УДК 519.2 DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.318912

Р. А. БАБУДЖАН, М. І. ШАПОВАЛОВА, О. О. ВОДКА

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ РОБОТИ ФІЗИКО-ІНФОРМОВАНИХ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ НА ПРИКЛАДІ ДЕФОРМУВАННЯ БАЛКИ

У роботі досліджено точність прогнозування деформації балки за допомогою фізико-інформованих нейронних мереж (PINN) у порівнянні зі звичайними повнозв'язними нейронними мережами. Прогнозування прогину балки є важливою задачею в механіці, що має широке застосування у проєктуванні несучих конструкцій. Класичні чисельні методи, такі як метод скінченних елементів, часто потребують значних обчислювальних ресурсів, тоді як нейронні мережі можуть запропонувати ефективну альтернативу. Для експерименту було використано аналітичне рішення задачі прогину балки, шарнірно опертої з одного кінця, закріпленої з іншого, та навантаженої точковою силою. Було створено набір даних, у якому варіювалася позиція прикладання навантаження для отримання різних значень прогину. Архітектура нейронної мережі базувалася на повнозв'язній структурі, навченої для прогнозування прогину. У ході дослідження порівнювалися дві функції втрат: стандартна, яка мінімізує середньоквадратичну помилку (MSE), та комплексна, що включає фізичну компоненту. Остання враховувала закони механіки, зокрема диференціальні рівняння прогину балки, які інтегрувалися у процес навчання через градієнти вихідних даних мережі. Додатково досліджувався вплив архітектури мережі, зокрема зміни кількості прихованих шарів і нейронів, на точність прогнозування. Фізична функція втрат також враховувала граничні умови балки, що забезпечувало коректне відтворення її механічної поведінки. Це дозволило моделі не тільки прогнозувати прогин, а й точно обчислювати його похідні, що є критично важливим для інженерних застосувань. Результати показали, що включення фізичних законів у процес навчання значно підвищує точність прогнозів, особливо при обмеженій кількості даних. Порівняння продемонструвало, що фізико-інформована нейронна мережа забезпечує кращі результати, ніж звичайна модель, і точніше відображає поведінку балки під навантаженням. Отримані висновки підкреслюють ефективність підходу PINN для розв'язання інженерних задач, де важливу роль відіграють фізичні моделі та закони.

Ключові слова: набір даних, деформування балки, фізико-інформована нейрона мережа.

R. A. BABUDZHAN, M. I. SHAPOVALOVA, O. O. VODKA

STUDY OF THE ACCURACY OF PHYSICALLY INFORMED NEURAL NETWORKS USING THE EXAMPLE OF BEAM DEFORMATION

The study investigates the accuracy of beam deformation prediction using physics-informed neural networks (PINN) compared to conventional fully connected neural networks. Predicting beam deflection is a crucial task in mechanics, widely applied in the design of load-bearing structures. Classical numerical methods, such as the finite element method, often require significant computational resources, whereas neural networks can offer a more efficient alternative. For the experiment, an analytical solution to the beam deflection problem was used, where the beam is hinged at one end, fixed at the other, and subjected to a point force. A dataset was created in which the position of the applied load was varied to obtain different deflection values. The architecture of the neural network was based on a fully connected structure trained for deflection prediction. During the study, two loss functions were compared: a standard one that minimizes the mean square error (MSE) and a complex one that includes a physical component. The latter accounted for the laws of mechanics, particularly the differential equations of beam deflection, which were integrated into the training process through the gradients of the network's output data. Additionally, the impact of the network architecture was studied, specifically how variations in the number of hidden layers and neurons influenced prediction accuracy. The physical loss function also incorporated boundary conditions of the beam, ensuring the correct representation of its mechanical behavior. This allowed the model not only to predict deflection but also to accurately compute its derivatives, which is critical for engineering applications. The results showed that incorporating physical laws into the training process significantly improves the accuracy of predictions, especially with limited data. The comparison demonstrated that the physically informed neural network provides better results than the conventional model and more accurately reflects the behavior of the beam under load. The obtained findings emphasize the effectiveness of the PINN approach for solving engineering problems where physical models and laws play an important role.

Keywords: dataset, beam deformation, physically informed neural network.

Вступ. Фізико-інформовані нейронні мережі (PINNs) становлять інноваційний підхід до розв'язання складних завдань у механіці, що поєднує принципи машинного навчання (ML) з фізичними законами. У традиційній механіці для моделювання складних процесів, таких як розв'язання нелінійних рівнянь або аналіз напружено-деформованого стану (НДС), зазвичай використовують числові методи, наприклад, метод скінченних елементів (МСЕ) або метод граничних елементів. Проте вони часто є обчислювально затратними і вимагають глибоких знань про вхідні дані. Натомість сучасні алгоритми ML, як-от глибокі нейронні мережі (DNNs), добре справляються з апроксимацією складних функцій і дозволяють працювати з великими обсягами даних. Однак ці підходи мають суттєвий недолік – відсутність фізичних обмежень, що часто призводить до непередбачуваних результатів за межами навчальної вибірки.

Ця технологія об'єднує найкраще з обох світів, додаючи фізичні обмеження у вигляді рівнянь, таких як рівняння Нав'є-Стокса чи закони термодинаміки, до функції втрат нейронної мережі. Це дозволяє отримувати моделі, що відповідають як експериментальним даним, так і фізичним законам, і тим самим покращує точність та узагальненість. Такий підхід знайшов застосування в широкому діапазоні задач – від аналізу матеріалів і моделювання конструкцій до прогнозування складних потоків у геофізиці та біомеханіці. Машинне навчання все ширше застосовується в механіці для вирішення завдань моделювання та аналізу, таких як оцінка властивостей матеріалів, прогнозування НДС у складних конструкціях і симуляція потоків у багатофазних середовищах. Одним із найпоширеніших підходів є використання моделей типу "чорної скриньки", які базуються на глибоких нейронних мережах, що будуються на основі великих наборів даних без інтеграції фізичних законів. Такі методи демонструють високу точність у межах навчальної вибірки, проте їхня екстраполяція часто ненадійна через брак фізичної інтерпретованості. Альтернативою є методи з обмеженою фізичною інтеграцією, які частково враховують фізичні закони, наприклад, через додавання характеристичних параметрів до вхідних даних або використання спеціальних активаційних функцій.

Ще одним ефективним підходом є гібридні методи, що поєднують традиційні числові моделі, такі як МСЕ, із навчанням на основі даних. Це дозволяє використовувати фізико-інформовані моделі для обчислення параметрів або уточнення результатів моделювання. Попри значні досягнення в цій галузі, практичне застосування машинного навчання в механіці стикається з низкою викликів. Висока обчислювальна складність, обмежена доступність даних і чутливість до шуму ускладнюють реалізацію цих підходів, що зумовлює необхідність подальших досліджень і вдосконалення методів.

Розглянуті роботи підкреслюють ефективність PINNs у різних галузях науки і техніки. Зокрема, для розв'язання нелінійного рівняння Шредінгера, що дозволило значно підвищити точність моделювання завдяки використанню навчання з різними граничними умовами [1]. Чи для оцінки поперечних переміщень і модуля пружності в задачах механіки балок [5]. Деякі дослідження фокусуються на моделюванні процесів із частковим знанням фізики. Наприклад, у роботі [6] методологія PINNs дозволила оцінювати не спостережувані стани у хімічних реакторах із неповними рівняннями, а у [11] – для задач течії у відкритих областях. Важливим кроком стало застосування фізико-інформованих нейронних мереж для задач матеріалознавства. Робота [17] демонструє покращення точності прогнозування характеристик магнітних багатошарових матеріалів шляхом використання ансамблевого навчання та методів генерації даних. Аналогічно, стаття [19] вперше застосовує удосконалені PINNs (I-PINNs) для моделювання потоку в пористих середовищах із урахуванням фрактур.

Крім того, нейронні мережі такого типу знаходять застосування в задачах великого масштабу. Наприклад, у [12] запропоновано метод PINN-DD для моделювання процесів у нафтових резервуарах з обмеженими даними, а робота [10] демонструє ефективність ансамблевого підходу до зменшення помилок у задачах виробництва. Робота [20] пропонує новий підхід до використання нейронних мереж для прогнозування процесів полімеризації, інтегруючи фундаментальні хімічні знання у вигляді кінетичних моделей, що дозволяє зменшити потребу в великих наборах даних та покращити точність прогнозів, навіть з обмеженими даними. Зокрема, автори демонструють, як цей метод перевершує традиційні нейронні мережі та покращує прогнози існуючих кінетичних моделей, працюючи з даними, що містять всього один зразок. Однак методологія потребує більш детального опису, а також необхідні додаткові дослідження щодо універсальності та потенційних проблем з перенавчанням.

Незважаючи на значні досягнення, фізико-інформовані нейронні мережі мають низку обмежень, які ускладнюють їхнє застосування. Однією з ключових проблем є чутливість до параметрів навчання. Дослідження [11; 16] показують, що надмірна кількість змінних, які беруть участь у процесі зворотного розповсюдження градієнтів, може знижувати точність результатів через утруднення пошуку глобального мінімуму функції втрат. Ще однією суттєвою проблемою є висока обчислювальна складність їх навчання, особливо при моделюванні великих систем. Це значно збільшує час і ресурси, необхідні для досягнення прийнятної точності [12; 16].

Також, такі нейронні мережі інколи демонструють труднощі з узагальненням для різних масштабів і умов, що знижує їхню ефективність у задачах із широким спектром параметрів [3; 9]. Ще однією невирішеною проблемою є недостатнє вивчення впливу дискретизаці на результати роботи PINNs. Ця проблема особливо помітна у роботах [6; 19]. Таким чином, подальші дослідження повинні зосередитися на вирішенні цих обмежень, щоб покращити застосовність технології у складних реальних сценаріях.

Отже, фізико-інформовані нейронні мережі є перспективним інструментом для вирішення складних задач механіки та аналізу властивостей матеріалів, оскільки вони поєднують переваги ML і фізичних законів. Попри значний прогрес у застосуванні PINNs, існує ще багато відкритих питань, зокрема стосовно оптимізації їхньої точності, врахування неточностей дискретизації та адаптації до реальних умов. Подальша робота в цьому напрямку спрямована на розвиток моделей, здатних ефективно справлятися із задачами механіки в умовах обмежених даних, зберігаючи фізичну інтерпретованість і точність. Цей напрямок залишається надзвичайно актуальним для інженерної практики та науки.

Постановка задачі.

Фізична модель прогину балки.

Для аналізу було обрано задачу прогину балки, яка є класичною проблемою механіки. Балка з шарнірним опертям на одному кінці (точка $x=0$ і закріпленням консольного типу на іншому кінці (точка $x=L$) перебуває під впливом лінійно змінного навантаження $q(x)$. Для заданих умов на $q(x)$, розв'язання рівняння $v(x)$ аналітично визначає прогин у будь-якій точці $x\in[0, L]$. Аналітичне рішення використано для генерації навчальних даних.

Дискретизація і параметризація задачі.

Балка була дискретизована на 100 рівномірних точок $x\in[0, L]$. Для моделювання функції навантаження $q(x)$ її крайні значення $q(0)$ та $q(L)$ були використані як параметри, що описують форму навантаження. Значення навантаження згенеровано випадковим чином з додатковою умовою, що $q(0)$ та $q(L)$ мають бути додатними, а також нормовані за площею під функцією навантаження. Згенеровано 10 000 прикладів навантажень із варіюванням значень $q(0)$ та $q(L)$ у рамках обмежень на площу під функцією навантаження на проміжку $x \in [0, L]$.

Архітектура моделей. Для прогнозування прогину балки $v(x)$ було запропоновано чотири архітектури нейронних мереж. Архитектури моделей представлені на рисунках 1-4.

– Базова повнозв’язна модель (Baseline Fully Connected Model, B-FC).

За архітектурою – це повнозв’язна нейронна мережа з двома вхідними параметрами ($q(0)$ і $q(L)$), прихованим шаром із 32 нейронами (активація ReLU) та вихідним шаром із 100 нейронів, що представляють прогин балки $v(x)$. Мережа генерує масив дійсних чисел довжини 100 – прогин балки $v(x)$ у 100 дискретних точках.

Функція втрат: середня абсолютна помилка (MAE) між прогнозами моделі та аналітичним розв’язком. Схема моделі представлена на рис. 1.

– Повнозв’язна модель із фізичною функцією втрат (Physics-Enhanced Fully Connected Model, PE-FC).

Архітектура мережі збігається з B-FC.

Функція втрат: середнє значення MAE для форми прогину та другої похідної ($v(x)$, $v''(x)$). Модель представлена на рис. 2.

– Повнозв’язна модель із розширеною фізичною функцією втрат (Advanced Physics-Enhanced Fully Connected Model, APE-FC).

Архітектура мережі ідентична до B-FC. Функція втрат: середнє значення MAE для всіх п’яти компонентів ($v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$, $v'''(x)$, $v''''(x)$). Модель представлена на рис. 3.

– Фізико-інформована багатоголова модель (Physics-Informed Multi-Head Model, PI-MH)

Ця модель архітектурно відрізняється від B-FC наявністю 5 вихідних шарів замість одного. Модель має вхідний повнозв’язний шар (2×32 нейрони, активація ReLU), вихід з якого подається паралельно на кожен з 5 шарів (32×100 нейрони). Кожен такий шар (голова) приймає вектор ознак розмірності 32, і видає вектор довжини 100 – для прогину і кожної похідної. Таким чином, мережа явно видає прогин балки $v(x)$ та його чотири похідні.

Функція втрат: середнє значення MAE для всіх п’яти компонентів ($v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$, $v'''(x)$, $v''''(x)$). Модель представлена на рис. 4.

Мета дослідження. Мета цього дослідження полягає в удосконаленні розуміння та застосування архітектур нейронних мереж, зокрема фізико-інформованих підходів, для розв’язання складних механічних задач, таких як прогин балки. Використовуючи чотири різні моделі, це дослідження оцінює їхню ефективність і обмеження у визначенні як профілю прогину, так і його похідних вищих порядків. Основна ціль – надати практичні висновки щодо шляхів та впливу інтеграції фізичних законів і чисельного диференціювання на підвищення точності, стійкості та інтерпретованості моделей машинного навчання для інженерних задач.

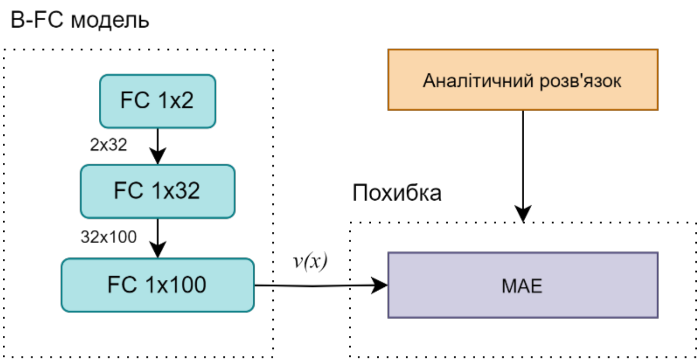

Рис. 1 – Архітектура базової повнозв’язної моделі B-FC.

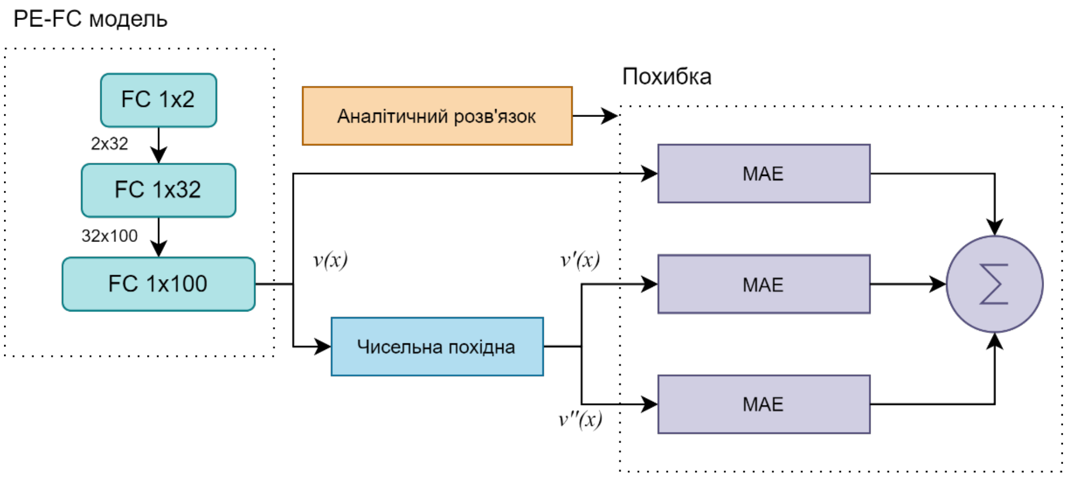

Рис. 2 – Архітектура повнозв’язної моделі з фізичною функцією втрат PE-FC.

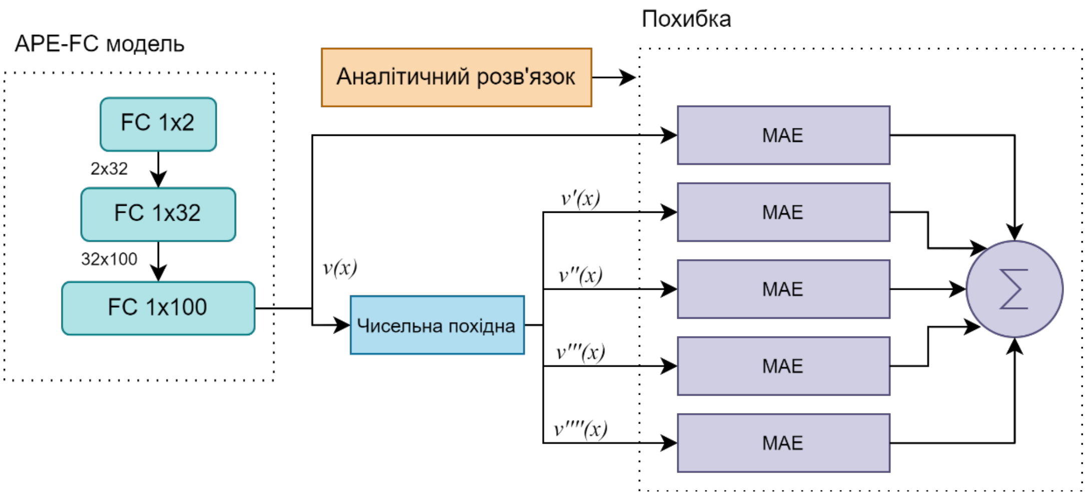

Рис.3 – Архітектура повнозв'язної моделі з розширеною фізичною функцією втрат APE-FC.

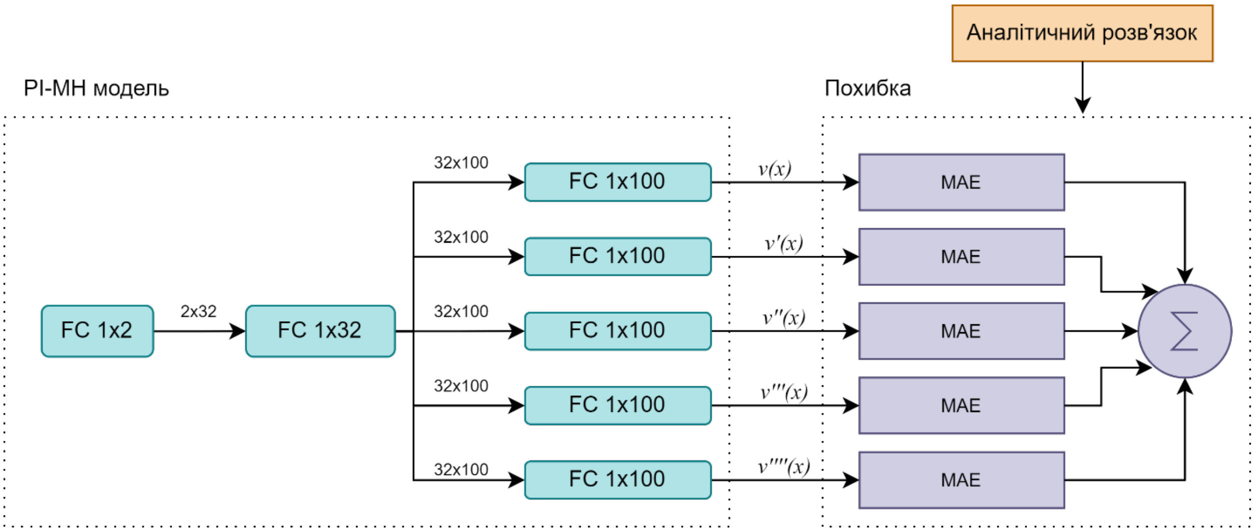

Рис. 4 – Архітектура фізико-інформованої багатоголової моделі PI-MH.

Теоретичні основи підходу

Диференціальні рівняння, що описують прогин балки.

Прогин балки, яка піддається лінійно змінному навантаженню, описується диференціальним рівнянням четвертого порядку:

Прогин балки описується диференціальним рівнянням вигляду (1):

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \tag{1}$$

де:

- $v(x)$ – прогин балки;
- E – модуль пружності матеріалу балки;
- I – момент інерції поперечного перерізу балки;
- $q(x)$ – інтенсивність навантаження.

Для балки, що має шарнірне опертя на одному кінці ($x = 0$) і консольне закріплення на іншому ($x = L$), використовуються такі граничні умови:

- $v(0) = 0$, $M(0) = 0$ (шарнірне опертя),
- $v(L) = v$, $\frac{dv(L)}{dx} = 0$ (консольне закріплення).

Для задачі використовується лінійно змінне навантаження q(x), яке описується функцією (2):

$$q(x) = q0 + \frac{q_L - q_0}{L} x \tag{2}$$

де q_0 та q_L – інтенсивності навантаження на лівому ($x = 0$) та правому ($x = L$) кінцях балки відповідно.

Аналітичне рішення рівняння для $v(x)v(x)v(x)$ у вигляді (3):

$$v(x) = \frac{1}{24EI}\left(-qx^4 + C_3x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0\right) \tag{3}$$

де константи C_0, C_1, C_2, C_3 визначаються з граничних умов.

Напруження у балці можна визначити через згинальний момент $M(x)$, який пов'язаний із другою похідною прогину (4):

$$M(x) = -EI\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \tag{4}$$

Таким чином, знаючи функцію $v(x)$, можна обчислити згинальний момент $M(x)$, а також напруження у перерізі балки за формулою (6):

$$\sigma(x) = M(x) \cdot \frac{y}{I} \quad (5)$$

де y – відстань від нейтральної осі.

Повнозв'язні нейронні мережі (Fully Connected Neural Networks, FC).

Повнозв'язні нейронні мережі є основним типом моделей машинного навчання, що використовуються для апроксимації функцій, таких як прогин балки $v(x)$. У цих мережах кожен нейрон поточного шару з'єднаний із кожним нейроном наступного шару.

Математична модель повнозв'язного шару.

Нехай вхідний вектор $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ подається на шар із m нейронів. Кожен нейрон обчислює свою вихідну активацію за формулою (6):

$$z_j = i = 1 \sum n \ \sum_{i=1}^{n} w_{ji} x_i + b_j \quad (6)$$

де:

- w_{ji} – вагові коефіцієнти, що зв'язують i-й вхід із j-м нейроном,
- b_j – зміщення (bias) j-го нейрона,
- z_j – зважена сума, що є вхідним сигналом для активаційної функції.

Результат кожного нейрона передається через активаційну функцію $f(z)$, що створює його вихідний сигнал (7):

$$a_j = f(z_j) \quad (7)$$

В даному дослідженні була використана активаційна функція ReLU (Rectified Linear Unit) (8):

$$f(z) = max(0, z) \quad (8)$$

Функція втрат

Для навчання мережі використовувалася функція втрат на основі середньої абсолютної похибки (Mean Absolute Error, MAE) (9):

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |y_i - \widehat{y_i}| \quad (9)$$

де:

- y_i – істинне значення (аналітичне рішення),
- $\widehat{y_i}$ – прогнозоване значення,
- N – кількість прикладів.

Метрика оцінки якості

Для аналізу якості роботи моделі на тестових даних додатково була використана симетрична середня абсолютна відсоткова похибка (Symmetric Mean Absolute Percentage Error, SMAPE) (10):

$$SMAPE = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{|y_i - \widehat{y_i}|}{(|y_i| + |\widehat{y_i}|)} \quad (10)$$

де:

- y_i – істинне значення (аналітичне рішення),
- $\widehat{y_i}$ – прогнозоване значення,
- N – кількість прикладів.

Зворотне розповсюдження похибки

Навчання FC-мережі базується на алгоритмі зворотного розповсюдження похибки (Backpropagation), який включає:

1. Прямий прохід (Forward Pass): обчислення виходу мережі для заданого вхідного вектора x.
2. Обчислення похибки: визначення значення функції втрат L.
3. Зворотний прохід (Backward Pass): обчислення градієнтів функції втрат за вагами $\frac{\partial L}{\partial w_{ij}}$ і зміщеннями $\frac{\partial L}{\partial b_j}$ за допомогою правила ланцюга.
4. Оновлення параметрів: використання градієнтного спуску для оновлення ваг і зміщень (11):

$$w_{ji}^{t+1} = w_{ji}^{t} - \eta \frac{\partial L}{\partial w_{ij}}$$

$$b_j^{t+1} = b_j^{t} - \eta \frac{\partial L}{\partial w_j} \quad (11)$$

де η – коефіцієнт навчання (learning rate). В рамках даної роботи було використано затухаючий коефіцієнт навчання – зменшення коефіцієнту постійний множник (0; 1) при досягненні сталого плато функції втрат в оптимізаційному просторі параметрів моделі.

Фізико-інформовані нейронні мережі (Physics-Informed Neural Networks, PINNs)

Фізико-інформовані нейронні мережі (PINNs) розширюють класичні підходи машинного навчання, інтегруючи фізичні закони у функцію втрат. Це дозволяє не лише зменшити залежність від великих наборів даних, але й забезпечити відповідність прогнозів фізичним принципам, які описують реальну систему.

Інтеграція фізичних законів у функцію втрат

У класичній нейронній мережі функція втрат зазвичай базується на різниці між прогнозованими значеннями та аналітичним розв'язком (наприклад, MAE). У PINNs функція втрат модифікується шляхом додавання фізичних компонентів, які забезпечують виконання диференціальних рівнянь.

Для задачі прогину балки, функція втрат має вигляд (12):

$$Q = Q_{supervised} + Q_{physics} \quad (12)$$

де:

- $Q_{supervised}$ – компонент для відповідності даним, визначається як MAE між аналітичними та прогнозованими значеннями $v(x)$,
- $Q_{physics}$ – фізичний компонент, що забезпечує виконання рівняння прогину балки (13):

$$Q_{physics} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{d^4 v(x_i)}{dx^4} - \frac{q(x_i)}{EI} \right| \quad (13)$$

де N – кількість дискретних точок для обчислення похідних.

У PINNs обчислення похідних здійснюється через автоматичне диференціювання (autograd), вбудоване в сучасні фреймворки машинного навчання. Це дозволяє точно визначати похідні будь-якого порядку для вихідних сигналів нейронної мережі.

У нашій задачі функція втрат включає похідні до четвертого порядку (14), де $\alpha_1,\ldots,\alpha_2$ – вагові коефіцієнти для кожної похідної.

Результати дослідження:

$$Q_{derivatives} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(|v(x_i) - \hat{v}(x_i)| + \alpha_1\left|\frac{d\hat{v}(x_i)}{dx} - v'(x_i)\right| + \alpha_2\left|\frac{d^2\hat{v}(x_i)}{dx^2} - v''(x_i)\right| + \alpha_3\left|\frac{d^3\hat{v}(x_i)}{dx^3} - v'''(x_i)\right| + \alpha_4\left|\frac{d^4\hat{v}(x_i)}{dx^4} - v''''(x_i)\right|\right) \tag{14}$$

*Таблиця точності моделей***.** Нижче наведено Таблицю 1 з результатами точності прогнозів прогину та його похідних ($v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$, $v'''(x)$, $v''''(x)$) для всіх моделей. Таблиця містить середню абсолютну помилку (MAE) і середню абсолютну відсоткову помилку (MAPE) для кожного компонента. Результати заміряні на відкладеній вибірці.

Графіки прогинів балки. На рисунках 5-16 представлені графіки прогинів та його похідних ($v(x)$, $v'(x)$, $v''(x)$, $v'''(x)$, $v''''(x)$) для всіх моделей. Ці графіки демонструють відповідність прогнозів моделей аналітичним рішенням. Оскільки навантаження було нормоване, воно визначається відношенням $q(0)$ до $q(L)$. Для прикладного розрахунку форми прогину та похідних можуть бути масштабовані відповідно до прикладених навантажень. Результати приведені для співвідношень $q(L) : q(0) = 1:1$ та 3:1.

Таблиця 1 – Точності моделей.

Модель	Прогин		Перша похідна		Друга похідна		Третя похідна		Четверта похідна	
	MAE, м	SMAPE	MAE	MAPE	MAE	SMAPE	MAE	SMAPE	MAE	SMAPE
Одиниці	м	%	-	%	$м^{-1}$	%	$м^{-2}$	%	$м^{-3}$	%
B-FC	6.10e-03	7.01%	4.14e-02	13.92%	3.50e-01	108.52%	3.22e+00	184.91%	3.05e+01	197.55%
PE-FC	1.13e-02	5.53%	8.66e-03	4.24%	5.93e-03	4.15%	2.65e-02	41.78%	2.40e-01	153.90%
APE-FC	2.23e-02	5.67%	1.66e-02	7.85%	2.20e-02	13.11%	7.38e-02	68.35%	2.36e-01	108.06%
PI-MH	**1.65e-03**	**4.00%**	**5.55e-07**	**0.00%**	**3.47e-06**	**0.00%**	**3.14e-05**	**0.17%**	**2.98e-04**	**0.54%**

Таблиця 1 – Точності моделей.

Модель	CPU	Час розрахунку
Одиниці	%	мс
B-FC	14.3	0.072
PE-FC	14.3	0.072
APE-FC	14.3	0.072
PI-MH	14.3	0.072
Ansys Mechanical APDL	19.8	43.28

Висновки. Дослідження показало, що інтеграція фізичних законів у функцію втрат нейронної мережі значно підвищує точність прогнозування прогину балки порівняно зі звичайними повнозв'язними моделями. Це підтверджено зниженням середньої абсолютної похибки (MAE) та відсоткових похибок (SMAPE) для моделей, що враховують фізичні компоненти.

Найкращі результати показала фізико-інформована багатоголова модель (PI-MH), яка забезпечила мінімальні значення похибок для всіх компонентів (прогину та його похідних). Модель APE-FC, яка враховує всі похідні до четвертого порядку, продемонструвала покращення порівняно з базовою моделлю (B-FC), однак поступилася PE-FC за точністю в похідних вищого порядку.

Функції втрат, що включають фізичні рівняння прогину балки, дозволяють моделі краще узгоджуватися з аналітичними розв'язками навіть при невеликому обсязі навчальних даних. Це вказує на перспективність використання PINNs для задач механіки.

Аналіз швидкості роботи двох підходів показав суттєву перевагу нейронної мережі у продуктивності. Як видно з Таблиці 2, обчислення в ANSYS займає більше 43 мс із навантаженням 19% на CPU, у той час як нейронна мережа (PI-MH) виконує той самий розрахунок лише за 0.079 мс при 14% використанні CPU. Для *-FC моделей це значення становить 0.42, але зважаючи на точність, більш коректно буде порівнювати саме з PI-MH. Таким чином, езультати показують, що підхід на основі нейромереж є приблизно 544 рази швидшим, ніж традиційний метод скінченних елементів. Основна причина цього полягає в різній природі обчислень: ANSYS вирішує систему рівнянь для всієї сітки елементів, тоді як нейромережа після навчання виконує лише одне проходження через свою архітектуру. Також, FEM має значні накладні витрати на ініціалізацію і підготовку розрахунку, що впливає на його швидкість для відносно простих задач. У випадках, де потрібні миттєві обчислення, такі як реального часу контроль деформацій або оптимізація параметрів конструкції, PINN значно перевершує традиційні чисельні методи. Але питання аналізу швидкості подібних методів є окремою комплексною задачею, адже оптимізація алгоритмів під конкретні пристрої та початкові дані критично впливає на швидкодію, проте подібна оптимізація виходить за рамки цього дослідження. Для аналізу швидкодії був використаний процесор Intel Core i7-12700H, дані взяті як середній час роботи CPU (без урахування WALL time) за 1000 ітерацій розрахунків з наперед заданим навантаженням.

Фінансування

Робота виконана за підтримки Міністерства освіти і науки України в рамках реалізації науково-дослідного проекту «Алгоритми, моделі та засоби штучного інтелекту для дворівневого моделювання поведінки складних матеріалів для технологій подвійного використання» (Державний реєстраційний номер 0124U000450).

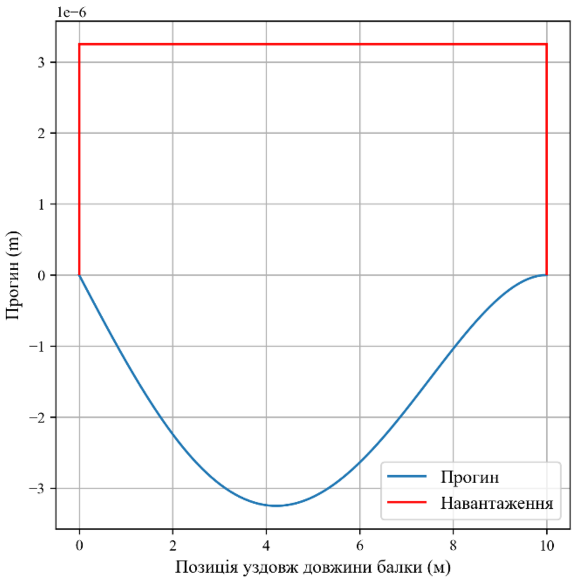

Рис. 5 – Навантаження і аналітичний розв. 1:1 (0.0)

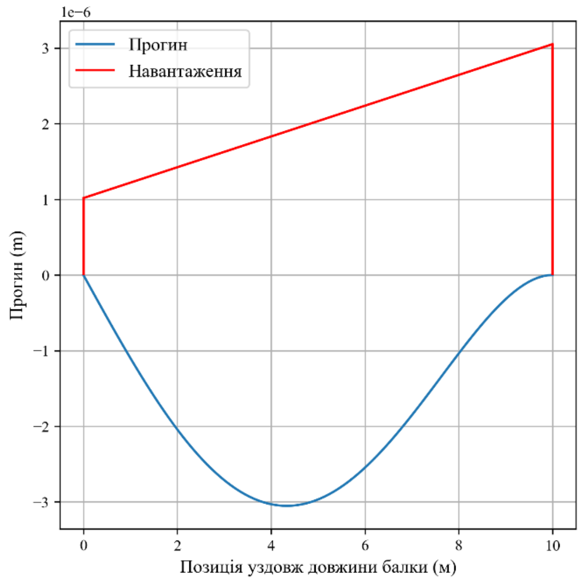

Рис. 6 – Навантаження і аналітичний розв. 3:1 (0.0)

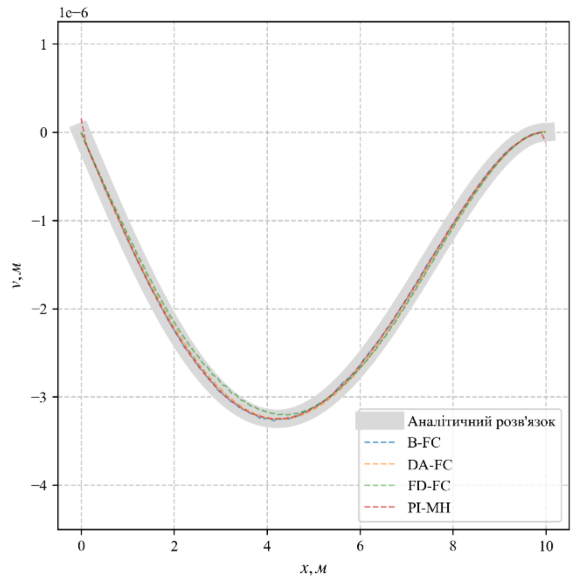

Рис. 7 – Прогин 1:1 (0.0)

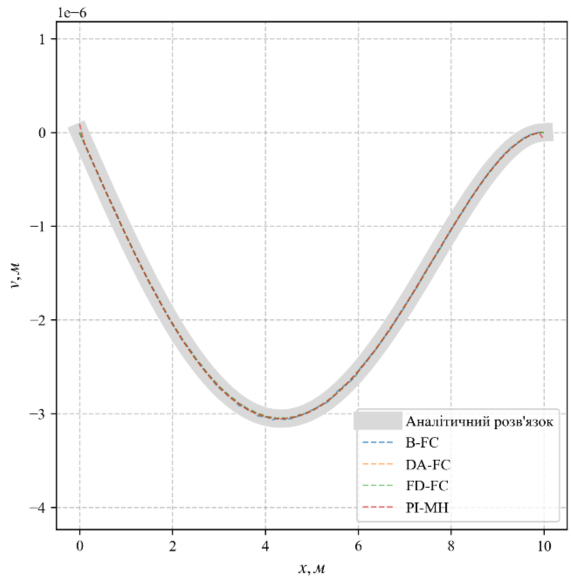

Рис. 8 – Прогин 3:1 (0.5)

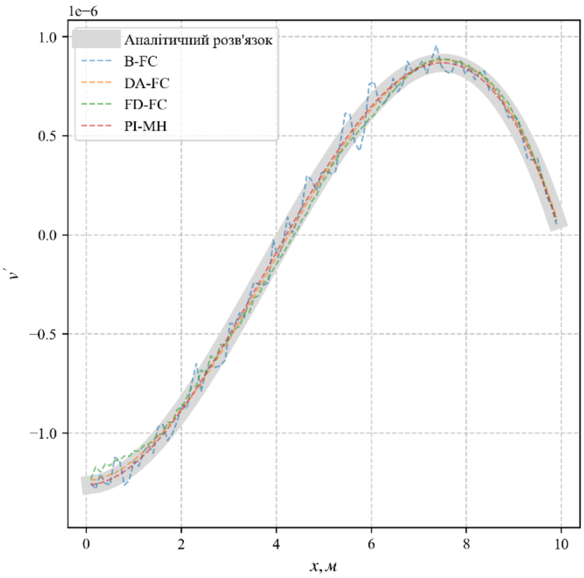

Рис. 9 – Перша похідна 1:1 (0.0)

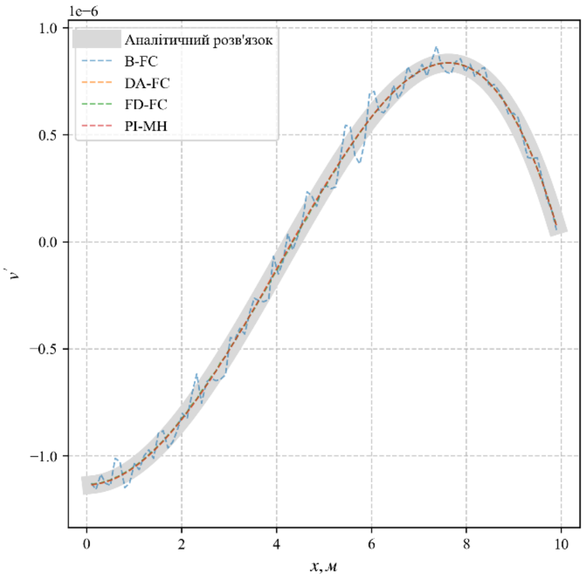

Рис. 10 – Перша похідна 3:1 (0.5)

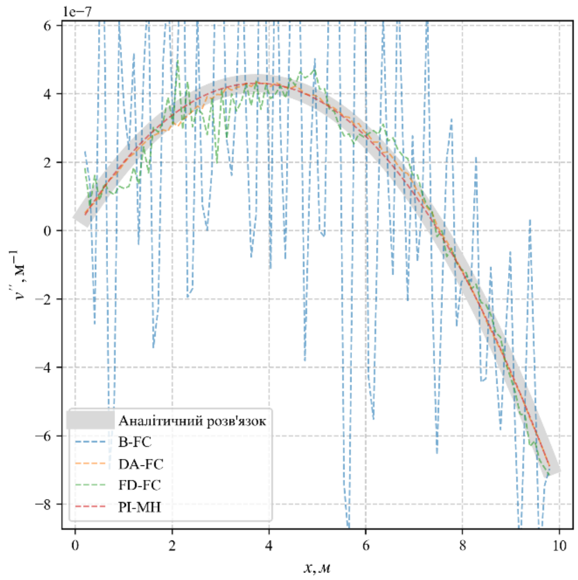

Рис. 11 – Друга похідна 1:1 (0.0)

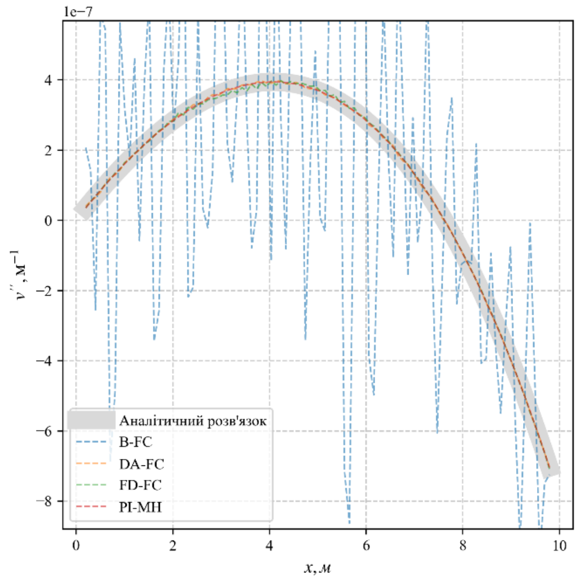

Рис. 12 – Друга похідна 3:1 (0.5)

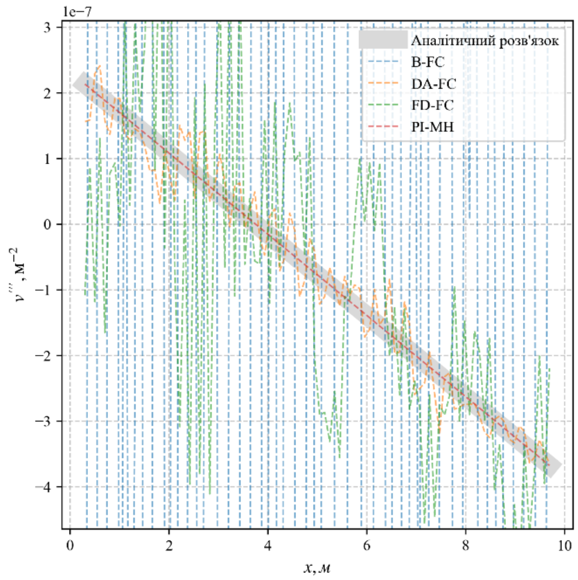

Рис. 13 – Третя похідна 1:1 (0.0)

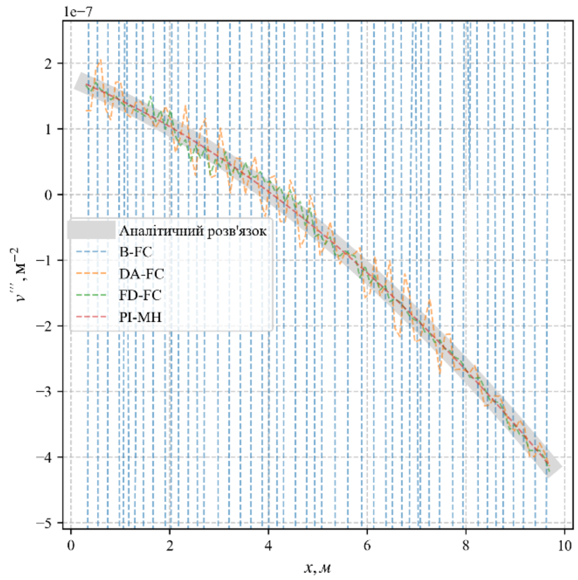

Рис. 14 – Третя похідна 3:1 (0.5)

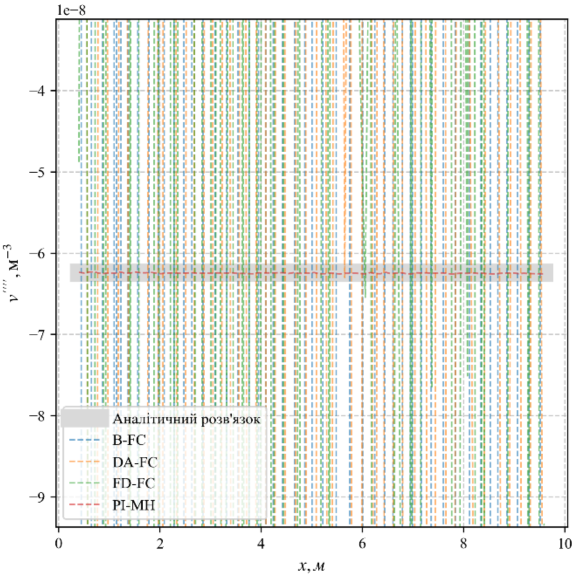

Рис. 15 – Четверта похідна 1:1 (0.0)

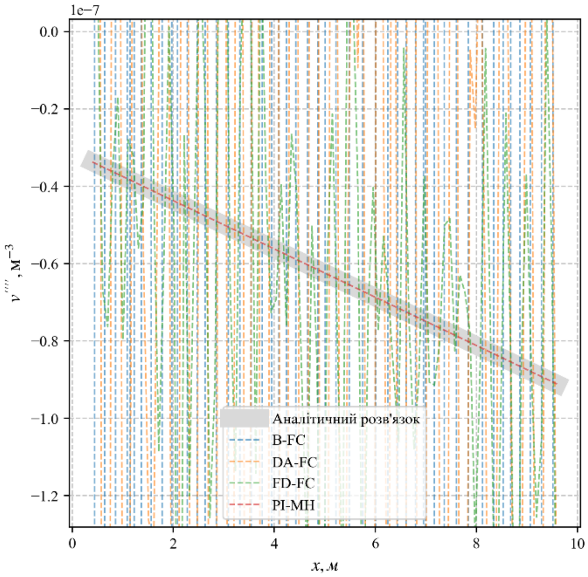

Рис. 16 – Четверта похідна 3:1 (0.5)

Список літератури

1. Chen Y., Xiao H., Teng X., Liu W., Lan L. Enhancing accuracy of physically informed neural networks for nonlinear Schrödinger equations through multi-view transfer learning. Information Fusion, 2024. Vol. 102, pp. 102041. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2023.102041
2. Ferrante M., Inglese M., Brusaferri L., Whitehead A., Maccioni L., Turkheimer E., Nettis M., Mondelli V., Howes O., Loggia M., Veronese M., Toschi N. Physically informed deep neural networks for metabolite-corrected plasma input function estimation in dynamic PET imaging. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 2024. Vol. 256, pp. 108375. https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2024.108375
3. Dehghan-Shoar M., Kereszturi G., Pullanagari R., Orsi A., Yule I., Hanly J. A physically informed multi-scale deep neural network for estimating foliar nitrogen concentration in vegetation. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2024. Vol. 130, pp. 103917. https://doi.org/10.1016/j.jag.2024.103917
4. Dahal A., Lombardo L. Towards physics-informed neural networks for landslide prediction. Engineering Geology, 2025. Vol. 344, pp. 107852. https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2024.107852
5. Teloli R., Tittarelli R., Bigot M., Coelho L., Ramasso E., Moal P., Ouisse M. A physics-informed neural networks framework for model parameter identification of beam-like structures. Mechanical Systems and Signal Processing, 2025. Vol. 224, pp. 112189. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.112189
6. Velioglu M., Zhai S., Rupprecht S., Mitsos A., Jupke A., Dahme M. Physics-informed neural networks for dynamic process operations with limited physical knowledge and data. Computers & Chemical Engineering, 2025. Vol. 192, pp. 108899. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2024.108899
7. Jiang J., Wu J., Chen Q., Chatzigeorgiou G., Meraghni F. Physically informed deep homogenization neural network for unidirectional multiphase/multi-inclusion thermoconductive composites. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023. Vol. 409, pp. 115972. https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.115972
8. Sha P., Zheng C., Wu X., Shen J. Physics informed integral neural network for dynamic modelling of solvent-based post-combustion CO2 capture process. Applied Energy, 2025. Vol. 377, Part A, pp. 124344. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2024.124344
9. Liu Y., Liao S., Yang Y., Zhang B. Data-driven and physics-informed neural network for predicting tunnelling-induced ground deformation with sparse data of field measurement. Tunnelling and Underground Space Technology, 2024. Vol. 152, pp. 105951. https://doi.org/10.1016/j.tust.2024.105951
10. Cooper C., Zhang J., Gao R. Error homogenization in physics-informed neural networks for modeling in manufacturing. Journal of Manufacturing Systems, 2023. Vol. 71, pp. 298-308. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2023.09.013
11. Hu S., Liu M., Zhang S., Dong S., Zheng R. Physics-informed neural network combined with characteristic-based split for solving forward and inverse problems involving Navier–Stokes equations. Neurocomputing, 2024. Vol. 573, pp. 127240. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2024.127240
12. Han J.-X., Xue L., Wei Y.-S., Qi Y.-D., Wang J.-L., Liu Y.-T., Zhang Y.-Q. Physics-informed neural network-based petroleum reservoir simulation with sparse data using domain decomposition. Petroleum Science, 2023. Vol. 20, No. 6, pp. 3450-3460. https://doi.org/10.1016/j.petsci.2023.10.019
13. Hanna J., Aguado J., Comas-Cardona S., Askri R., Borzacchiello D. Sensitivity analysis using Physics-informed neural networks. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2024. Vol. 135, pp. 108764. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.108764
14. Natale L. D., Svetozarevic B., Heer P., Jones C. N. Physically Consistent Neural Networks for building thermal modeling: Theory and analysis. Applied Energy, 2022. Vol. 325, pp. 119806. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119806
15. Peng J.-Z., Aubry N., Li Y.-B., Mei M., Chen Z.-H., Wu W.-T. Physics-informed graph convolutional neural network for modeling geometry-adaptive steady-state natural convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2023. Vol. 216, pp. 124593. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124593
16. Stiasny J., Chatzivasileiadis S. Physics-informed neural networks for time-domain simulations: Accuracy, computational cost, and flexibility. Electric Power Systems Research, 2023. Vol. 224, pp. 109748. https://doi.org/10.1016/j.epsr.2023.109748
17. Nawa K., Hagiwara K., Nakamura K. Prediction-accuracy improvement of neural network to ferromagnetic multilayers by Gaussian data augmentation and ensemble learning. Computational Materials Science, 2023. Vol. 219, pp. 112032. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2023.112032
18. Bolderman M., Lazar M., Butler H. A MATLAB toolbox for training and implementing physics–guided neural network–based feedforward controllers. IFAC-PapersOnLine, 2023. Vol. 56, No. 2, pp. 4068-4073. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1732
19. Wang C., Guo H., Yan X., Shi Z.-L., Yang Y. Improved physics-informed neural networks for the reinterpreted discrete fracture model. Journal of Computational Physics, 2025. Vol. 520, pp. 113491. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113491
20. Ballard N., Larrañaga J., Farajzadehahary K., Asua J. Polymer chemistry informed neural networks (PCINNs) for data-driven modelling of polymerization processes. Polymer Chemistry, 2024. Vol. 15, No. 44, pp. 4580-4590. https://doi.org/10.1039/d4py00995a

References (transliterated)

1. Chen Y., Xiao H., Teng X., Liu W., Lan L. Enhancing accuracy of physically informed neural networks for nonlinear Schrödinger

equations through multi-view transfer learning. Information Fusion, 2024. Vol. 102, pp. 102041. https://doi.org/10.1016/j.inffus.2023.102041
2. Ferrante M., Inglese M., Brusaferri L., Whitehead A., Maccioni L., Turkheimer E., Nettis M., Mondelli V., Howes O., Loggia M., Veronese M., Toschi N. Physically informed deep neural networks for metabolite-corrected plasma input function estimation in dynamic PET imaging. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 2024. Vol. 256, pp. 108375. https://doi.org/10.1016/j.cmpb.2024.108375
3. Dehghan-Shoar M., Kereszturi G., Pullanagari R., Orsi A., Yule I., Hanly J. A physically informed multi-scale deep neural network for estimating foliar nitrogen concentration in vegetation. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2024. Vol. 130, pp. 103917. https://doi.org/10.1016/j.jag.2024.103917
4. Dahal A., Lombardo L. Towards physics-informed neural networks for landslide prediction. Engineering Geology, 2025. Vol. 344, pp. 107852. https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2024.107852
5. Teloli R., Tittarelli R., Bigot M., Coelho L., Ramasso E., Moal P., Ouisse M. A physics-informed neural networks framework for model parameter identification of beam-like structures. Mechanical Systems and Signal Processing, 2025. Vol. 224, pp. 112189. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.112189
6. Velioglu M., Zhai S., Rupprecht S., Mitsos A., Jupke A., Dahmen M. Physics-informed neural networks for dynamic process operations with limited physical knowledge and data. Computers & Chemical Engineering, 2025. Vol. 192, pp. 108899. https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2024.108899
7. Jiang J., Wu J., Chen Q., Chatzigeorgiou G., Meraghni F. Physically informed deep homogenization neural network for unidirectional multiphase/multi-inclusion thermoconductive composites. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023. Vol. 409, pp. 115972. https://doi.org/10.1016/j.cma.2023.115972
8. Sh P., Zheng C., Wu X., Shen J. Physics informed integral neural network for dynamic modelling of solvent-based post-combustion CO2 capture process. Applied Energy, 2025. Vol. 377, Part A, pp. 124344. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2024.124344
9. Liu Y., Liao S., Yang Y., Zhang B. Data-driven and physics-informed neural network for predicting tunnelling-induced ground deformation with sparse data of field measurement. Tunnelling and Underground Space Technology, 2024. Vol. 152, pp. 105951. https://doi.org/10.1016/j.tust.2024.105951
10. Cooper C., Zhang J., Gao R. Error homogenization in physics-informed neural networks for modeling in manufacturing. Journal of Manufacturing Systems, 2023. Vol. 71, pp. 298-308. https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2023.09.013
11. Hu S., Liu M., Zhang S., Dong S., Zheng R. Physics-informed neural network combined with characteristic-based split for solving forward and inverse problems involving Navier–Stokes equations. Neurocomputing, 2024. Vol. 573, pp. 127240. https://doi.org/10.1016/j.neucom.2024.127240
12. Han J.-X., Xue L., Wei Y.-S., Qi Y.-D., Wang J.-L., Liu Y.-T., Zhang Y.-Q. Physics-informed neural network-based petroleum reservoir simulation with sparse data using domain decomposition. Petroleum Science, 2023. Vol. 20, No. 6, pp. 3450-3460. https://doi.org/10.1016/j.petsci.2023.10.019
13. Hanna J., Aguado J., Comas-Cardona S., Askri R., Borzacchiello D. Sensitivity analysis using Physics-informed neural networks. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2024. Vol. 135, pp. 108764. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.108764
14. Natale L. D., Svetozarevic B., Heer P., Jones C. N. Physically Consistent Neural Networks for building thermal modeling: Theory and analysis. Applied Energy, 2022. Vol. 325, pp. 119806. https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2022.119806
15. Peng J.-Z., Aubry N., Li Y.-B., Mei M., Chen Z.-H., Wu W.-T. Physics-informed graph convolutional neural network for modeling geometry-adaptive steady-state natural convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2023. Vol. 216, pp. 124593. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2023.124593
16. Stiasny J., Chatzivasileiadis S. Physics-informed neural networks for time-domain simulations: Accuracy, computational cost, and flexibility. Electric Power Systems Research, 2023. Vol. 224, pp. 109748. https://doi.org/10.1016/j.epsr.2023.109748
17. Nawa K., Hagiwara K., Nakamura K. Prediction-accuracy improvement of neural network to ferromagnetic multilayers by Gaussian data augmentation and ensemble learning. Computational Materials Science, 2023. Vol. 219, pp. 12032. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2023.112032
18. Bolderman M., Lazar M., Butler H. A MATLAB toolbox for training and implementing physics–guided neural network–based feedforward controllers. IFAC-PapersOnLine, 2023. Vol. 56, No. 2, pp. 4068-4073. https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1732
19. Wang C., Guo H., Yan X., Shi Z.-L., Yang Y. Improved physics-informed neural networks for the reinterpreted discrete fracture model. Journal of Computational Physics, 2025. Vol. 520, pp. 113491. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2024.113491
20. Ballard N., Larrañaga J., Farajzadehahary K., Asua J. Polymer chemistry informed neural networks (PCINNs) for data-driven modelling of polymerization processes. Polymer Chemistry, 2024. Vol. 15, No. 44, pp. 4580-4590. https://doi.org/10.1039/d4py00995a

Надійшла (received) 05.12.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Бабуджан Руслан Андрійович (Babudzhan Ruslan) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.:(057)707-68-79; ORCID: https://orcid.org/0000–0001–5765–9234; e-mail: Ruslan.Babudzhan@infiz.khpi.edu.ua

Шаповалова Марія Ігорівна (Shapovalova Mariia) – доктор філософії з прикладної математики, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4771-7485; e-mail: MiShapovalova@gmail.com, mariia.shapovalova@khpi.edu.ua

Водка Олексій Олександрович (***Vodka Oleksii***) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», завідувач кафедри Математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4462-9869; e-mail: oleksii.vodka@gmail.com