

Ю. А. ПЛАКСІЙ

ФОРМАЛЬНА ПАРАМЕТРИЧНА КІНЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОНІЧНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА І ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ

Стаття присвячена проблемі опрацювання алгоритмів орієнтації і підвищення точності визначення орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації рухомих об'єктів за рахунок застосування нових аналітичних моделей кутового руху і удосконалення існуючих алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації. Розглядається задача чисельно-аналітичної оптимізації двох алгоритмів визначення кватерніона орієнтації за рахунок уточнення коефіцієнтів в структурі алгоритмів, які використовують в якості «проміжного параметра» вектор орієнтації. Уточнення коефіцієнтів в алгоритмах відбувається на основі комп'ютерного моделювання і програмно-чисельної мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу із застосуванням в якості модельного тестового руху аналітичної еталонної моделі кутового руху твердого тіла, в основі якої лежить формальна параметрична кінематична модель конічного типу. Для цього модель тестового руху доповнюється моделюванням ідеальної інформації з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат з використанням аналітичних формул для вектора позірного повороту. Експериментально отримано, що похибка накопиченого обчислювального дрейфу на параметричній еталонній моделі конічного типу має лінійний закон зростання з часом для всіх неоптимізованих алгоритмів, що розглядаються. В результаті чисельного експерименту отримані нові значення коефіцієнтів в структурах алгоритмів, що мінімізують похибку накопиченого дрейфу і покращують характеристики тренду цієї похибки без погіршення похибки норми. Проведена оптимізація для одного з алгоритмів призводить до зменшення максимального модуля похибки накопиченого дрейфу і змінення лінійно-зростаючого характеру залежності величини похибки обчислювального дрейфу від часу на коливальний характер без тенденції зростання з часом. Наводяться результати проведеного обчислювального експерименту.

Ключові слова: кватерніон орієнтації, кінематична модель, конічний рух, квазікоординати, алгоритм орієнтації, чисельно-аналітичне моделювання, обчислювальний дрейф, похибка норми кватерніона, фактичний порядок точності алгоритму.

Yu. PLAKSIY

FORMAL PARAMETRIC KINEMATIC MODEL OF CONICAL MOTION OF A RIGID BODY AND OPTIMIZATION OF ORIENTATION ALGORITHMS

The paper is devoted to the problem of developing orientation algorithms and increasing the accuracy of orientation determination in strapdown inertial systems of orientation of moving objects by using new analytical models of angular motion and improving existing algorithms for determining orientation quaternions. The problem of numerical-analytical optimization of two algorithms for determining the orientation quaternion is considered by refining the coefficients in the structure of the algorithms, which use the rotation vector as an "intermediate parameter". The refinement of the coefficients in the algorithms is based on computer modeling and software-numerical minimization of the error of the accumulated computational drift using as a model test motion an analytical reference model of the angular motion of a rigid body, which is based on a formal parametric kinematic model of the coning type. For this, the test motion model is supplemented by modeling ideal information from the outputs of angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates using analytical formulas for the seeming turn vector. It was experimentally obtained that the error of the accumulated computational drift on the parametric reference model of the coning type has a linear law of growth with time for all non-optimized algorithms considered. As a result of the numerical experiment, new values of coefficients in the structures of algorithms were obtained that minimize the error of the accumulated drift and improve the characteristics of the trend of this error without worsening the error of the quaternion norm. The optimization carried out for one of the algorithms leads to a decrease in the maximum module of the error of the accumulated drift and a change in the linearly increasing nature of the dependence of the error of the computational drift on time to an oscillatory nature without a tendency to grow with time. The results of the conducted computational experiment are presented.

Keywords: orientation quaternion, kinematic model, coning motion, quasi-coordinates, orientation algorithm, numerical-analytical modeling, computational drift, quaternion norm error, actual order of algorithm accuracy.

Мета та постановка задачі. Розглядається задача опрацювання алгоритмів визначення орієнтації (алгоритмів орієнтації), яка виникає на етапі проектування безплатформеної інерціальної системи орієнтації (БІСО). При розв'язанні цієї задачі окреме місце займає моделювання кутового руху космічного апарату як твердого тіла і точносний аналіз алгоритмів орієнтації на *еталонних моделях* кутового руху твердого тіла. Для еталонних моделей параметри орієнтації і відповідний вектор кутової швидкості представляються в аналітичному вигляді. Це дозволяє на основі аналітичного інтегрування кутової швидкості отримати за необхідності також кутові квазікоординати на виході гіроскопічних датчиків у вигляді

$$\vec{\theta}_n^{*(k)} = \int_{t_{n-1} + ((k-1)/N)h}^{t_{n-1} + (k/N)h} \vec{\omega}(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

де $h = t_n - t_{n-1}$ - величина кроку обчислень, N - число точок знімання первісної інформації з датчиків на такті роботи автономного обчислювача.

Найбільший практичний інтерес при цьому представляють аналітичні моделі кутового руху твердого тіла, які можна інтерпретувати як формальні розв'язки відповідної системи диференціальних рівнянь. Клас застосовних аналітичних кінематичних моделей кутового руху зазвичай обмежено моделями конічного руху, який має наглядну геометричну інтерпретацію [1]. Застосування рівняння Борца для вектора орієнтації (rotation vector) в умовах конічної моделі руху дозволяє отримати на основі відповідних розкладень розв'язків в ряд розрахункові формули для обчислення приросту вектора орієнтації на такті обчислень з подальшим визначення кватерніону повороту [1;2]. Оптимізації базової формули, отриманої в [2], за рахунок уточнення коефіцієнтів присвячені роботи [3-5]. В роботах [6;7] оптимізація алгоритмів в умовах конічного руху заснована на додаванні нових членів більш високого порядку в базову формулу алгоритму. В [8] на основі оптимізації

накопиченої похибки дрейфу для кінчного руху отримана низка алгоритмів визначення вектора орієнтації.

В роботах [9-11] представлені результати розробки і аналізу двочастотних кінематичних моделей, які інтерпретуються як формальні розв'язки кінематичного рівняння для кватерніонів і при певних умовах описують прецесійний рух твердого тіла.

Класична кінематична модель кінчного руху представляється через вектор орієнтації $\vec{\phi}$ у вигляді:

$$\vec{\phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \cos(\Omega t) \\ \phi \sin(\Omega t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де ϕ - напівкут при вершині уявного конуса, який описує вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$, Ω - кругова частота. Тоді вектор кутової швидкості при кінчному русі може бути представлений у вигляді:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 2\Omega \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ -\Omega \sin(\phi) \sin(\Omega t) \\ \Omega \sin(\phi) \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

В кватерніонному представленні кінематична модель кінчного руху має вигляд:

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ 0 \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos(\Omega t) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin(\Omega t) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$ - кватерніон орієнтації. Кінематична модель (4) - це *одночастотна* модель.

Слід зазначити, що всі моделі кутового руху кінчного типу є формальними моделями, оскільки при їх формуванні не враховується те, що вектор кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$, який забезпечує відповідну орієнтацію зв'язаних осей, має задовольняти диференціальному рівнянню обертального руху твердого тіла із тензором інерції J :

$$J \cdot \vec{\omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times J \cdot \vec{\omega}(t) = \vec{M}(t), \quad \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}_0, \quad (5)$$

де $\vec{\omega}_0$ - початкове значення $\vec{\omega}(t)$, $\vec{M}(t)$ - вектор результуючого моменту, який діє на тверде тіло.

Мета даної роботи - на основі послідовності ейлерових кутів отримати нову параметричну кінематичну модель кутового руху твердого тіла і застосувати побудовану на її основі еталонну модель кутового руху до точного аналізу і оптимізації двох алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації.

Параметрична кінематична модель кінчного типу. Розглянемо кватерніонне представлення просторового руху твердого тіла, яке відповідає послідовності ейлерових кутів з кватерніонами елементарних поворотів

$$\Lambda_1 = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \vec{i}_3 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \Lambda_2 = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \vec{i}_2 \sin\left(\frac{\psi}{2}\right),$$

$$\Lambda_3 = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \vec{i}_1 \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right),$$

де φ, ψ, ϑ - кути курсу, крену і тангажу, $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ орти інерціальної (умовно нерухомої системи координат).

В цьому випадку кватерніон результуючого повороту обчислюється за формулою

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3$$

і має компоненти:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \\ \lambda_1 &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \\ \lambda_2 &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right), \\ \lambda_3 &= \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Припустимо, що кут курсу є постійним, а кути крену і тангажу змінюються з часом лінійно: $\varphi(t) = k_1$, $\psi(t) = k_2 t$, $\vartheta(t) = k_3 t$, де $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$ - постійні величини. Тоді компоненти результуючого кватерніону $\Lambda(t)$ в залежності від часу будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) + \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_1(t) &= \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right) - \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_2(t) &= \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) + \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_3(t) &= \sin\left(\frac{k_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) - \cos\left(\frac{k_1}{2}\right) \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right). \end{aligned}$$

Введемо в розгляд параметри $\mu = \cos\left(\frac{k_1}{2}\right)$, $\nu = \sin\left(\frac{k_1}{2}\right)$, для яких виконується умова $\mu^2 + \nu^2 = 1$, що забезпечує нормування кватерніону $\Lambda(t)$. Тоді компоненти кватерніону результуючого повороту набувають більш простого вигляду:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \mu \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) + \nu \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_1(t) &= \mu \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right) - \nu \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_2(t) &= \mu \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) + \nu \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right), \\ \lambda_3(t) &= \nu \cos\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \cos\left(\frac{k_3 t}{2}\right) - \mu \sin\left(\frac{k_2 t}{2}\right) \sin\left(\frac{k_3 t}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Будемо інтерпретувати кватерніон $\Lambda(t)$ з компонентами (7) як *двопараметричне сімейство* $\Lambda(\mu, \nu, t)$ аналітичних розв'язків диференціального кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0.5\Lambda(t) \circ \omega(t), \quad (8)$$

де позначено $\dot{\Lambda}(t) = \frac{d}{dt}\Lambda(t)$, а $\omega(t) = (0, \vec{\omega}(t))$ - кватерніон кутової швидкості з векторною частиною $\vec{\omega}(t)$ з проєкціями на зв'язані осі, і початковою умовою $\omega(0) = (0, \vec{\omega}(0))$.

На основі оберненого рівняння (8) в умовах $\|\Lambda(t)\| = 1$ знайдемо кутову швидкість, яка відповідає цьому сімейству, з формули:

$$\omega(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t), \quad (9)$$

де $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон до $\Lambda(t)$. В результаті отримаємо з (9) для векторної частини кватерніона $\omega(t)$ (вектора кутової швидкості) наступний вираз:

$$\vec{\omega}(t) = (k_3, k_2 \cos(k_3 t), -k_2 \sin(k_3 t)). \quad (10)$$

Таким чином двопараметричне сімейство розв'язків $\Lambda(\mu, \nu, t)$ (7) диференціального рівняння (8) має місце для початкових умов $\Lambda(0) = (\mu, 0, 0, \nu)$ і $\omega(0) = (0, k_3, k_2, 0)$.

Зауважимо, що вираз (10) для $\vec{\omega}(t)$ не містить параметрів μ і ν . Це означає, що відсутня параметрична залежність кутової швидкості від початкового кватерніона орієнтації $\Lambda(0) = (\mu, 0, 0, \nu)$, тобто всі розв'язки двопараметричного сімейства реалізуються в умовах **одного** вектора кутової швидкості (10). Таким чином для будь-якої початкової орієнтації твердого тіла будемо мати одну й ту ж залежність кутової швидкості від часу.

Якщо належним чином задати значення параметрів кінематичної моделі μ і ν , а також задати величини k_1 , k_2 , то отримаємо *еталонну модель* кутового руху твердого тіла (7), (10). При оцінюванні точності алгоритмів орієнтації на еталонній моделі (7), (10) це вимагає певного узгодження початкових умов для модельного кватерніону орієнтації і для обрахованого за алгоритмом кватерніону.

Розглянемо кутовий рух твердого тіла з діагональним тензором інерції $J = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ і вектором швидкості (10), орієнтація якого задається кватерніоном (7). Для вектора кінетичного моменту $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ і кінетичної енергії $K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot J \cdot \vec{\omega}$ будемо мати:

$$L^2 = I_1^2 k_3^2 + I_2^2 k_2^2 \cos^2(k_3 t) + I_3^2 k_2^2 \sin^2(k_3 t),$$

$$2K = I_1 k_3^2 + I_2 k_2^2 \cos^2(k_3 t) + I_3 k_2^2 \sin^2(k_3 t).$$

У випадку довільного тензора інерції $J = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ отримаємо, що $L \neq \text{const}$ і $K \neq \text{const}$.

Розглянемо обернену задачу динаміки і знайдемо проєкції вектору потрібного моменту $\vec{M}(t)$, який забезпечує рух з кутовою швидкістю (10). З рівняння (5) отримаємо, що

$$\begin{aligned} M_1(t) &= (I_2 - I_3)k_2^2 \sin(k_3 t) \cos(k_3 t), \\ M_2(t) &= (-I_1 - I_2 + I_3)k_2 k_3 \sin(k_3 t), \\ M_3(t) &= (-I_1 + I_2 - I_3)k_2 k_3 \cos(k_3 t). \end{aligned} \quad (11)$$

Оскільки в загальному випадку $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то з (11) маємо, що $\vec{M}(t) \neq 0$, отже відповідний кутовий рух не є вільним обертанням твердого тіла.

Для симетричного твердого тіла при $I_2 = I_3$ отримаємо, що

$$\begin{aligned} M_1(t) &= 0, \\ M_2(t) &= -I_1 k_2 k_3 \sin(k_3 t), \\ M_3(t) &= -I_1 k_2 k_3 \cos(k_3 t), \\ L^2 &= I_1^2 k_3^2 + I_2^2 k_2^2 = \text{const}, \\ 2K &= I_1 k_3^2 + I_2 k_2^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

отже в цьому випадку модельний рух - це вимушена регулярна прецесія з постійним модулем вектора кутової швидкості $\|\vec{\omega}(t)\| = \sqrt{k_2^2 + k_3^2}$.

В загальному випадку кінематичної моделі (7) є питання щодо реалізованості модельного руху в сенсі відтворення вектору потрібного моменту $\vec{M}(t)$. Оскільки дві компоненти вектора кутової швидкості змінюються за гармонічним законом, а одна компонента є постійною, як це має місце для всіх моделей кіничного руху, то кінематичну модель (7) можна віднести до моделей *кіничного типу*. На відміну від класичної моделі (4) модель (7) є *двочастотною* моделлю.

Представлена кінематична модель (7) в інтерпретації двопараметричного сімейства розв'язків кінематичного рівняння (5) для кутової швидкості (10) може бути використана для моделювання процесу обертання твердого тіла і для опрацювання алгоритмів визначення кватерніону орієнтації.

Оцінювання точності алгоритмів обчислення кватерніону орієнтації. Для проведення точного аналізу алгоритмів визначення кватерніону орієнтації застосуємо наступні оцінки.

Оцінка фактичного порядку точності алгоритму. Математичний порядок точності алгоритму орієнтації формується на основі розкладень розв'язку відповідного кінематичного рівняння в ряд в термінах квазікоординат (1) на кроці обчислень. Математичний порядок алгоритму пов'язаний з порядком точності розрахункової формули для обчислення кватерніону повороту $\Delta\lambda_n^*$ на такті обчислень. В умовах чисельної реалізації в автономному обчислювачі математичний порядок формули для обчислення $\Delta\lambda_n^*$ реалізується не завжди. Це необхідно також враховувати на етапі проектування БІСО.

Введемо в розгляд поняття *фактичного (реалізованого) порядку* N_f алгоритму визначення кватерніону повороту. В основу обчислення фактичного порядку покладемо *практичну оцінку* точності визначення кватерніону повороту у вигляді

$$|\Delta\lambda_{nj}^* - \Delta\lambda_{nj}| \leq \alpha_{nj} (\theta_n^*)^{N_{nj}}, \quad j = \overline{0,3}, \quad (12)$$

де

$$\theta_n^* = \sqrt{\theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}},$$

$\Delta\lambda_{nj}$ – еталонне (модельне) значення параметру на такті обчислень. В результаті застосування на кожному кроці формули (12) обчислюється величина N_j^{max} – максимально можливий порядок θ_n^* , при якому для будь-якого n забезпечується виконання умови $\theta_n^* < \alpha_{nj} < 1$:

$$N_j^{max} = \max_{\theta_n^* < \alpha_{nj} < 1} N_{nj}. \quad (13)$$

Далі обчислюється $N_n = \min_j N_j^{max}$ – мінімальний з максимально можливих порядків N_j^{max} . Врешті фактичний порядок алгоритму N_f визначається як:

$$N_f = N_n - 1. \quad (14)$$

Методична доцільність введення поняття фактичного (реалізованого) порядку алгоритму полягає в тому, що воно дозволяє зв'язати величину квазікоординат, що поступають на вхід алгоритму на кроці обчислень, з фактичною точністю визначення орієнтації. В умовах, коли для рухомого об'єкту за технічними умовами відомі обмеження на величини квазікоординат на кроці обчислень, визначення фактичного порядку алгоритму орієнтації з одночасним оцінюванням похибки накопиченого обчислювального дрейфу і похибки норми дозволяє найбільш повно провести точносний аналіз алгоритмів для цього об'єкту.

Похибка накопиченого обчислювального дрейфу. Для аналізу точності обчислення орієнтації розглянемо похибку накопиченого обчислювального дрейфу, яка є неусувною похибкою і обумовлена методичною похибкою алгоритму. Обчислювальний дрейф має фізичну інтерпретацію малого кута $\delta\theta_n$, на який треба повернути тверде тіло до співпадіння обчисленого положення твердого тіла з його еталонним (модельним) положенням. Кватерніон цього повороту (*кватерніон неузгодженості*) обчислюється за формулою:

$$\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \Lambda_n^{-1}, \quad (15)$$

де

$$\delta\Lambda_n = (\delta\lambda_{n0}, \delta\lambda_{n1}, \delta\lambda_{n2}, \delta\lambda_{n3}),$$

$\Lambda_n^{-1} = \frac{\tilde{\Lambda}_n}{\|\Lambda_n\|}$ – зворотній кватерніон до еталонного (модельного) кватерніону $\Lambda_n = (\lambda_{n0}, \tilde{\lambda}_n)$, $\tilde{\Lambda}_n = (\lambda_{n0}, -\tilde{\lambda}_n)$ – спряжений кватерніон до Λ_n . Якщо кватерніон Λ_n є нормованим, то $\Lambda_n^{-1} = \tilde{\Lambda}_n$, і з (15) маємо:

$$\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n. \quad (16)$$

Представимо кватерніон неузгодженості $\delta\Lambda_n$ в тригонометричному вигляді:

$$\delta\Lambda_n = \cos\left(\frac{\delta\theta_n}{2}\right) + \vec{\xi} \sin\left(\frac{\delta\theta_n}{2}\right),$$

де $\vec{\xi}$ – одиничний вектор. Тоді похибку накопиченого обчислювального дрейфу можна обчислити за формулою:

$$\delta\theta_n = 2 \arctg\left(\frac{|\delta\tilde{\lambda}_n|}{\delta\lambda_{n0}}\right), \quad (17)$$

де

$$|\delta\tilde{\lambda}_n| = \sqrt{\delta\lambda_{n1}^2 + \delta\lambda_{n2}^2 + \delta\lambda_{n3}^2}.$$

Похибка норми обчисленого кватерніону орієнтації. Відхилення норми обчисленого кватерніону орієнтації від одиниці є небажаним, оскільки може привести як до переповнення розрядної сітки автономного обчислювача, так і до виродження кватерніону в нуль. Якщо в БІСО кватерніони використовуються в операціях ортогонального перетворення векторів або в формулі додавання поворотів на такті обчислень, то для ненормованих кватерніонів ці операції мають більш складний вигляд у порівнянні з відповідними формулами для нормованих кватерніонів, і це є нераціональним з точки зору обсягу обчислень. Нормування кватерніону також є обов'язковим при формуванні матриці направляючих косинусів, а також в задачах фільтрації [12-14]. Для оцінювання похибки норми обчисленого кватерніону будемо використовувати адитивну оцінку

$$\chi_n = \|\Lambda_n^*\|^2 - 1,$$

яка на відміну від оцінки похибки накопиченого дрейфу не вимагає знання еталонного (модельного) кватерніону.

Чисельно-аналітичне моделювання еталонної моделі кутового руху на основі параметричної кінематичної моделі кінцевого типу. Проведено програмно-чисельну реалізацію еталонної моделі (7), (10) для $k_2 = 0.24$, $k_3 = 0.16$ при значеннях параметрів $\mu = -0.6$, $\nu = 0.8$ на інтервалі часу $t \in [0, 100]$ с. На рис.1 наведені графіки проєкцій вектору модельної кутової швидкості на зв'язані осі в залежності від часу. На рис. 2 представлені побудовані на основі чисельного експерименту траєкторії $\lambda_i(\lambda_0)$, ($i = 1, 2, 3$) в конфігураційному просторі параметрів орієнтації. Методологічна доцільність побудовання траєкторій полягає в тому, що вигляд траєкторій дозволяє на етапі проектування БІСО вибрати такі параметри еталонної моделі, для яких модельний рух буде найкраще відтворювати рух реального об'єкту.

Точносний аналіз алгоритмів визначення кватерніону орієнтації. Розглянемо два алгоритми, які в якості «проміжного» параметру для обчислення кватерніону повороту використовують вектор орієнтації. Алгоритми побудовані за схемою алгоритмів четвертого порядку точності.

В алгоритмі А1 приріст вектору орієнтації

$$\vec{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2}, \theta_{n3})$$

на такті $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою [2]:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \frac{33}{80}(\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^{(3)}) + \frac{57}{80}\vec{\theta}_n^{(2)} \times (\vec{\theta}_n^{(3)} - \vec{\theta}_n^{(1)}), \quad (18)$$

де

$$\vec{\theta}_n^{(1)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(2)} = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t)dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(3)} = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t)dt -$$

вихідні сигнали гіроскопів (квазікоординати), що формуються всередині кроку обчислень в моменти часу

$$t_{n-1} + 1/3 \Delta T, t_{n-1} + 2/3 \Delta T, \\ t_{n-1} + \Delta T,$$

$\Delta T = t_n - t_{n-1}$ – величина кроку обчислень,

$$\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*).$$

В алгоритмі *A2* приріст вектору орієнтації на такті обчислюється за формулою [11]:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \frac{2}{3} (\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^*), \quad (19)$$

де

$$\vec{\theta}_n^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \vec{\omega}(t)dt, \quad \vec{\theta}_n^{(1)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/2\Delta T} \vec{\omega}(t)dt$$

- відповідні квазікоординати.

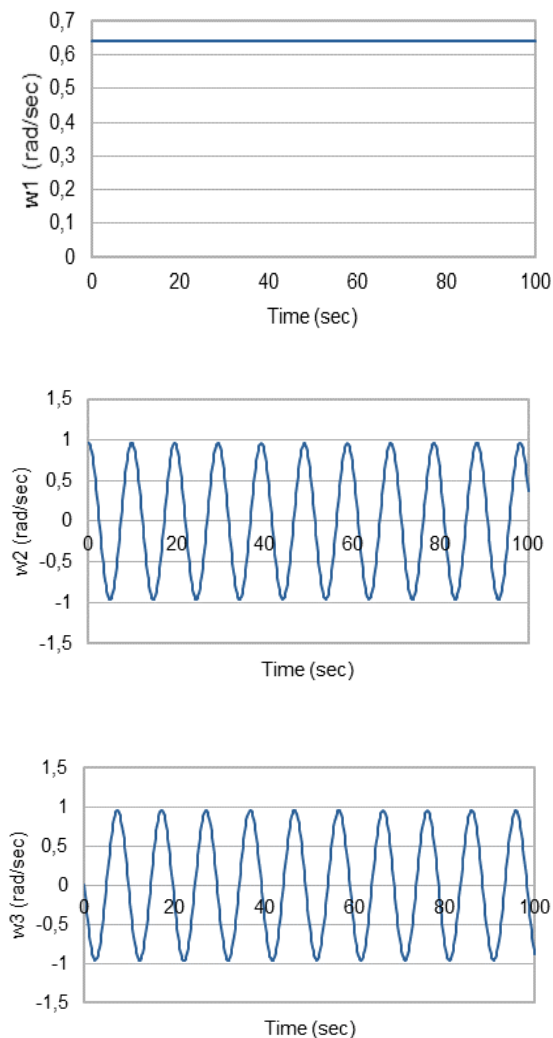


Рис. 1 – Проекції вектора кутової швидкості

Для знаходження поточного кватерніону орієнтації Λ_n^* використовується формула додавання поворотів

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta \Lambda_n^*,$$

де

$$\Delta \Lambda_n^* = (\Delta \lambda_{n0}^*, \Delta \vec{\lambda}_n^*)$$

- кватерніон повороту (приріст кватерніону на такті $[t_{n-1}, t_n]$), скалярна і векторна частини якого обчислюються за приростом вектору орієнтації на такті за наближеними формулами:

$$\Delta \lambda_{n0}^* = 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4,$$

$$\Delta \vec{\lambda}_n^* = (1/2)\vec{\theta}_n^*(1 - \theta_n^2/24), \quad (20)$$

де

$$\theta_n^2 = \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2,$$

$$\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*).$$

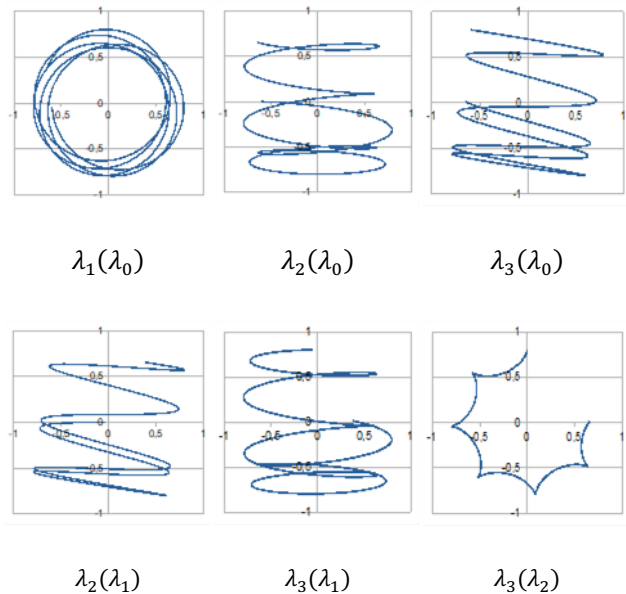


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі

У таблиці 1 представлені значення фактичних порядків алгоритмів *A1*, *A2*, максимальної похибки накопиченого дрейфу і накопиченої похибки норми, отримані в результаті моделювання алгоритмів на формальній параметричній кінематичній моделі кінцевого типу на інтервалі $t \in [0, 100]$ с з кроком обчислень $\Delta T = 0.1$ с.

Таблиця 1 – Фактичний порядок алгоритмів в реалізації

Алгоритм	Фактичний порядок N_f	Накопичена похибка дрейфу $\delta \theta_n$	Накопичена похибка норми χ_n
<i>A1</i>	6	$3,06 \cdot 10^{-8}$	$1,64 \cdot 10^{-9}$
<i>A2</i>	6	$2,79 \cdot 10^{-8}$	$1,64 \cdot 10^{-9}$

Отримано, що в умовах проведеної чисельної реалізації обидва алгоритми мають шостий фактичний порядок точності. На рис. 3 і рис. 4 представлені

графіки залежності від часу похибки накопиченого обчислювального дрейфу. Похибка для обох алгоритмів має тенденцію лінійного зростання.

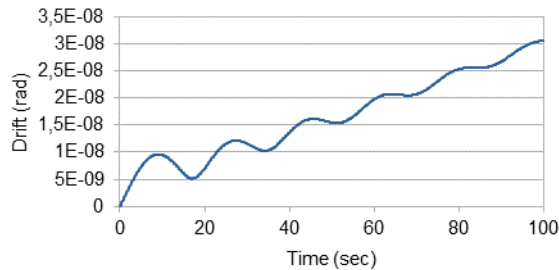


Рис. 3 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для алгоритму A1

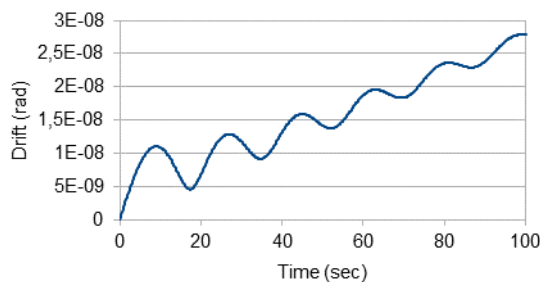


Рис. 4 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для алгоритму A2

Оптимізація алгоритмів орієнтації. Проведемо оптимізацію алгоритмів A1 і A2 на основі мінімізації похибки накопиченого дрейфу за рахунок уточнення їх коефіцієнтів. Для цього представимо формули алгоритмів у вигляді:

$$A1: \vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha (\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^{(3)}) + \beta \vec{\theta}_n^{(2)} \times (\vec{\theta}_n^{(3)} - \vec{\theta}_n^{(1)}), \quad (21)$$

де для коефіцієнтів α і β залишається початкова умова

$$\alpha + \beta = \frac{90}{80},$$

$$A2: \vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \left(\frac{2}{3} + \gamma\right) (\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^*). \quad (22)$$

В процесі оптимізації за критерієм мінімальності похибки накопиченого обчислювального дрейфу уточненню підлягають коефіцієнт α в формулі (21) і величина доданку γ в коефіцієнті формули (22).

В результаті проведеного обчислювального експерименту побудовані графічні залежності накопиченої похибки дрейфу від значень α і γ , які представлені на рис. 5 і рис. 6. Показано, що існують значення α і γ , при яких похибка накопиченого дрейфу є мінімальною. Уточнені значення коефіцієнтів представлені в таблиці 2.

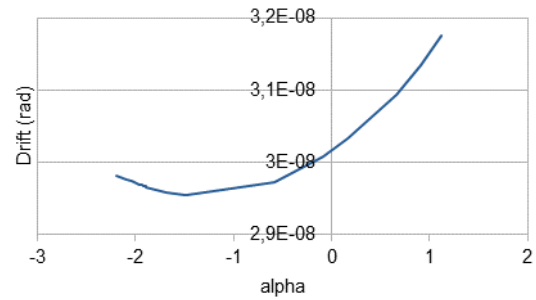


Рис. 5 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від коефіцієнта α для алгоритму A1

В таблиці 3 представлені значення фактичних порядків оптимізованих алгоритмів та максимальні значення накопичених похибок дрейфу і похибок норми для оптимізованих алгоритмів. Отримано, що оптимізація дає незначне покращення оцінки похибки накопиченого дрейфу на розглянутому інтервалі часу, не призводить до змінення фактичного порядку алгоритмів і не погіршує похибку норми.

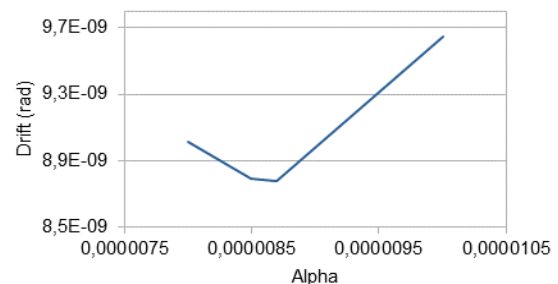


Рис. 6 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від величини γ для алгоритму A2

Таблиця 2 - Значення уточнених коефіцієнтів в алгоритмах

алгоритм A1	алгоритм A2
$\alpha = -\frac{119}{80}, \beta = \frac{209}{80}$	$\gamma = \frac{87}{10000000}$

Таблиця 3 – Накопичені похибки алгоритмів

Оптимізовані алгоритми	Фактичний порядок N_f	Накопичена похибка дрейфу $\delta\theta_n$	Накопичена похибка норми χ_n
A1	6	$2,95 \cdot 10^{-8}$	$1,64 \cdot 10^{-9}$
A2	6	$8,78 \cdot 10^{-9}$	$1,64 \cdot 10^{-9}$

На рис. 7 і рис. 8 представлені залежності від часу накопиченої похибки дрейфу для оптимізованих алгоритмів. Отримано, що оптимізація алгоритму A2 призводить до змінення характеру залежності похибки накопиченого дрейфу на незростаючий коливальний характер. Що стосується оптимізації алгоритму A1, то уточнення коефіцієнтів в умовах прийнятого обмеження

$$\alpha + \beta = \frac{90}{80}$$

не призводить до зміни характеру залежності похибки накопиченого дрейфу з часом, яка залишається лінійно зростаючою.

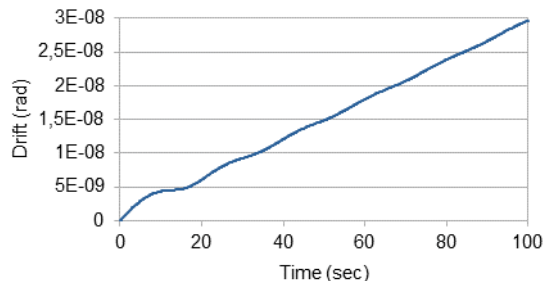


Рис. 7 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для оптимізованого алгоритму A1

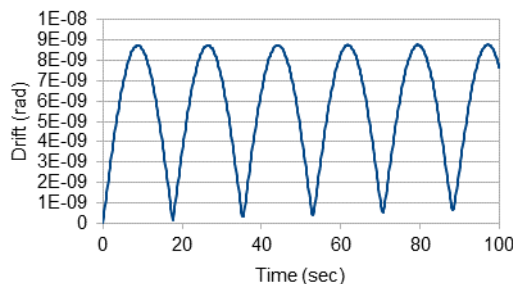


Рис. 8 – Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для оптимізованого алгоритму A2

Висновки. Запропонована нова кінематична модель кутового руху твердого тіла, яка представляє собою двопараметричне сімейство розв'язків кватерніонного кінематичного рівняння і відноситься до формальних моделей кінчного типу. Особливістю цієї моделі є незалежність вектору кутової швидкості обертання від початкового кватерніону орієнтації зв'язаних осей. Була побудована і чисельно реалізована еталонна модель кутового руху твердого тіла, яка включає аналітичні залежності для кватерніона орієнтації, вектора кутової швидкості і квазікоординат. Для точного аналізу двох алгоритмів визначення кватерніону орієнтації застосовані похибка накопиченого обчислювального дрейфу і накопичена похибка норми, а також процедура обчислення фактичного порядку точності алгоритму. Розроблена комп'ютерна програма, яка дозволяє реалізувати еталонну модель кутового руху, основану на запропонованій кінематичній моделі кінчного типу, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритмів орієнтації і отримувати оцінки накопиченого обчислювального дрейфу і похибки норми обчисленого кватерніону. На основі комп'ютерного експерименту були оптимізовані два відомі алгоритми орієнтації. Для алгоритму A1 оптимізація не призвела до суттєвого

покращення точності визначення орієнтації. В результаті оптимізації для алгоритму A2 спостерігається підвищення точності визначення орієнтації, оскільки похибка накопиченого дрейфу для оптимізованого алгоритму має коливальний характер на відміну від лінійно зростаючої з часом похибки для неоптимізованого алгоритму. Показано, що оптимізація не призводить до зростання похибки норми. В подальшому представлена параметрична кінематична модель кінчного типу і основана на ній еталонна модель обертального руху твердого тіла можуть бути застосовані для точного аналізу і оптимізації алгоритмів визначення кватерніону орієнтації в умовах неідеальних вимірювань квазікоординат.

Список літератури

1. Bortz, J. E. (1971) A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, AES-7 (Jan. 1971), pp. 61-46 <https://doi.org/10.1109/TAES.1971.310252>
2. Miller, R. B. (1983) A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 6, 4 (July-Aug. 1983), pp. 287-291 <https://doi.org/10.2514/3.19831>
3. Ignagni, M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. Vol.13. No 2, 1990. Pp.363-369 <https://doi.org/10.2514/3.20558>
4. Ignagni, M. B. Efficient Class Of Optimized Coning Compensation Algorithms. *AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*, Vol. 19, No. 2, March-April 1996. Pp. 424-429. <https://doi.org/10.2514/3.21635>
5. Jiang, Y. F., Lin, Y. P. Improved strapdown coning algorithms, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 2, pp. 484-490, April 1992, <https://doi.org/10.1109/7.144574>
6. Jiang, P., Zhang, Y., Hao, Q., Fan, S., Xu, D. A Method Converting Cone Into Sculling Algorithm for Strapdown Inertial Navigation System. *IEEE Access*. Vol. 7. Pp. 140430-140437, 2019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2942638>
7. Zhang, Z., Geng, L., Fan, Y. Performance Analysis of Three Attitude Algorithms for SINS. *Academic Journal of Computing & Information Science*. Vol. 5. Pp. 1-5. <https://doi.org/10.25236/AJCSIS.2022.051201>
8. Панов, А. П. Математичні основи теорії інерційної навігації. К.: Наук. Думка. 1995. 280 с.
9. Плаксий, Ю. А. Двочастотна кватерніонна еталонна модель обертання твердого тіла кінчного типу // *Вісник НТУ «ХПІ»*, випуск 18(1061). 2014. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. С. 120-129.
10. Plakсий, Yu., Breslavsky, D., Homozkova, I., Naumenko, K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems // *Continuum Mech. Thermodyn.* (2021) 33:1141-1160. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00963-4>
11. Плаксий, Ю. А., Кузнецов, Ю. О. Аналітично-чисельне моделювання процесу орієнтації твердого тіла в кватерніонах через послідовність ейлерових кутів для точного аналізу алгоритмів орієнтації в БІНС // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Харків, №2. 2023. Серія: Динаміка і міцність машин. С.58-64. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293474>
12. Cui, M., Zeng, J. An Improved Coning Error Compensation Algorithm. 2021 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), Takamatsu, Japan, 2021 Pp. 28-32. <https://doi.org/10.1109/ICMA52036.2021.9512838>
13. Lai, X., Yang, F. A robust Kalman filter for SINS/GPS integrated Navigation. 2021 IEEE 4th Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC), Chongqing, China, 2021. Pp. 238-242, <https://doi.org/10.1109/IMCEC51613.2021.9482280>
14. Dai, Q., Xiao, G.-R., Zhou, G.-H., Ye, Q.-Q. and Han, S.-Y. (2024) A novel Gaussian sum quaternion constrained cubature Kalman filter algorithm for GNSS/SINS integrated attitude determination and positioning system. *Front. Neurobot.* 18:1374531. <https://doi.org/10.3389/fnbot.2024.1374531>

References (transliterated)

1. Bortz, J. E. (1971) A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-7 (Jan. 1971), pp. 61-46. <https://doi.org/10.1109/TAES.1971.310252>
2. Miller, R. B. (1983) A new strapdown attitude algorithm. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 6, 4 (July-Aug. 1983), pp. 287-291. <https://doi.org/10.2514/3.19831>
3. Ignagni, M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.13. No 2, 1990. Pp.363–369. <https://doi.org/10.2514/3.20558>
4. Ignagni, M. B. Efficient Class Of Optimized Coning Compensation Algorithms. AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics, Vol. 19, No. 2, March-April 1996. Pp. 424-429. <https://doi.org/10.2514/3.21635>
5. Jiang, Y. F., Lin, Y. P. Improved strapdown coning algorithms, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 28, no. 2, pp. 484-490, April 1992, <https://doi.org/10.1109/7.144574>
6. Jiang, P., Zhang, Y., Hao, Q., Fan, S., Xu, D. A Method Converting Cone Into Sculling Algorithm for Strapdown Inertial Navigation System. IEEE Access. Vol. 7. Pp. 140430-140437, 2019. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2942638>
7. Zhang, Z., Geng, L., Fan, Y. Performance Analysis of Three Attitude Algorithms for SINS. Academic Journal of Computing & Information Science. Vol. 5. Pp. 1-5. <https://doi.org/10.25236/AJCIS.2022.051201>
8. Panov, A. P. Matematicheskie osnovy teorii inercial'noj navigacii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation.] Kyiv.: Nauk. Dumka. 1995. 280 p.
9. Plakסי, Yu. A. Dvochastotna kvaternionna etalonna model obertannia tverdoho tila konichnogo typu [Two-frequency quaternion reference model of rigid body rotation of a coning type] //Visnyk NTU «KhPI», Kharkiv. 18(1061). 2014. Seriya: Matematychno modelivannia v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh. P. 120-129.
10. Plakסי, Yu., Breslavsky, D., Homozkova, I., Naumenko, K. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems // Continuum Mech. Thermodyn. (2021) 33:1141–1160. <https://doi.org/10.1007/s00161-020-00963-4>
11. Plakסי, Yu. A., Kuznetsov, Yu. O. Analitichno-chyselne modelivannia protsesu oriantatsii tverdoho tila v kvaternionakh cherez poslidovnist eilerovykh kutiv dlia tochnosnoho analizu alhorytmiv oriantatsii v BINS [Analytical and numerical modeling of the orientation process of a rigid body in quaternions through a sequence of Euler angles for the precision analysis of orientation algorithms in BINS]//Visnyk NTU «KhPI». Kharkiv, №2. 2023. Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn. P.58-64. <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2023.2.293474>
12. Cui, M., Zeng, J. An Improved Coning Error Compensation Algorithm. 2021 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), Takamatsu, Japan, 2021 Pp. 28-32. <https://doi.org/10.1109/ICMA52036.2021.9512838>
13. Lai, X., Yang, F. A robust Kalman filter for SINS/GPS integrated Navigation. 2021 IEEE 4th Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC), Chongqing, China, 2021. Pp. 238-242, <https://doi.org/10.1109/IMCEC51613.2021.9482280>
14. Dai, Q, Xiao, G-R, Zhou, G-H, Ye, Q-Q and Han S-Y (2024) A novel Gaussian sum quaternion constrained cubature Kalman filter algorithm for GNSS/SINS integrated attitude determination and positioning system. Front. Neurorobot. 18:1374531. <https://doi.org/10.3389/fnbot.2024.1374531>

Надійшла (received) 24.02.2025

Прийнята до друку (accepted) 01.09.2025

Опублікована (published) 03.09.2025

Відомості про автора / About the Author

Плаксі Юрій Андрійович (Plakסי Yuriy)– кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-64-36; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9487-8444>; e-mail: plakסי.yu@gmail.com.