі. При цьому точність відновлення параметрів орбіти з

використанням диференціальних доповнень досягає кількох сантиметрів [7]. Але такий метод не можна застосовувати для пасивних об'єктів. Для них необхідно використовувати радіолокацію або лазерну локацію з боку активного супутника, яка дозволяє визначити віддаленість об'єктів з точністю на рівні сантиметрів або навіть міліметрів. У цьому разі мова йдеться про прямі методи, або методи відносної навігації. В [8] наведено метод підвищення точності GPS-визначень координат мультикоптерів у щільному рої на основі методів відносної навігації завдяки додатковим вимірам відстані між агентами рою. Позитивний ефект було досягнуто за рахунок інформаційної надлишковості. Аналогічний підхід з використанням радіолокації може бути використано також для мережі супутників. Таким чином, для високоточного визначення координат пасивного об'єкту необхідно, по-перше, визначити координати активного об'єкту за допомогою GPS бажано з використанням диференціальних доповнень, по-друге, визначити відносне положення пасивного об'єкту за допомогою радіолокації з боку активного. Абсолютні координати об'єктів визначаються через певну математичну обробку.

Універсальним методом комплексування інформації в навігаційних системах є фільтр Калмана (ФК). В практиці використання в інтегрованих навігаційних системах маємо різні модифікації такого фільтра [9]. Серед найвідоміших – розширений ФК [10]. Його перевагою є те, що він пристосований до нелінійних динамічних систем з нелінійними вимірювачами. За його допомогою здійснюється комплексування інформації в інтегрованих системах для різних об'єктів [11; 12]. Недоліком є недостатньо висока точність для суттєво нелінійних систем та особливості при тривалих перервах між корекціями. В [13] показано, як використовувати інший різновид ФК – ансамблевий фільтр, в задачах навігації. Наведені результати моделювання свідчать про певні переваги в точності, але в обчислювальному плані алгоритм досить складний. До того ж невідомо, як він поводить після часових перерв у коригуючих вимірах. Є роботи, спрямовані на зменшення складності новітніх фільтрів. В [14] дається приклад реалізації кубатурного ФК в навігаційній системі, в [15; 16] досліджуються можливості багаточасткового фільтра. Але прикладів практичного використання останніх різновидів фільтра небагато. Таким чином, для задачі, що розглядається, доцільно використовувати методи відносної навігації, а в якості математичного апарату – розширений фільтр Калмана, як найбільш досліджений для подібних задач. Новітність такого рішення полягатиме, по-перше, в специфіці об'єктів, що розглядатимуться, по-друге – в необхідності провести та обґрунтувати налаштування фільтра в конкретних умовах функціонування, без чого він не буде працездатним. І, нарешті, отримати оцінки ефективності запропонованих алгоритмів.

Постановка задачі. Маємо два об'єкти A_1 та A_2 , що рухаються по своїм еліптичним орбітам навколо Землі (рис.1).

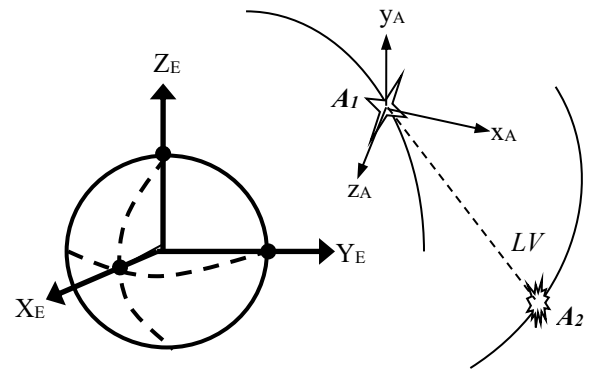


Рис. 1 – Геоцентрична інерціальна система координат, орбітальні об'єкти A_1 та A_2 , лінія візування LV

На рисунку зображено геоцентричну екваторіальну інерціальну систему координат (СК) з осями X_E, Y_E, Z_E , відносно якої далі здійснюється визначення координат об'єктів. Орієнтація її осей співпадає із орієнтацією однойменних осей системи координат WGS-84 на момент початку усієї місії, а далі не змінюється відносно зірок. На рисунку нанесені два фрагменти еліптичних орбіт з об'єктами A_1 та A_2 , при цьому об'єкт A_1 є активним, а A_2 – пасивним, наприклад, це зразок космічного сміття. Вважаємо, що на об'єкті A_1 є: бортова навігаційна система, яка визначає кватерніон орієнтації Λ пов'язаної із об'єктом СК (вісі x_A, y_A, z_A) відносно інерціальної системи; обчислювач; приймач сигналів GPS; радіотехнічна слідуюча система (РСС), осі якої співпадають із зв'язаною СК (ПСК). За допомогою РСС за відповідних умов проводиться спостереження за об'єктом A_2 , при цьому вісь x_A повинна бути спрямована у бік об'єкта, що спостерігається. РСС забезпечує вимір віддаленості ρ об'єкту A_2 від A_1 та двох кутів $\alpha \in [-\pi/2; +\pi/2]$, $\beta \in [-\pi/2; +\pi/2]$ для лінії візування LV відносно ПСК (рис.2).

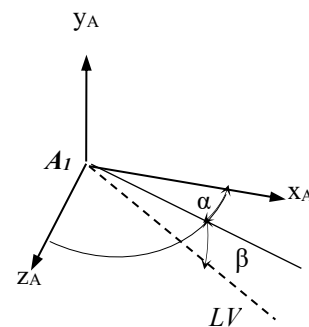


Рис. 2 – Кути для LV відносно ПСК

Кут α відповідає повороту x_A навколо осі u_A до площини, що проходить через вісь u_A та LV . Кут β відповідає другому повороту перетвореної осі x_A навколо перетвореної осі z_A . Обидва кути відраховуються проти годинникової стрілки.

Таким чином, задача, що розглядається, полягає у поточному визначенні на борту об'єкту A_1 координат та швидкості пасивного об'єкта A_2 за наявною інформацією відносно власного стану A_1 та вимірами РСС.

Обговорення задачі. З геометричної точки зору сформульована задача є тривіальною і розв'язується через такі співвідношення:

$$\bar{R}_{A_2}^{\{E\}} = \bar{R}_{A_1}^{\{E\}} + \Delta\bar{R}^{\{E\}},$$

де $\bar{R}_{A_2}^{\{E\}}$ – шуканий радіус-вектор об'єкту A_2 з початком в центрі Землі з координатами в інерціальній СК, позначений індексом $\{E\}$; $\bar{R}_{A_1}^{\{E\}}$ – відомий радіус-вектор об'єкту A_1 , координати якого отримуватимуть з інформації від GPS з врахуванням обертання Землі навколо своєї осі;

$\Delta\bar{R}^{\{E\}} = \text{vect}\{\Lambda \circ (0 + \Delta\bar{R}^{\{A_1\}}) \circ \tilde{\Lambda}\}$ – відносний радіус-вектор, що починається в точці A_1 , а закінчується в точці A_2 , в проекціях на СК $\{E\}$. Він обчислюється за допомогою стандартного перетворення через поточний кватерніон орієнтації та відносний радіус-вектор в проекціях на вісі СК $\{A_1\}$, що визначається за формулою

$$\Delta\bar{R}^{\{A_1\}} = \text{col}(\rho \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha; \rho \cdot \sin\beta; -\rho \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha).$$

Наведений розв'язок є задовільним тільки за умов ідеально точних вимірів координат A_1 від GPS та ідеальних вимірів кутів α, β та відстані ρ до A_2 від РСС. До того ж цей метод не дає змоги прогнозувати координати A_2 в той час, коли об'єкт не спостерігається бортовою РСС за умов знаходження на ділянці орбіти над протилежним боком Землі. Для подолання такої обмеженості пропонується використовувати методи теорії оцінювання, а саме фільтр Калмана (ФК), для отримання шуканих параметрів. Теоретично можна ввести складний вектор стану динамічного процесу, який містить координати та швидкість обох об'єктів, та вектор вимірів, до якого долучити виміри від GPS, що стосуються A_1 , та виміри РСС, що відносяться до A_2 . Тоді алгоритм фільтру Калмана виглядатиме з одного боку універсально, з іншого – лаконічно. Але таке об'єднання в умовах практичного використання не є зручним та доцільним. Це пояснюється тим, що на практиці виміри від GPS та РСС поступатимуть не синхронно; можливі періоди часу, коли вимірів від РСС взагалі не буде; джерела похибок для моделей двох об'єктів мають незалежний характер. В цих умовах для запобігання зайвих ускладнень пропонується схема послідовного оцінювання параметрів за допомогою двох незалежних ФК.

Спочатку оцінюються координати A_1 за допомогою GPS, а потім координати A_2 за псевдовимірами, що формуються з даних РСС та попередньо отриманих оцінок координат A_1 .

Метод розв'язання. Надамо динамічну модель, що описує рух об'єктів в інерціальній СК. Оскільки мова йдеться про орбітальний рух навколо Землі, маємо

$$\dot{\bar{R}}_{A_1}^{\{E\}} = \bar{V}_{A_1}^{\{E\}}, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{V}}_{A_1}^{\{E\}} = \bar{A}_{A_1}^{\{E\}}(\bar{R}_{A_1}^{\{E\}}), \quad (2)$$

де ліворуч стоять похідні векторів за часом; $\bar{V}_{A_1}^{\{E\}}$ – вектор абсолютної швидкості об'єкту A_1 в проекціях на вісі СК $\{E\}$; $\bar{A}_{A_1}^{\{E\}}(\bar{R}_{A_1}^{\{E\}})$ – вектор дійсного прискорення об'єкту A_1 . Він здебільшого обумовлюється дією сили гравітації з боку Землі, яка суттєво залежить від радіус-вектору, про що вказує вираз у дужках. До цього вектору входять також частки, зумовлені іншими, набагато меншими силами: аеродинамічною, світлового тиску, гравітації від Місяця, від дегазації об'єкту і т.і.

Для об'єкту A_2 система рівнянь відносно $\bar{R}_{A_2}^{\{E\}}$ та $\bar{V}_{A_2}^{\{E\}}$ така сама, тому окремо її не приводимо.

Траєкторії руху для обох об'єктів знаходяться інтегруванням рівнянь при початкових умовах, які притаманні кожному з об'єктів. В обох випадках маємо майже періодичні рішення для координат. Відмінність від суворо періодичних залежностей для сусідніх витків траєкторії порівняно невелика. Вона пояснюється "збурюючими прискореннями", що складають ту частку вектора дійсного прискорення, яка не входить до сферичної гравітаційної моделі.

Задача А1. Розглянемо метод визначення траєкторії руху для об'єкту A_1 з врахуванням інформації від GPS.

Надалі в формулах опускаємо верхню та нижню індексації, вважаючи, що до спеціальної вказівки ці індекси не змінюються.

Надамо для ФК динамічну стохастичну модель процесу (1), (2) у вигляді:

$$\dot{\bar{R}}(t) = \bar{V}(t), \quad (3)$$

$$\dot{\bar{V}}(t) = -\mu \frac{\bar{R}(t)}{R^3(t)} + \Delta\bar{A}(t), \quad (4)$$

$$\Delta\bar{A}(t) = \bar{\xi}(t), \quad (5)$$

де t – поточний час; $\bar{\xi}(t)$ – тривимірний векторний білий шум з нормальним розподілом відносно нульового середнього, інтенсивністю $Q = q \cdot E_{(3 \times 3)}$,

$E_{(3 \times 3)}$ – одинична матриця (3×3) , $q > 0$; $R = (\bar{R}, \bar{R})^{\frac{1}{2}}$ –

довжина радіус-вектору; $\mu = 3.9860044 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравітаційна стала Землі; доданок, який містить μ , є модельним гравітаційним прискоренням і відповідає сферичній моделі поля; $\Delta \bar{A}(t)$ – випадковий процес, який визначає частку дійсного прискорення поза сферичної гравітаційної моделі. Наведена модель містить розширення вектору стану, коли до $x(t) = \text{col}(\bar{R}(t), \bar{V}(t), \Delta \bar{A}(t))$ додано невідомі відхилення $\Delta \bar{A}(t)$ дійсного прискорення від певної моделі. При цьому для отримання адекватної оцінки цих змінних в модель штучно додається шум $\tilde{\xi}(t)$, який зветься стабілізаційним. У загальному випадку у якості модельного гравітаційного прискорення можна брати будь-яке наближення. Звісно, величина відхилення моделі від дійсності буде тим менша, чим більш розгалужений розклад у ряд використовується для моделі гравітаційного поля. Для викладання алгоритму фільтрації взагалі точність моделі не принципова, тому тут обрано найпростіший випадок.

Якщо час t змінювати дискретно із кроком τ , модель (3) – (5) набуває вигляду

$$x_k = x_{k-1} + \tau \cdot f(x_{k-1}, \xi_{k-1}) = F(x_{k-1}, \xi_{k-1}), \quad (6)$$

де $k=1,2,\dots$ – номер моменту часу; $f(x_{k-1}, \xi_{k-1})$ – дев'ятивимірна вектор-функція, компоненти якої відповідають правим частинам рівнянь (3) – (5), в які підставлені значення вектору стану та шуму, актуальні для моменту t_{k-1} . Додамо модель вимірів. Нехай z_s – шестивимірний вектор вимірів, які поступають від приймача сигналів GPS один раз на секунду в моменти часу t_s . Будемо вважати, що ці моменти співпадатимуть з деякими моментами дискретизації t_k .

Фізично вимірами є три компоненти радіус-вектору $\bar{R}(t_s)$ та три компоненти вектору швидкості $\bar{V}(t_s)$ в проєкціях на вісі СК {E} з випадковими перешкодами. В цих умовах модель, що зв'язує фактичні виміри із вектором стану, має вигляд

$$z_s = H \cdot x_s + v_s, \quad (7)$$

де $H = [E_{(6 \times 6)} \quad 0_{(6 \times 3)}]$ – блокова матриця (6x9), яка складається з одиничної матриці (6x6) та нульової матриці (6x3); v_s – випадковий шестивимірний вектор з незалежними змінними з нульовим середнім, нормальним розподілом та матрицею дисперсій

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \sigma_R^2 \cdot E_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & \sigma_V^2 \cdot E_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

σ_R, σ_V – середньоквадратичні відхилення похибок визначення координат та швидкості у приймачі сигналів GPS, які беруться з приймача або задаються апіорі.

Отримання невинуватих оцінок координат $\hat{R}(t_k)$, швидкості $\hat{V}(t_k)$ та поправок до модельного прискорення $\hat{\Delta A}(t_k)$ для нелінійного стохастичного процесу (6), (7) здійснюється за схемою розширеного фільтру Калмана, а саме за алгоритмом:

1. Для чергового моменту часу t_k робиться прогноз оцінок вектору стану ФК за формулою

$$\hat{x}_k^- = F(\hat{x}_{k-1}, \xi_{k-1} = 0), \quad (9)$$

в якій шум покладається нульовим, та прогноз коваріаційної матриці (9x9) їх похибок

$$P_k^- = \Phi_{k-1} \cdot P_{k-1} \cdot \Phi_{k-1}^T + W \cdot \tilde{Q} \cdot W^T, \quad (10)$$

де $\Phi_{k-1} = \frac{\partial F}{\partial x} \big|_{t=t_{k-1}} = \begin{bmatrix} E_{(3 \times 3)} & \tau \cdot E_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} \\ \Psi_{(3 \times 3)} & E_{(3 \times 3)} & \tau \cdot E_{(3 \times 3)} \\ 0_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 3)} & E_{(3 \times 3)} \end{bmatrix}$ – якобіан системи (9x9),

$$\Psi_{(3 \times 3)} = [\psi_{ij}]_{i,j=\overline{1,3}}, \quad \psi_{ii} = \left(\frac{3\mu}{\hat{R}^5} \cdot \hat{R}_i^2 - \frac{\mu}{\hat{R}^3} \right) \cdot \tau,$$

$$\psi_{ij} = \frac{3\mu}{\hat{R}^5} \hat{R}_i \cdot \hat{R}_j \cdot \tau, \quad i, j = \overline{1,3}, j \neq i;$$

$\hat{R}_i, i = \overline{1,3}$ – три перші компоненти вектору стану $\hat{x}_{k-1}$,

$$\hat{R} = \sqrt{\hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2 + \hat{R}_3^2};$$

Матриця $W^T = [0_{(3 \times 3)} \quad 0_{(3 \times 3)} \quad \tau \cdot E_{(3 \times 3)}];$

$\tilde{Q}$ – діагональна позитивно визначена матриця, пов'язана із дискретним аналогом стабілізаційного шуму. Ця матриця підлягає визначенню при налаштуванні розширеного фільтру Калмана. Початкові умови для оцінки вектору стану $\hat{x}_0$ задаються таким чином: перші шість компонентів беруться з миттєвих вимірів від GPS, для решти – нульові. Початкове значення коваріаційної матриці доцільно взяти у діагональному вигляді, вздовж головної діагоналі три елементи мають значення σ_R^2 , наступні три елементи σ_V^2 , останні три елементи визначаються, як $(\delta A_{\max}/3)^2$, де $\delta A_{\max}$ – евристично задана величина, напевно більша, ніж абсолютне значення кожної з компонент невідомого вектору $\Delta \bar{A}(t_0)$.

2. Якщо для моменту часу t_k виміри z_s відсутні, то покладаємо $\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$, $P_k = P_k^-$ та повертаємось до пункту 1.

3. При $t_k = t_s$ проводиться корекція прогнозованого вектору стану за формулами

$$K_{(9 \times 6)} = P_k^- \cdot H^T \cdot (H \cdot P_k^- \cdot H^T + \mathfrak{R})^{-1}, \quad (11)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K \cdot (z_s - H \cdot \hat{x}_k^-), \quad (12)$$

та обчислюється апостеріорна коваріаційна матриця похибок оцінок для наступного кроку

$$P_k = (E - K \cdot H) \cdot P_k^-. \quad (13)$$

Далі знов йти до пункту 1. Кінець роботи алгоритму співпадає із закінченням місії.

У наведених формулах матриця $\tilde{\mathfrak{R}}$ (6x6) – аналог матриці $\mathfrak{R}$ з (8) і підлягає визначенню при налаштуванні розширеного узагальненого фільтру Калмана. Рекомендації щодо визначення матриць $\tilde{Q}, \tilde{\mathfrak{R}}$ будуть надані при обговоренні результатів моделювання.

Результатом роботи описаного алгоритму є оцінки поточних значень координат, швидкості та поправок до модельного прискорення для об'єкту A_1 . Перевагою таких оцінок є те, що вони не мають накопичувальної похибки, яка характерна для процедури чисельного інтегрування рівнянь (1), (2) при автономному режимі роботи, тобто без інформації від GPS. При цьому відмінність оцінок від дійсних значень координат та швидкості буде менша, ніж мають не оброблені виміри від GPS. До того ж, алгоритм відкриває можливість оцінити поправку до модельного прискорення, зберегти її значення для кожної секунди на одному витку, щоб на наступному при необхідності використати в автономному режимі. Такий спосіб суттєво підвищує точність автономного визначення координат при орбітальному русі.

Задача A_2 . Задача полягає у визначенні поточних координат та швидкості об'єкту A_2 на основі відносних вимірів його положення з борту A_1 за допомогою РСС. Оскільки рішення базується на таких вимірах, воно відноситься до методів відносної навігації.

Розв'язок цієї задачі пропонується здійснити за алгоритмом розширеного ФК, подібно тому, як це робиться для об'єкту A_1 . Але на відміну від задачі A_1 , в якій використовуються виміри координат та швидкості від GPS, в даній задачі формуються псевдовиміри тільки координат об'єкту A_2 на основі оцінок координат A_1 та вимірів віддаленості об'єктів ρ_s та кутів лінії візування α_s, β_s . Формування псевдовимірів координат A_2 реалізується наступними операціями:

- обчислення відносного радіус-вектору в проекціях на вісі ПСК $\{A_1\}$

$$\Delta \bar{R}^{\{A_1\}}(t_s) = \text{col}(\rho_s \cos \beta_s \cos \alpha_s; \rho_s \sin \beta_s; -\rho_s \cos \beta_s \sin \alpha_s), \quad (14)$$

- обчислення цього ж вектору в проекціях на вісі інерціальної СК $\{E\}$

$$\Delta \bar{R}^{\{E\}}(t_s) = \text{vect}\{\Lambda_s \circ (0 + \Delta \bar{R}^{\{A_1\}}(t_s)) \circ \tilde{\Lambda}_s\}, \quad (15)$$

- обчислення радіус-вектору для об'єкту A_2 в проекціях на вісі СК $\{E\}$

$$\bar{R}_{A_2}^{\{E\}}(t_s) = \hat{R}_{A_1}^{\{E\}}(t_s) + \Delta \bar{R}^{\{E\}}(t_s). \quad (16)$$

Отриманий вектор далі використовується, як тривимірний вектор z_s .

У наведених формулах індекс s означає номер моменту часу, коли для об'єкту A_1 проводиться GPS-корекція. У формулах використовуються відповідно виміри від РСС; кватерніон орієнтації ПСК $\{A_1\}$ відносно СК $\{E\}$, що надходить від бортової системи визначення орієнтації; та оцінка координат об'єкту A_1 , отримана на етапі розв'язку задачі A_1 .

Для ефективного користування процедурою суттєво оцінити потенційну точність формування координат, що входять до вектору $\bar{R}_{A_2}^{\{E\}}$. Найпростіше для кожного моменту часу отримати мажорантну оцінку для похибки координат Δr , яка виглядає так:

$$|\Delta r(t_s)| \leq \Delta r_{\max}^{A_1} + \Delta r_{\max} + \rho(t_s) \cdot \Delta \chi_{\max},$$

де $\Delta r_{\max}^{A_1}$ – максимальна похибка визначення координат об'єкту A_1 . Після коригування від GPS така похибка зазвичай не перевищує 20 м; $\Delta r_{\max}$ – максимальна похибка визначення відстані між об'єктами A_1 та A_2 засобами радіотехнічної слідкуючої системи. Часто-густо максимальна похибка залежить від самої відстані і визначається характеристиками РСС; $\Delta \chi_{\max}$ – максимальна похибка визначення кутів лінії візування. Визначається характеристиками РСС, а її внесок пропорційний відстані між об'єктами. Так, при похибці визначення кутів LV в 1 кутову секунду та відстані між об'єктами 5000 км, ця складова мажорантної оцінки похибки для визначення Δr складатиме 24 м. Таким чином, загальна похибка обчислення псевдовимірів координат об'єкту A_2 через процедуру відносної навігації порівнянна із похибками GPS вимірів.

Інші відмінності алгоритму ФК для розв'язку задачі A_2 пов'язані зі зміною розмірності вектора вимірів z . Вона дорівнюватиме 3. У свою чергу матриця H приймає вигляд $H = \begin{bmatrix} E_{(3 \times 3)} & 0_{(3 \times 6)} \end{bmatrix}$. Також змінюється і матриця $\mathfrak{R} = [\sigma_R^2 \cdot E_{(3 \times 3)}]$, в якій σ_R пов'язується із наведеною вище мажорантною оцінкою.

Таким чином, основний метод розв'язку обох задач є два незалежних екземпляри розширеного ФК в дискретній формі, кожен зі своїм вектором стану. Для корекції вектору стану об'єкту A_1 використовуються GPS-виміри координат та швидкості, для корекції вектору стану об'єкту A_2 використовуються оцінки координат A_1 та відносні виміри від РСС. Додатково в процесі роботи алгоритмів постійно отримуються оцінки поправок до модельного прискорення, що дозволяє більш менш точно прогнозувати траєкторію руху об'єктів навіть при тимчасовій відсутності коригуючої інформації.

Загальна характеристика алгоритмів та аспекти їх практичної реалізації. Широко відомі інтегровані інерціально-супутникові навігаційні системи, в яких за допомогою фільтру проводиться комплексування інформації, що отримується від гіроскопів та акселерометрів, з даними від GPS. Такі системи використовуються для повітряних та земних транспортних засобів. За аналогією з ними описану апаратну модель, що розглядається, можна назвати *інтегрованою аналітико-супутниковою навігаційною системою*, в якій замість алгоритмів інерціальної навігації використовуються інтегрування аналітичних моделей орбітального руху центру мас об'єкту. Це стало можливим тому, що в умовах вільного орбітального польоту ці моделі ідеально точні; обертальний рух об'єкту навколо центру мас ніяк не впливає на рух самого центру мас; акселерометри при вільному орбітальному русі показуватимуть сувору нульову значення.

Сформулюємо алгоритм обчислення в аналітико-інтегрованій навігаційній системі:

- через певний інтервал часу із заданих початкових умов за формулою (9) проводиться оновлення розширеного вектору стану фільтра для об'єкту A_1 . Водночас за формулою (10) на кожному кроці обчислюється апіорна коваріаційна матриця. Так само виконуються обчислення і для об'єкту A_2 зі своїх початкових умов, для свого вектору стану та своєї коваріаційної матриці. На даному етапі вектори стану об'єктів A_1 та A_2 не впливають один на одного. Цей пункт алгоритму триватиме, доки не з'являться виміри від GPS для A_1 ;

- при наявності вимірів від GPS вектор стану об'єкту A_1 коригується за формулами (11), (12) та за формулою (13) оновлюється коваріаційна матриця з врахуванням проведеної корекції. Після вказаної корекції вектору стану для A_1 та враховуючі актуальні дані від системи орієнтації та РСС за формулами (14) – (16) обчислюються псевдовиміри для A_2 . Після чого за допомогою формул (11), (12) коригується вектор стану A_2 та за формулою (13) оновлюється його коваріаційна матриця похибок. Далі алгоритм повертається до попереднього пункту, якщо місія продовжується.

Надамо загальну характеристику використаного в алгоритмі фільтру Калмана. За загальноприйнятою класифікацією він відповідає схемі розширеного фільтру Калмана в дискретній формі зі зворотнім зв'язком за розширеним вектором стану. Останнє означає, що щоразу після корекції для подальшого використання приймається скориговане значення вектору стану. Зауважимо, що при відсутності даних для корекції ФК працюватиме у так званому автономному режимі, похибка визначення координат зростатиме подібно тому, як для обраного методу чисельного інтегрування, але при появі даних від GPS та від РСС висока точність функціонування алгоритмів повертається.

Якщо для коригованого режиму роботи обраний метод інтегрування (дискретизації) не важливий, то

для можливого автономного режиму це суттєво. Тому зробимо зауваження стосовно вибору оператора F , що стоїть праворуч у формулі (9). Він залежить від обраного методу чисельного інтегрування рівнянь (3)–(5). Встановлено, що для орбітальних об'єктів для збіжності до істинної траєкторії необхідно використовувати метод чисельного інтегрування Рунге-Кутта 4-го порядку, або точніший за нього. При цьому крок інтегрування може сягати секунди. До речі, крок інтегрування τ може бути не постійним.

Нарешті, зупинимось на особливостях практичної реалізації алгоритмів. Вхідними даними алгоритмів є актуальні виміри координат та швидкості об'єкту A_1 від GPS; поточний кватерніон орієнтації ПСК $\{A_1\}$ відносно СК $\{E\}$ від бортової системи орієнтації; поточні виміри віддаленості A_2 від A_1 та сферичні кути лінії візування відносно осей ПСК $\{A_1\}$, які отримуємо від РСС. Особливістю потоків даних є, по-перше, їх не синхронність; по-друге, різна частота оновлення; по-третє, можлива тимчасова відсутність інформації від GPS та РСС. Для коректного використання цих даних необхідно:

- шляхом інтерполяції приводити їх до єдиного моменту часу;
- при формуванні коригованого поточного вектору стану враховувати затримку, яка матиме місце при підготовці та обробці даних;
- не переривати процес визначення координат об'єкту A_1 , навіть при відсутності інформації від GPS;
- при знаходженні A_2 по той бік Землі, коли РСС, встановлена на A_1 , не дає вимірів відносно A_2 , продовжувати визначення його координат в автономному режимі з врахуванням поправок до прискорень, оцінки яких зроблено раніше. Таке прогнозування координат важливе для керованої зміни орієнтації A_1 , щоб забезпечити найкращі умови роботи РСС після відновлення контакту з A_2 на наступному витку;
- якщо точність прогнозування координат об'єкту A_2 виявиться не достатньою, при відновленні контакту з системою РСС можливо перевизначити вектор стану A_2 шляхом реініціалізації алгоритму фільтрації.

Перелічені особливості практичної реалізації є важливими з точки зору працездатності алгоритмів. Але вони можуть бути досить точно враховані в програмно-математичному забезпеченні. Тому на принципову оцінку можливості використання алгоритмів не впливатимуть.

Чисельне моделювання. Основною метою моделювання є демонстрація доцільності використання ФК в навігаційних алгоритмах для орбітальних об'єктів та в отриманні показників їх ефективності.

Умови моделювання. Нехай істинні траєкторії руху об'єктів A_1 та A_2 описуються рівняннями:

$$\dot{\vec{R}}^e(t) = \vec{V}^e(t), \quad (17)$$

$$\dot{\bar{V}}^e(t) = -\mu \frac{\bar{R}^e(t)}{(R^e(t))^3} + \frac{3}{2} C_{20} \frac{\mu a_E^2}{(R^e(t))^5} \bar{R}^e(t) \left(\bar{E} - \frac{5(R_3^e(t))^2}{(R^e(t))^2} \right), \quad (18)$$

де $C_{20} = -1082.63 \cdot 10^{-6}$ – коефіцієнт при другій зональній гармоніці розкладання геопотенціалу в ряд за сферичними функціями; $a_E = 6378000$ м – екваторіальний радіус Землі; $\bar{E} = \text{col}(1, 1, 3)$ – постійний вектор; R_3^e – третя компонента вектору $\bar{R}^e$. Індекс e зверху означає приналежність до істинної траєкторії. Істинні траєкторії для об'єктів А1, А2 відрізняються початковими умовами змінних. Далі рішення рівнянь (17), (18) використовуються, як еталонні.

Для отримання рішення задачі вважатимемо, що процес руху описується стохастичною моделлю (3)–(5), яка є менш точною, ніж (17)–(18).

Підкреслимо, що на практиці в моделі (3)–(5), що використовується в алгоритмах, може враховуватись більша кількість членів розкладання в ряд геопотенціалу, ніж у статті. Але істинна модель руху все одно буде точніша, хоча б на складові, що відповідають аномаліям гравітаційного поля Землі. Оскільки у даному разі важливо продемонструвати принципову доцільність використання ФК, ступінь деталізації врахування гравітаційного поля Землі не суттєва.

Інтегрування рівнянь еталонної моделі та рівнянь фільтру Калмана здійснюється методом Рунге-Кутта 4-го порядку з кроком 1 с.

Один раз на секунду моделюються виміри GPS, які відповідають еталонним координатам та швидкості А1 з доданими випадковими перешкодами, нормально розподіленими з діапазонів 100 м для координат та 1 м/с для швидкості об'єкту. Так само 1 раз на секунду моделюються виміри ρ_s – віддаленості між об'єктами А1 та А2, які відрізняються від істинних значень нормально розподіленою перешкодою з діапазону $[-\delta\rho_{\max}; \delta\rho_{\max}]$, $\delta\rho_{\max} = 10$ м, та кути лінії візування α_s, β_s , які містять нормально розподілену перешкоду з діапазону $[-\delta\chi_{\max}; \delta\chi_{\max}]$, $\delta\chi_{\max} = 5''$.

Для наочності, наведемо *стислий опис навігаційних алгоритмів*, що розв'язують задачі А1 та А2. Оскільки структура алгоритмів досить проста та має тільки одну точку розгалуження, опишемо їх текстово:

1. Для поточного моменту часу за допомогою формул (9), (10) зробити прогноз вектору стану об'єкту та коваріаційної матриці його похибки.

2. Якщо для моменту часу, що розглядається, зовнішні виміри відсутні, прийняти прогнозні значення, як остаточні: $\hat{x}_k = \hat{x}_k^-$, $P_k = P_k^-$, і повернутись на наступному такті до попереднього пункту. Інакше, при наявності вимірів, сформувані вектор вимірів z_s та матрицю H та послідовно провести корекцію поточного вектору стану та

коваріаційної матриці за допомогою формул (11), (12), (13).

3. Якщо місія не закінчена, повернутись до п.1.

Відмінність реалізації алгоритму для задач А1 та А2 полягає у різних засобах формування вектору вимірів z_s та матриці H , які відображені у теоретичному розділі.

Надамо *об'єктивну картину динамічних процесів*, які беруть участь у моделюванні. На рис. 3 для об'єкту А1 показані еталонні координати радіус-вектору $\bar{R}^e(t)$ (R_x, R_y, R_z) протягом 3 витків (тривалість витку близько 5580 с). Об'єкт А2 рухається по іншій еліптичній орбіті. На початку місії відстань між об'єктами була найменша і складала близько 27 км. Потім вона змінювалась згідно з найширшою лінією на рис.3.

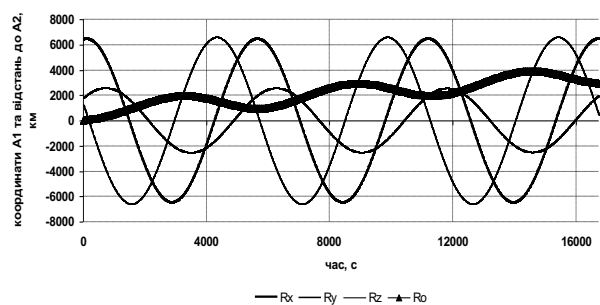


Рис. 3 – Еталонні значення координат об'єкту А1 та відстань між об'єктами А1 та А2

Графіки дають уявлення про діапазон, в якому перебувають змінні координати, та про їх періодичність. На рис. 4 зображено похибки при автономному (без корекції) інтегруванні рівнянь (3)–(5) з нульовими поправками прискорень. Графіки відображують суттєвість спрощення моделі (3)–(5) відносно еталонної.

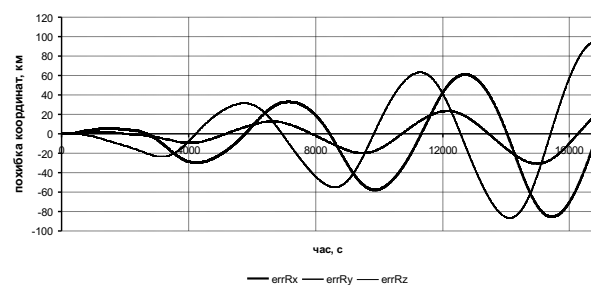


Рис. 4 – Похибка визначення координат об'єкту А1 в автономному режимі

Додаткові прискорення, якими еталонна модель відрізняється від моделі (3)–(5), наведені на рис. 5. Крім орбітальної періодичності спостерігаємо компоненти з періодом втричі меншим.

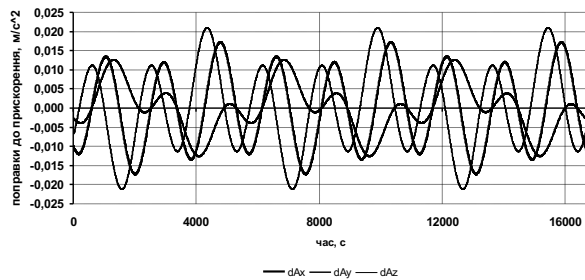


Рис. 5 – Відмінність істинного прискорення від модельного

Оцінка ефективності методів комплексування для об'єкту A_1 . Розглянемо три методи: без фільтрації, тобто безпосередня підстановка у вектор стану вимірів від GPS; використання ФК з вектором стану розмірності 6, що складається з координат та швидкості; використання ФК з розширеним вектором стану з доданими оцінками поправок прискорення. Для кожного з методів на рис.6–8 наведені графіки похибок визначення координат та швидкості об'єкту A_1 .

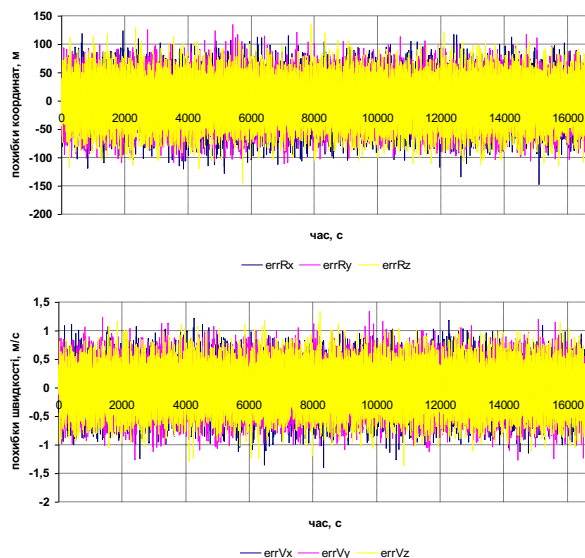


Рис. 6 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) в алгоритмі без фільтрації

Коли мова йде про похибки вимірювань або визначення параметру, зазвичай наводяться абсолютні та відносні показники. При використанні фільтру Калмана рівень похибки в оцінюванні вектору стану визначається рівнем шумів в динамічній та вимірювальній системах і не залежить від абсолютного значення вектору стану, що оцінюється. В цих умовах відносна похибка не є показовою, тому надалі використовуватимемо тільки абсолютні показники.

Для першого методу (рис.6) середнє значення похибок координат близько 1 м, середнє квадратичне відхилення (СКВ) 33 м; для похибок швидкості середнє значення менше за 0.002 м/с, СКВ 0,33 м/с. Максимальні за модулем похибки на всій реалізації становлять 130 м та 1,4 м/с відповідно.

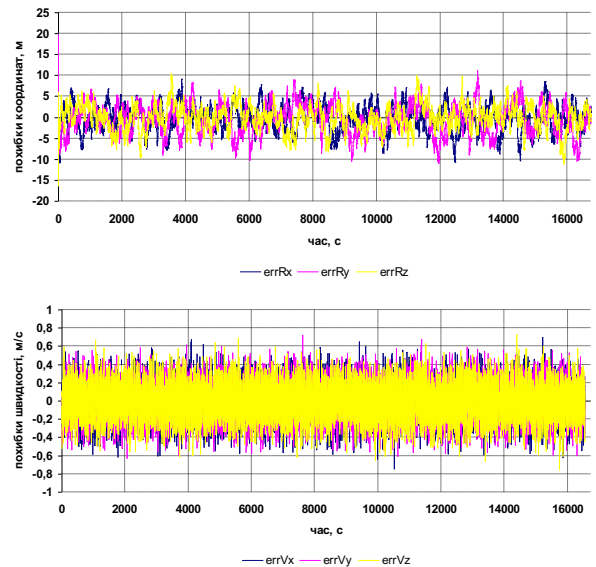


Рис. 7 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) в алгоритмі з ФК розмірності 6

Маємо максимальні за модулем похибки координат 13 м та похибки швидкості 0,74 м/с.

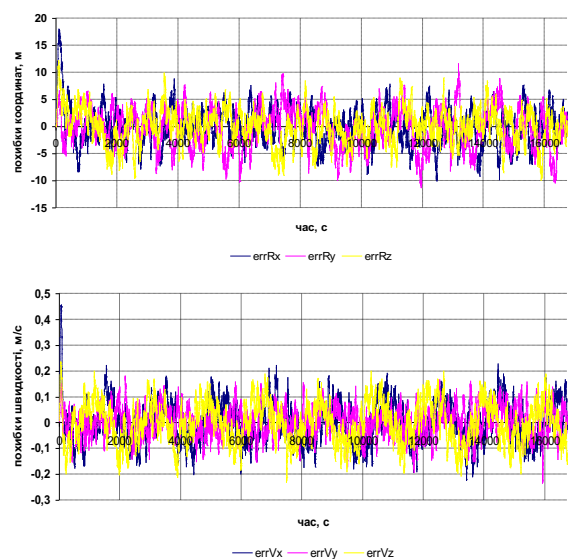


Рис. 8 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) в алгоритмі ФК із розширеним вектором стану

Максимальні за модулем похибки координат, крім початкової ділянки, де відпрацьовуються початкові похибки, складають 11 м та похибки швидкості 0,22 м/с. При цьому різниця між оцінкою поправок до прискорення та їх істинними значеннями (рис.9) не перевищують 0.005 м/с². У порівнянні з рис.5 видно, що рівень некомпенсованого прискорення у ФК з розширеним вектором стану зменшився в 4 рази.

На рис.8,9 крім височастотного шуму привертають увагу коливання низької частоти та майже однакової амплітуди. Ці коливання викликані затримкою, яку вносить фільтр у формування оцінок. Тобто оцінка має майже такий же вигляд, як істинні поправки з рис.5, але зсунуті праворуч на 55 с.

Різниця між ними породжує відповідні коливання. Якщо штучно синхронізувати оцінку поправок з їх істинним значенням, різниця втратить коливальний характер і матиме тільки шумовий вигляд з максимальним відхиленням $0,002 \text{ м/с}^2$ та СКВ 0.0008 м/с^2 . Але в реальному масштабі часу це зробити неможливо.

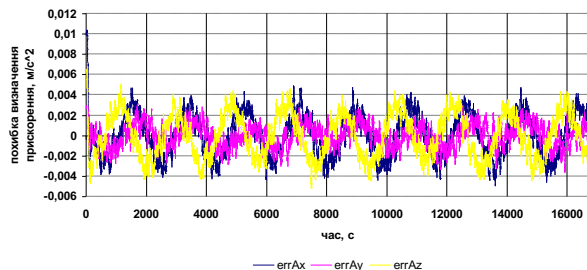


Рис. 9 – Похибка оцінки істинного прискорення за допомогою ФК з розширеним вектором стану

Оцінка ефективності методів комплексування для об'єкту A_2 . Тут розглядається тільки алгоритм 9-ти вимірний ФК, оскільки з попередніх результатів він показав найкращі результати. Його принципова відмінність від попереднього ФК полягає у тому, що вектор вимірів не містить швидкості та стосується тільки координат об'єкту A_2 . В цих умовах задачею моделювання є: по-перше, демонстрація принципової можливості отримати за допомогою ФК оцінку швидкості та прискорення через ідеальні виміри координат A_2 ; по-друге, прослідити, як впливають перешкоди на ефективність ФК; по-третє, отримати остаточні оцінки ефективності з врахуванням проведеного налаштування ФК. Перший результат (рис.10) отримано для ідеальних значень координат A_2 без будь-яких перешкод, але дисперсії можливих перешкод враховувались у фільтрі згідно з теоретично оптимальним налаштуванням. На рисунку зображені похибки визначення координат об'єкту A_2 та похибки визначення швидкості. Вони майже нульові, що свідчить про їх гарну спостережність.

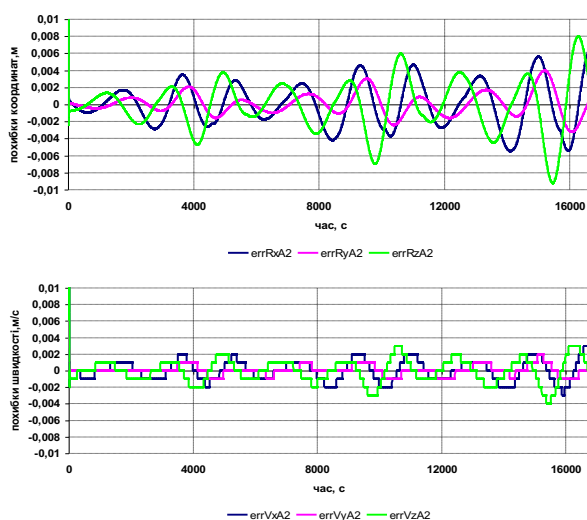


Рис. 10 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) A_2 в алгоритмі ФК з ідеальними вимірами

Прискорення також оцінюється досить добре, з похибкою, не більше $0,001 \text{ м/с}^2$. Таким чином, ФК ефективно виконує функцію спостережачого пристрою і забезпечує адекватне оцінювання швидкості та прискорення, виходячи тільки з координат.

Наступне моделювання (рис.11) проведено з підключенням всіх перешкод, які мають місце при формуванні псевдовимірів, для теоретично оптимального налаштування ФК

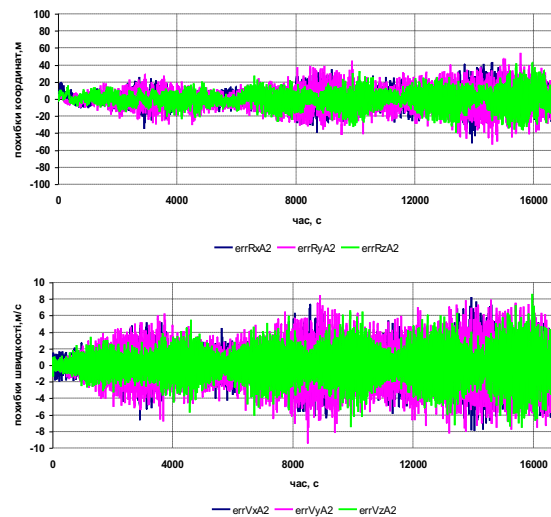


Рис. 11 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) A_2 в алгоритмі ФК зі всіма перешкодами у вимірах

При цьому максимальна похибка визначення прискорень сягає $0,8 \text{ м/с}^2$. Таким чином, результати, які демонструє ФК з теоретично оптимальним налаштуванням, незадовільні.

Третій експеримент пов'язаний із застосуванням спеціально налаштованого ФК в умовах всіх перешкод (рис.12).

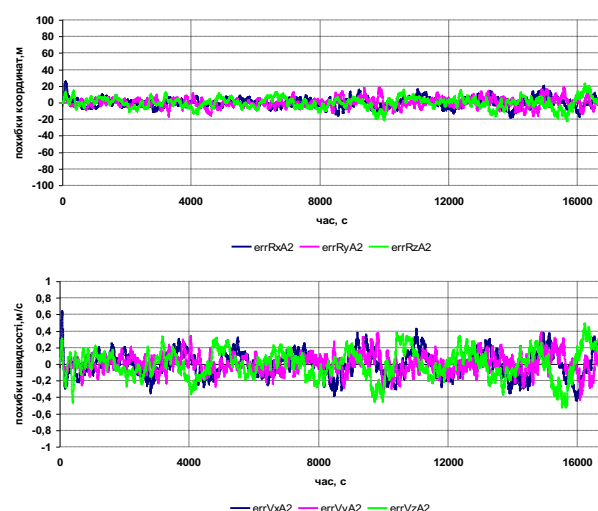


Рис. 12 – Похибки координат (зверху) та швидкості (знизу) A_2 в налаштованому алгоритмі ФК зі всіма перешкодами у вимірах

У цілому ефективність отримання оцінок координат та швидкості є достатньо високою. Для повноти наведемо графіки еталонних значень поправок до модельного прискорення разом з їх оцінками, отриманими за допомогою налаштованого ФК (рис. 13). На рисунку наведена також різниця між оцінкою та еталоном. З рисунку видно, що оцінка подібна еталону, але має певне запізнення, у даному разі від 70 до 90 секунд. Крім того, оцінка має ще шумову складову, яка не була відфільтрована алгоритмом.

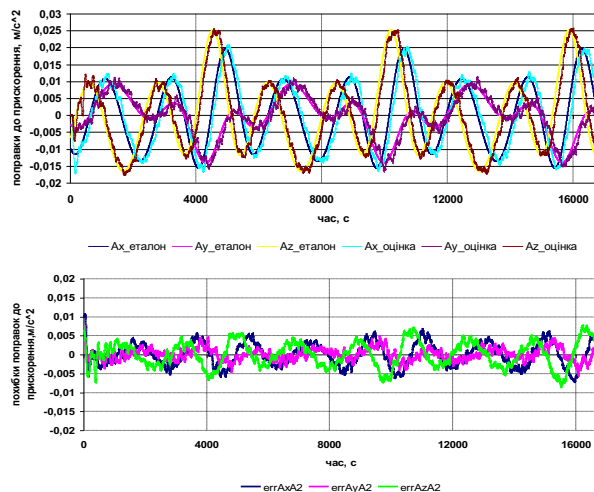


Рис. 13 – Еталонні та оціночні значення поправок до модельного прискорення (зверху), різниця між ними (знизу)

Таке запізнення пояснює низькочастотну складову похибки оцінки, яка є різницею двох кривих. Взагалі, за допомогою врахування оцінки можна в 4 рази зменшити похибку моделі гравітаційного прискорення. Аналогічні результати для всіх варіантів розв'язку отримано і для інших початкових умов руху об'єктів.

Обговорення результатів моделювання. Для нелінійних задач оцінювання майже єдиний метод дослідження та вдосконалення – це чисельне моделювання в конкретних умовах функціонування.

У статті розглянуто низку актуальних питань застосування фільтру Калмана в задачі спостереження за орбітальним об'єктом з борту іншого апарату. Відповіді на них було отримано шляхом моделювання множини задач руху з різними початковими умовами. Задачі відрізняються динамікою взаємної віддаленості між об'єктами. Це є найсуттєвішим у даному разі. Всі сформульовані нижче властивості задачі фільтрації отримано шляхом аналізу усіх результатів комп'ютерного моделювання.

1. З рисунків 6–8 видно, що у разі наявності GPS використання ФК дає суттєве покращення точності оцінювання координат та швидкості до 10 разів у порівнянні із безпосередньою підстановкою вимірів GPS у вектор стану. Це підтверджує доцільність використання ФК в навігаційній системі.

2. При використанні фізичної, тобто не розширеної, моделі для вектору стану ФК (випадок 6-

ти вимірного вектору стану) ми матимемо певне покращення точності визначення координат та швидкості, але оскільки визначення поправок до модельного прискорення відсутнє, не можна більш менш точно спрогнозувати подальший рух об'єктів. Проте примітно, що при теоретичному налаштуванні матриць дисперсій шумів ФК у цьому разі зберігає узгодженість між фактичними похибками оцінювання з оцінками їх СКВ з коваріаційного каналу фільтру (формули (10)–(12)). Це робить можливим використання таких оцінок СКВ для визначення фактичної ефективності фільтрації у масштабі реального часу під час експлуатації.

3. Для подальшого покращення точності оцінок у 2–3 рази доцільно використовувати ФК з розширеним вектору стану, у даному разі із залучанням до вектору стану невідомих поправок до модельного прискорення. У цьому разі для збіжності фільтрації необхідно віртуально додати стабілізаційний шум в рівняння для поправок, що відшукуються, та певним чином встановити для нього дисперсію, яка увійде у матрицю $\tilde{Q}$. Вибір такої дисперсії повністю евристичний. Але можна констатувати, що якщо цю матрицю обнулити або зробити занадто малою, процес фільтрації стане неефективним. Збільшення величини дисперсії відносно певного рівня суттєво не впливає на якість оцінювання. Отримані оцінки поправок до прискорення можуть бути збережені у пам'яті бортової системи та надалі використані в алгоритмі інтегрування на наступному витку. Це підвищить точність автономного режиму і особливо є важливим для супроводження об'єкту A_2 , коли з ним тимчасово втрачається контакт. Необхідно додати, що для ФК з розширеним вектором стану узгодженість між фактичними похибками оцінок та їх СКВ, розрахованими у коваріаційному каналі ФК, зникає. Тому використовувати розрахункові СКВ для якихось критеріальних або діагностичних цілей для такого ФК не можна.

4. Для ефективної роботи ФК з розширеним вектором стану необхідно провести його налаштування, тобто задати певним чином матриці $\tilde{Q}$ та особливо $\tilde{R}$ (див. формулу (11)). Як свідчить моделювання, від цих матриць залежить не тільки точність оцінок вектору стану (див. рис. 11, 12), а й фазовий зсув (або часова затримка) при фільтрації динамічних змінних; ступінь згладжування оцінок; навіть стійкість процесу фільтрації. У ході аналізу для розглянутої множини задач орбітального руху отримані наступні правила налаштування розширеного узагальненого фільтру Калмана:

$$\tilde{Q} = 1000 \cdot q \cdot E_{(3 \times 3)}, \text{ де } q = (\delta A_{\max} / 3)^2, \delta A_{\max} -$$

апріорна очікувана величина максимальної за модулем поправки до модельного прискорення. Ця матриця однакова для обох задач;

$$\text{для задачі } A_1: \tilde{\mathbf{R}} = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} \sigma_R^2 \cdot E_{(3 \times 3)} & \mathbf{0}_{(3 \times 3)} \\ \mathbf{0}_{(3 \times 3)} & \sigma_V^2 \cdot E_{(3 \times 3)} \end{bmatrix},$$

$\sigma_R = \delta R_{\max} / 3$, $\sigma_V = \delta V_{\max} / 3$; $\delta R_{\max}$, $\delta V_{\max}$ – апріорні очікувані величини максимальних за модулем похибок визначення координат та компонентів вектора швидкості від GPS;

$$\text{для задачі } A_2: \tilde{\mathbf{R}} = 10^6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33}^2 \end{bmatrix}, \text{ де}$$

$$r_{11} = \delta \rho_{\max} |\cos \beta_s \cdot \cos \alpha_s| + \Delta r_{\max}^A + \delta \chi_{\max} \cdot \rho_s (|\sin \beta_s \cdot \cos \alpha_s| + |\cos \beta_s \cdot \sin \alpha_s|),$$

$$r_{22} = \delta \rho_{\max} |\sin \beta_s| + \Delta r_{\max}^A + \delta \chi_{\max} \cdot \rho_s \cdot |\cos \beta_s|,$$

$$r_{33} = \delta \rho_{\max} |\cos \beta_s \cdot \sin \alpha_s| + \Delta r_{\max}^A + \delta \chi_{\max} \cdot \rho_s (|\sin \beta_s \cdot \sin \alpha_s| + |\cos \beta_s \cdot \cos \alpha_s|),$$

$\delta \rho_{\max}$, $\delta \chi_{\max}$ – максимальні за модулем можливі перешкоди у вимірах віддаленості та кутів лінії візування в РСС; $\Delta r_{\max}^A$ – максимальна похибка оцінки координат об'єкту A_1 , встановлюється за результатами попереднього моделювання; $\rho_s, \alpha_s, \beta_s$ – поточні виміри від РСС. Для задачі A_2 похибка обчислення псевдовимірів збільшується разом із зростанням ρ_s внаслідок впливу кутових перешкод. Цей факт враховується у вищевведених виразах. Додамо, що збільшення матриці $\tilde{\mathbf{R}}$ призводить до згладжування оцінок координат, швидкості та поправок до прискорення, але і збільшує час затримки. Таким чином у похибках оцінок зменшується флуктуаційна складова, але збільшується амплітуда низькочастотних коливань. Зменшення матриці $\tilde{\mathbf{R}}$ природно призводить до зворотного ефекту. Наведені вирази є раціональним компромісом між цими двома факторами.

Висновки. Розглянуто задачу визначення координат та швидкості орбітальних об'єктів за інформацією від GPS для одного об'єкту та відносних вимірів віддаленості та кутів напрямку лінії візування для другого. Аналіз методів розв'язку проведено шляхом чисельного моделювання. На його підставі зроблено висновок про доцільність використання в обох випадках незалежних екземплярів розширеного 9-ти вимірної фільтру Калмана. Описано алгоритми підготовки даних та самої фільтрації. Такі алгоритми призначені для використання у складі бортового забезпечення першого об'єкту. Наголошено про важливість налаштування фільтру Калмана та запропоновано конкретний варіант такого налаштування. Моделюванням множини задач перевірена ефективність розроблених алгоритмів. Показано, що точність визначення координат для

першого об'єкту підвищується майже в 10 разів відносно точності вимірів GPS, для другого – в 3–4 рази відносно потенційної точності GPS. Зафіксовано також зменшення у рази величини не компенсованого прискорення, яке впливає на точність автономного режиму навігації. Подальший розвиток вбачається у використанні нейронної апроксимаційної моделі, побудованій на множині калмановських оцінок поправок до прискорення з метою їх прогнозування в залежності від поточних координат об'єкту.

Список літератури

1. Alpatov, A. P., Assessment of perspectives for the orbital utilization of space debris / A. P. Alpatov, Yu. M. Goldshtein // Space Science and Technology, 2021, 27, №3 (130), pp. 3–12. <https://doi.org/10.15407/knit2021.03.003>
2. Svitina, V. V., Space debris removal - Review of technologies and techniques. Flexible or virtual connection between space debris and service spacecraft / V. V. Svitina, M. V. Cherkasova // Acta Astronautica, 2023, vol. 204, pp. 840–853. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.09.027>
3. Bhandari, J. M., Real-Time Satellite Tracking and Switching Algorithm / J. M. A. M. Bhandari, C. Tejeswar, H. A and L. Dash // 2024 5th International Conference for Emerging Technology (INCET), Belgaum, India, 2024, pp. 1-4, <https://doi.org/10.1109/INCET61516.2024.10593526>
4. Zhang, Z., A Survey of Precision Formation Relative State Measurement Technology for Distributed Spacecraft / Z. Zhang, L. Deng, J. Feng, et al // Aerospace 2022, 9, (7), 362. <https://doi.org/10.3390/aerospace9070362>
5. Jain, R., Inter-satellite tracking methods and applications: A comprehensive survey / R. Jain, S. Speretta, D. Dirckx, E. K. A. Gill // Advances in Space Research, 2024, 74, (8), pp. 3877–3901. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.08.022>
6. Turan, E., Autonomous navigation performance of cislunar orbits considering high crosslink measurement errors / E. Turan, S. Speretta, E. Gill // 2022 IEEE Aerospace Conference (AERO), 2022. <https://doi.org/10.1109/aero53065.2022.9843772>
7. Shi, Y., Real-Time Precise Orbit Determination of Low Earth Orbit Satellites Based on GPS and BDS-3 PPP B2b Service / Y. Shi, T. Xu, M. Li, K. Wei, S. Wang, D. Wang // Remote Sens. 2024, 16, 833. <https://doi.org/10.3390/rs16050833>
8. Uspenskiy, V., Relative navigation of UaAV in a swarm / V. B. Uspenskiy, N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2023, pp. 1-5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312895>
9. Zhang, M., Comparison of Kalman Filters for Inertial Integrated Navigation / M. Zhang, K. Li, B. Hu, C. Meng // Sensors, 2019, 19, 1426. <https://doi.org/10.3390/s19061426>
10. Tang, Pham Van, 15-State Extended Kalman Filter Design for INS/GPS Navigation System / Pham. Van Tang, Van Thang Nguyen, D. T. Chu and Duc-Tan Tran // Journal of Automation and Control Engineering, 2015, 3 (2), pp. 109–114. <https://doi.org/10.12720/iaace.3.2.109-114>
11. Wickert, Mark A., Exploring the Extended Kalman Filter for GPS Positioning Using Simulated User and Satellite Track Data / Mark A. Wickert, C. Siddappa // SciPy, 2018. <https://doi.org/10.25080/Majora-4af1f417-00d>
12. Kallapur, A. G., Ali, S. S., Anavatti, S. G. (2007). Application of Extended Kalman Filter Towards UAV Identification. In: Mukhopadhyay, S. C., Gupta, G. S. (eds) Autonomous Robots and Agents. Studies in Computational Intelligence, vol 76. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73424-6_23
13. Wang, Y.; Sun, S.; Li, L. Adaptively robust unscented Kalman filter for tracking a maneuvering vehicle / Y. Wang, S. Sun, L. Li // J. Guid. Control Dyn., 2014, 37, pp. 1697–1701. <https://doi.org/10.2514/1.G000257>
14. Feng, K., An Improved Strong Tracking Cubature Kalman Filter for GPS/INS Integrated Navigation Systems / K. Feng, J. Li, X. Zhang, X. Zhang, C. Shen, H. Cao // Sensors, 2018, 18, 1919. <https://doi.org/10.3390/s18061919>

15. Zhou, J., INS/GPS Tightly-coupled Integration using Adaptive Unscented Particle Filter / J. Zhou, S. Knedlik, O. Loffeld // J. Navig., 2010, 63, pp. 491–511. <https://doi.org/10.1017/S0373463310000068>
 16. Jiao, Z., Kalman/Particle Filter for Integrated Navigation System / Z. Jiao, R. Zhang // Adv. Mater. Res., 2013, 756, pp. 2142–2146. <https://doi.org/10.2991/iccia.2012.236>
- References (transliterated)**
1. Alpatov A. P., Assessment of perspectives for the orbital utilization of space debris / A. P. Alpatov, Yu. M. Goldshtein // Space Science and Technology, 2021, 27, №3 (130), pp. 3–12. <https://doi.org/10.15407/knit2021.03.003>
 2. Svitina, V. V., Space debris removal - Review of technologies and techniques. Flexible or virtual connection between space debris and service spacecraft / V. V. Svitina, M. V. Cherkasova // Acta Astronautica, 2023, vol. 204, pp. 840–853. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2022.09.027>
 3. Bhandari, J., M., Real-Time Satellite Tracking and Switching Algorithm / J. M. A. M. Bhandari, C. Tejeswar, H. A. and L. Dash // 2024 5th International Conference for Emerging Technology (INCET), Belgaum, India, 2024, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/INCET61516.2024.10593526>
 4. Zhang, Z., A Survey of Precision Formation Relative State Measurement Technology for Distributed Spacecraft / Z. Zhang, L. Deng, J. Feng, et al // Aerospace 2022, 9, (7), 362. <https://doi.org/10.3390/aerospace9070362>
 5. Jain, R., Inter-satellite tracking methods and applications: A comprehensive survey / R. Jain, S. Speretta, D. Dirkx, E. K. A. Gill // Advances in Space Research, 2024, 74, (8), pp. 3877–3901. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2024.08.022>
 6. Turan, E., Autonomous navigation performance of cislunar orbits considering high crosslink measurement errors / E. Turan, S. Speretta, E. Gill // 2022 IEEE Aerospace Conference (AERO), 2022. <https://doi.org/10.1109/aero53065.2022.9843772>
 7. Shi, Y., Real-Time Precise Orbit Determination of Low Earth Orbit Satellites Based on GPS and BDS-3 PPP B2b Service / Y. Shi, T. Xu, M. Li, K. Wei, S. Wang, D. Wang // Remote Sens. 2024, 16, 833. <https://doi.org/10.3390/rs16050833>
 8. Uspenskiy, V., Relative navigation of UaAV in a swarm / V. B. Uspenskiy, N. V. Shyriaieva // 2023 IEEE 4th KhPI Week on Advanced Technology (KhPIWeek), Kharkiv, Ukraine, 2023, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/KhPIWeek61412.2023.10312895>
 9. Zhang, M., Comparison of Kalman Filters for Inertial Integrated Navigation / M. Zhang, K. Li, B. Hu, C. Meng // Sensors, 2019, 19, 1426. <https://doi.org/10.3390/s19061426>
 10. Tang, Pham Van, 15-State Extended Kalman Filter Design for INS/GPS Navigation System / Pham. Van Tang, Van Thang Nguyen, D. T. Chu and Duc-Tan Tran // Journal of Automation and Control Engineering, 2015, 3 (2), pp.109–114. <https://doi.org/10.12720/joace.3.2.109-114>
 11. Wickert, Mark A., Exploring the Extended Kalman Filter for GPS Positioning Using Simulated User and Satellite Track Data / Mark A. Wickert, C. Siddappa // SciPy, 2018. <https://doi.org/10.25080/Majora-4af1f417-00d>
 12. Kallapur, A. G., Ali, S. S., Anavatti, S. G. (2007). Application of Extended Kalman Filter Towards UAV Identification. In: Mukhopadhyay, S. C., Gupta, G. S. (eds) Autonomous Robots and Agents. Studies in Computational Intelligence, vol 76. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-73424-6_23
 13. Wang, Y.; Sun, S.; Li, L. Adaptively robust unscented Kalman filter for tracking a maneuvering vehicle / Y. Wang, S. Sun, L. Li // J. Guid. Control Dyn., 2014, 37, pp. 1697–1701. <https://doi.org/10.2514/1.G000257>
 14. Feng, K., An Improved Strong Tracking Cubature Kalman Filter for GPS/INS Integrated Navigation Systems / K. Feng, J. Li, X. Zhang, X. Zhang, C. Shen, H. Cao // Sensors, 2018, 18, 1919. <https://doi.org/10.3390/s18061919>
 15. Zhou, J., INS/GPS Tightly-coupled Integration using Adaptive Unscented Particle Filter / J. Zhou, S. Knedlik, O. Loffeld // J. Navig., 2010, 63, pp. 491–511. <https://doi.org/10.1017/S0373463310000068>
 16. Jiao, Z., Kalman/Particle Filter for Integrated Navigation System / Z. Jiao, R. Zhang // Adv. Mater. Res., 2013, 756, pp. 2142–2146. <https://doi.org/10.2991/iccia.2012.236>

Надійшла (received) 02.03.2025

Прийнята до друку (accepted) 03.09.2025

Опублікована (published) 03.09.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Успенський Валерій Борисович (Uspenskiy Valerii) – доктор технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; тел.: (057)-707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5960-7347>; e-mail: Valerii.Uspenskiy@khpi.edu.ua