УДК 519.81 **DOI: 10.20998/2078-9130.2024.2.316453**

М. В. НЕКРАСОВА

ЗАСТОСУВАННЯ БАГАТОІНДИКАТОРНОЇ ОЦІНКИ ЯКОСТІ ПАРЕТО-АПРОКСИМАЦІЇ ПРИ ПРИЙНЯТТІ МУЛЬТИКРИТЕРІАЛЬНИХ РІШЕНЬ

Підтримка прийняття багатокритеріальних рішень на основі багатоіндикаторної оцінки якості Парето-апроксимації є важливою задачею у галузі оптимізації такого типу. Подібна оцінка дозволяє приймати більш обґрунтовані та точні рішення, використовуючи інформацію про декілька показників, що визначають якість рішень. Парето-апроксимація - це наближений набір рішень, який прагне якнайточніше описати реальний Парето-фронт. При цьому слід адекватно оцінювати, наскільки добре знайдені рішення покривають або апроксимують реальний Парето-фронт. З великої кількості відомих алгоритмів розв'язання цієї задачі можна назвати саме алгоритми, засновані на попередній побудові апроксимації її фронту (множини) Парето і звані П-алгоритмами. П-алгоритми можуть бути побудовані на основі еволюційних і, насамперед, на основі генетичних алгоритмів, а також на основі роєвих алгоритмів глобальної оптимізації, таких як алгоритми рою частинок, колонії мурах, медоносних бджіл і т.д. Зважаючи на наявність великої кількості П-алгоритмів виникає проблема вибору «найкращого» (оптимального за обраними індикаторами) алгоритму для даної багатокритеріальної задачі оптимізації (БКО-задачі) - проблема метаоптимізації. У зв'язку з цим розроблено значну кількість індикаторів ефективності П-алгоритмів (П- індикаторів), які засновані насамперед на оцінці якості отриманої апроксимації фронту (множини) Парето (П-апроксимації). Така оцінка дозволяє отримати більш точні та обґрунтовані рішення у складних задачах оптимізації. Використання кількох індикаторів дозволяє враховувати різні аспекти якості апроксимації, а автоматизовані інструменти аналізу та візуалізації допомагають краще розуміти компроміси між критеріями. Таким чином, задача оцінки якості П-алгоритму сама стає багатокритеріальною, а точніше кажучи, багатоіндикаторною.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, множина Парето, індикатори якості, Парето апроксимація, найкращий алгоритм, прийняття рішень, багатокритеріальна оцінка.

Supporting multi-criteria decision-making based on multi-indicator assessment of Pareto approximation quality is an important task in the field of optimization of this type. Such an assessment enables more informed and accurate decision-making by utilizing information from multiple indicators that determine the quality of solutions. Pareto approximation is an approximate set of solutions that aims to closely represent the actual Pareto front. It is crucial to adequately evaluate how well the obtained solutions cover or approximate the real Pareto front. Among the many known algorithms for solving this problem, those based on the preliminary construction of an approximation of the Pareto front (set), known as P-algorithms, stand out. P-algorithms can be built using evolutionary algorithms—primarily genetic algorithms—as well as swarm-based global optimization algorithms, such as particle swarm optimization, ant colony optimization, artificial bee colony algorithms, and others. Given the large number of available P-algorithms, the problem of selecting the "best" (optimal according to chosen indicators) algorithm for a given multi-criteria optimization problem (MOP) arises—this is the problem of meta-optimization. In response, a significant number of P-algorithm efficiency indicators (P-indicators) have been developed, primarily based on assessing the quality of the obtained Pareto front approximation (P-approximation). Such an evaluation allows for more accurate and well-founded decision-making in complex optimization tasks. Using multiple indicators enables consideration of various aspects of approximation quality, while automated analysis and visualization tools help better understand trade-offs between criteria. Consequently, the task of evaluating the quality of a P-algorithm itself becomes a multi-criteria, or more precisely, a multi-indicator problem.

Keywords: multi-criteria optimization, Pareto set, quality indicators, Pareto approximation, best algorithm, decision making, multi-criteria evaluation

Вступ. Розглянемо задачу багатокритеріальної оптимізації. Існує велика кількість алгоритмів розв’язання цієї задачі, зокрема заснованих на Парето-апроксимації [1,2, 10-12].

І в процесі її вирішення слід розглянути два вкладені класи задач багатокритеріального прийняття рішень:

- задача А – вибір серед наявних П-алгоритмів, що є «найкращими» для даної БКО-задачі;
- задача В – вибір рішення вихідної БКО-задачі, що входять до складу П-апроксимації, побудованої за допомогою обраного П-алгоритму.

Відома велика кількість підходів до вирішення задачі багатокритеріального прийняття рішень. Для вирішення задач А і В можна використовувати детермінований підхід на основі виявлення функції переваг особи, що приймає рішення (ОПР) [3]. Статистичні алгоритми порівняння П-алгоритмів, засновані на використанні рангових статистичних критеріїв Манна-Уітні та Крускала-Уолліса, розглянуті, наприклад, у [4].

Постановка базової БКО-задачі та індикатори якості П-апроксимації, що використовуються. Якщо X - це вектор, то нехай запис виду $|X|$ означає розмірність цього вектору. Аналогічно запис $|\Omega|$ означає потужність лічильної множини Ω .

Вважаємо, що критеріальна вектор-функція $F(X)=(f_1(X), f_2(X),..., f_{|F|}(X))$ зі значеннями в $|F|$ -мірному просторі критеріїв $\{F\}=R^{|F|}$ визначена в обмеженій і замкнутій множині

$$D_X=\{X|G(X)\geq 0\}\subset\{X\}=R^{|F|}$$

простору параметрів, що варіюються $\{X\}$, де $G(X)=(g_1(X), g_2(X),\dots)$ - обмежувальна вектор-функція; нерівність $G(X)\geq 0$ розуміється покомпонентно. ОПР прагне мінімізувати в області D_X кожен з приватних критеріїв оптимальності $f_1(X), f_2(X),..., f_{|F|}(X)$, що умовно можна записати у вигляді

$$\min_{X\in D_X} F(X) = F(X^*) = F^* \qquad (1)$$

де вектори X^*, F^* - шукане рішення задачі БКО.

Фронт Парето задачі (1) позначимо $D_F^* \subset D_F$, а відповідну множину Парето $D_X^* \in D_X$. Тут D_F - множина досяжності задачі (1). Множину рішень задачі (1), недомінуючих у просторі $\{F\}$, позначимо Θ_X, а відповідну множину значень критеріальної вектор-функції - Θ_F. Таким чином, множини Θ_X, Θ_F представляють собою дискретні апроксимації множин D_X, D_F відповідно, тобто, П-апроксимації.

Для побудови множин Θ_X, Θ_F використовуються широко відомі П-алгоритми [9, 13-15].

Введемо наступні позначення:

$$\mathbf{A} = \{A_i\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{/A/}\}, \ \mathbf{I} = \{I_i\} = \{I_1, I_2, \ldots, I_{/I/}\}$$

- набори П-алгоритмів і індикаторів їх якості, що використовуються ОПР при рішенні даної БКО-задачі, відповідно. Найкращими вважаємо найменші значення всіх індикаторів, що розглядаються. Множину допустимих значень індикаторів **I** позначимо D_I .

Метод вибору найкращого (оптимального за обраними індикаторами) П-алгоритму на основі багатоіндикаторної оцінки якості П-апроксимації. Пропонується три методи вибору «найкращого» П-алгоритму:

- метод, заснований на використанні того чи іншого способу візуалізації багатоіндикаторних оцінок якості П-апроксимації;
- метод на основі скалярної згортки обраних ОПР індикаторів якості П-апроксимації;
- автоматизований метод, що передбачає попередню апроксимацію функції переваг ОПР.

Розглянемо ці методи докладніше.

1) Метод на основі візуалізації багатоіндикаторних оцінок якості П-апроксимації. Для візуалізації індикаторів оцінки якості П-апроксимації може бути використана велика кількість методів візуалізації П-апроксимації. Зокрема доречно використовувати модифікований метод HSDC (Hyperspace diagonal counting) [5,7,8].

2) Метод скалярної згортки індикаторів якості П-апроксимації включає наступні основні кроки:

а) ОПР обирає алгоритми П-апроксимації $\mathbf{A} = \{A_i\}$ і індикатори якості П-апроксимації

$$\mathbf{I} = \{I_j\};\ i \in [1{:}|A|];\ j \in [1{:}|I|].$$

б) для даної БКО-задачі за допомогою алгоритмів $A_1, A_2, \ldots, A_{/A/}$ будуються П-апроксимації $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{/A/}$ відповідно.

в) для кожної з П-апроксимацій Θ_i обчислюються значення індикаторів якості П-апроксимації $\mathbf{I_i} = \{I_{i,j}\};\ i \in [1{:}|A|];\ j \in [1{:}|I|]$.

г) з числа існуючих скалярних згорток ОПР обирає, наприклад, адитивну згортку виду

$$C(A) = \sum_{j=1}^{|I|} \mu_j I_j(A),$$

де μ_j - «вага» індикатора I_j .

д) обчислюються значення згорток $C(A_i)=C(I_{i,1}, I_{i,2}, \ldots, I_{i,|I|}),\ i \in [1{:}|A|$.

е) в якості «найкращого» алгоритму A^* пропонується алгоритм, що доставляє мінімальне значення згортці $C(A_i)$:

$$\min_i C(A_i) = C(A^*),\ i \in [1{:}|A|].$$

3) Метод PREF-**I** на основі апроксимації функції переваг ОПР. Пропонований метод вибору «найкращого» П-алгоритму заснований на запропонованому в роботі [3] інтерактивному методі PREF рішення БКО-задачі (1). Метод PREF використовує припущення, що на множині D_X існує (невідома) функція переваг $\psi(X)$, яка відображає цю множину у множину дійсних значень, тобто ψ: $X \rightarrow R^1$. Модуль, що реалізує метод PREF, перетворює введені ОПР значення лінгвістичної змінної $\psi(X)$, в дійсні числа, що належать діапазону [1..9]. В результаті рішення БКО-задачі (1) зводиться до задачі пошуку вектора X, що максимізує функцію переваг ОПР:

$$\max_{X \in D_X} \psi(X) = \psi(X^*) = \psi^*$$

Метод PREF-**I** заснований на припущенні, що апріорі є невідомою функція переваг ОПР $\psi(\mathbf{I})$, але вона визначена на множині D_I і відображує цю множину у множину дійсних значень, тобто $\psi(\mathbf{I})$: $\mathbf{I} \rightarrow R^1$.

Введемо наступні позначення:

$$\mathbf{T} = \{T_k\} = \{T_1, T_2, \ldots, T_{/T/}\}$$

- набір БКО-задач (1), що вирішені цим користувачем; $\psi(\mathbf{I})$ - функція переваг цієї ОПР на множині значень індикаторів якості П-алгоритмів.

Розглянемо етап навчання методу PREF-**I**.

1) ОПР вирішує набір$\{T_k\}$БКО-задач виду (1) кожним з П-алгоритмів $A_i \in \mathbf{A}$ і отримує в результаті набір $\{I_{k,i,j}\}$ значень індикаторів якості цих алгоритмів і набір оцінок своєї функції переваг ψ_{ki} . Тут $I_{k,i,j}$ - значення індикатору I_j, що отримане при рішенні задачі T_k алгоритмом A_i ; ψ_{ki} - оцінка функції переваг ОПР для П-апроксимації задачі T_k, що отримана П-алгоритмом A_i; $i \in [1{:}|A|];\ j \in [1{:}|I|],\ k \in [1{:}|T|]$.

2) На основі всіх наявних значень індикаторів якостей $\{I_{k,i,j}\}$ та відповідних значень функції переваг ОПР ψ_{ki} будується функція $\overline{\psi}(\mathbf{I})$, що являє собою апроксимуючу функцію (сурогатну модель) функції переваг ЛПР. Як сурогатні моделі функції переваг ЛПР можна використовувати нейромережеві моделі [3].

Перейдемо до етапу експлуатації методу PREF-**I**.

Нехай ОПР U необхідно розв'язати БКО-задачу $T \notin \mathbf{T}$ виду (1).

1) Для цієї задачі кожним з алгоритмів $A_i \in \mathbf{A}$ можна побудувати П-апроксимацію Θ_i, а також обчислити значення всіх індикаторів якості $I_{i,j}$; $i \in [1{:}|A|];\ j \in [1{:}|I|]$.

2) В якості кращого алгоритму $A^* \in \mathbf{A}$ та відповідної кращої П-апроксимації Θ^* пропонується ОПР алгоритм, вектор індикаторів якого доставляє максимум функції $\overline{\psi}(\mathbf{I})$:

$$\max_i \overline{\psi}(I_i),\ i \in [1{:}|A|].$$

Першим очевидним недоліком методу PREF-**I** є наявність у кожного з користувачів досить великої навчальної вибірки $\{T_k, \{\mathbf{I_K}\}\}$, де $\{\mathbf{I_K}\}$ - набір значень індикаторів **I** , отриманих при рішенні задачі $\mathbf{T}_k$ всіма алгоритмами **A**; $k \in [1{:}|T|]$. Частково подолати зазначений недолік методу PREF-**I** можна шляхом використання за розглянутою схемою функції переваг узагальненого ОПР та його узагальненої функції переваг $\psi(\mathbf{I})$.

Другий недолік методу PREF-**I** полягає у високих обчислювальних витратах, обумовлених необхідністю вирішення даної БКО-задачі всіма П-алгоритмами **A**. Для подолання цього недоліку можна використовувати попередню кластеризацію множини значень характерних ознак БКО-задачі, в якості яких можуть бути використані оцінка констант Липшиця критеріальних функцій, ознака диференційованості цих функцій, ознака їхньої мультимодальності і т.д. Велику кількість характерних ознак можна отримати шляхом ландшафтного аналізу критеріальних функцій [6]. За аналогією з попереднім методом для скорочення потужності навчальної вибірки у цьому підході також може бути використана узагальнена вибірка.

Висновок. Таким чином, для підтримки прийняття рішень на основі багатоіндикаторної оцінки використовуються такі підходи:

1. Візуалізація даних: Парето-фронт та показники якості апроксимації можуть бути представлені у вигляді графіків та діаграм, що допомагає інтуїтивно зрозуміти, наскільки хороші ті чи інші рішення.
2. Аналіз компромісів: Користувач може побачити, як зміна одних показників впливає інші, що дозволяє вибрати найбільш збалансоване рішення.
3. Автоматизовані методи: Додавання методів машинного навчання або евристика для автоматичного вибору рішення, яке найкраще задовольняє заданим перевагам за кількома критеріями.

Підтримка багатокритеріальних рішень на основі багатоіндикаторної оцінки якості Парето-апроксимації дозволяє отримати більш точні та обґрунтовані рішення у складних задачах оптимізації. Використання кількох індикаторів дозволяє враховувати різні аспекти якості апроксимації, а автоматизовані інструменти аналізу та візуалізації допомагають краще розуміти компроміси між критеріями.

Список літератури

1. *Knowles J., Corne D.* On metrics for comparing nondominated sets // Evolutionary computation 2002: Congress on evolutionary computing: CEC '02 (Honolulu, Hawaii, USA, May 12-17, 2002): Proc. Vol. 1. N.Y.: IEEE, 2002. Pp. 711-716. DOI: 10.1109/CEC.2002.1007013
2. *Zitzler E., Thiele L., Laumanns M., Fonseca C. M., da Fonseca V.G.* Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review // IEEE Trans. on Evolutionary Computation. 2003. Vol. 7. No. 2. Pp. 117-132. DOI: 10.1109/TEVC.2003.810758
3. *Karpenko A. P., Mukhlisullina D. T., Ovchinnikov V. A.* Multicriteria optimization based on neural network approximation of decision maker's utility function // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). 2010. Vol. 19. No. 3. Pp. 227–236. DOI: 10.3103/S1060992X10030045
4. *Conover W. J.* Practical nonparametric statistics. 3rd ed. N. Y.: Wiley, 1999. 584
5. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Chichester; N.Y.: Wiley, 2001. 497 p.
6. *Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolph G.*Exploratory landscape analysis // 13th annual conf. on evolutionary computation: GECCO'11 (Dublin, Ireland, July 12–16, 2011): Proc. N.Y.: ACM, 2011. Pp. 829-836. DOI: 10.1145/2001576.2001690
7. *Emmerich, M. T. M., & Deutz, A. H.* (2018). A Tutorial on Multi-objective Optimization: Fundamentals and Evolutionary Methods. September 2018 Natural Computing 17(1–2), DOI:10.1007/s11047-018-9685-y.
8. *Deb, K.* Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms: An Introduction. Berlin, Germany: Springer; 2011.
9. J. *Yu, X. M. You, and S Liu,* "Ant colony algorithm based on magnetic neighborhood and filtering recommendation," Soft Comput., vol. 25, pp. 8035-8050, 2021.
10. *Davidović, T., Teodorović, D., & Šelmić, M.* (2015). Bee Colony Optimization. Part I: The algorithm overview. Yugoslav Journal of Operations Research, 25(1), 33–56. https://doi.org/10.2298/YJOR131011017D
11. *Eggenschwiler, S., Spahic-Bogdanovic, M., Hanne, T.,* & Dornberger, R. (2020). Comparison of Swarm and Graph Algorithms for Solving Travelling Salesman Problem. In: 7th International Conference on Soft Computing & Machine Intelligence (ISCMI), 1–7. Stockholm, Sweden. https://doi.org/10.1109/ISCMI51676.2020.9311558
12. *Fan, J., Hu, M., Chu, X., & Yang, D.* (2017). A comparison analysis of swarm intelligence algorithms for robot swarm learning. In: 2017 Winter Simulation Conference (WSC), 3042–3053. Las Vegas, NV, USA. https://doi.org/10.1109/WSC.2017.8248025
13. *Любченко В., Берлізов Є.* Алгоритм знаходження Парето-оптимального рішення задачі наступного релізу, Електротехнічні та комп'ютерні системи No 19 (95), 2015. С.165-168.
14. *Balabanov, T.*: LibreOffice Single-Objective Solver Used for Multi-Objective Optimization. ResearchGate (2021). DOI 10.13140/RG.2.2.16761.19041
15. *Qu Qu, Z. Ma, A.* Clausen і BN Jørgensen, «A Comprehensive Review of Machine Learningin Multi-Objective Optimization», 2021 IEEE 4th International Conference on BigData and Artificial Intelligence (BDAI), Qingdao, China, 2021, P. 7-14.

References (transliterated)

1. *Knowles J., Corne D.* On metrics for comparing nondominated sets // Evolutionary computation 2002: Congress on evolutionary computing: CEC '02 (Honolulu, Hawaii, USA, May 12-17, 2002): Proc. Vol. 1. N.Y.: IEEE, 2002. Pp. 711-716. DOI: 10.1109/CEC.2002.1007013
2. *Zitzler E., Thiele L., Laumanns M., Fonseca C.M., da Fonseca V.G.* Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review // IEEE Trans. on Evolutionary Computation. 2003. Vol. 7. No. 2. Pp. 117-132. DOI: 10.1109/TEVC.2003.810758
3. *Karpenko A. P., Mukhlisullina D. T., Ovchinnikov V. A.* Multicriteria optimization based on neural network approximation of decision maker's utility function // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics). 2010. Vol. 19. No. 3. Pp. 227–236. DOI: 10.3103/S1060992X10030045
4. *Conover W. J.* Practical nonparametric statistics. 3rd ed. N.Y.: Wiley, 1999. 584
5. *Deb K.* Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. Chichester; N.Y.: Wiley, 2001. 497 p.
6. *Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolph G.* Exploratory landscape analysis // 13th annual conf. on evolutionary computation: GECCO'11 (Dublin, Ireland, July 12–16, 2011): Proc. N.Y.: ACM, 2011. Pp. 829-836. DOI: 10.1145/2001576.2001690
7. *Emmerich, M. T. M., & Deutz, A. H.* (2018). A Tutorial on Multi-objective Optimization: Fundamentals and Evolutionary Methods. September 2018 Natural Computing 17(1–2), DOI:10.1007/s11047-018-9685-y.
8. *Deb, K.* Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms: An Introduction. Berlin, Germany: Springer; 2011.
9. J. Yu, X. M. You, and S. Liu, "Ant colony algorithm based on magnetic neighborhood and filtering recommendation," Soft Comput., vol. 25, pp. 8035-8050, 2021.
10. Davidović, T., Teodorović, D., & Šelmić, M. (2015). Bee Colony Optimization. Part I: The algorithm overview. Yugoslav Journal of Operations Research, 25(1), 33–56. https://doi.org/10.2298/YJOR131011017D
11. Eggenschwiler, S., Spahic-Bogdanovic, M., Hanne, T., & Dornberger, R. (2020). Comparison of Swarm and Graph Algorithms for Solving Travelling Salesman Problem. In: 7th International Conference on Soft Computing & Machine Intelligence (ISCMI), 1–7. Stockholm, Sweden. https://doi.org/10.1109/ISCMI51676.2020.9311558

12. Fan, J., Hu, M., Chu, X., & Yang, D. (2017). A comparison analysis of swarm intelligence algorithms for robot swarm learning. In: 2017 Winter Simulation Conference (WSC), 3042–3053. Las Vegas, NV, USA. https://doi.org/10.1109/WSC.2017.8248025
13. Lyubchenko V., Berlizov Y. Algoritm znahodzhennya Pareto-optimal'nogo rishennya zadachi nastupnogo relizu, Elektrotekhnichni ta komp'yuterni sistemi No 19 (95), 2015. P.165-168.
14. Balabanov, T.: LibreOffice Single-Objective Solver Used for Multi-Objective Optimization. ResearchGate (2021). DOI 10.13140/RG.2.2.16761.19041
15. Qu Qu, Z. Ma, A. Clausen і B. N. Jørgensen, «A Comprehensive Review of Machine Learningin Multi-Objective Optimization», 2021 IEEE 4th International Conference on BigData and Artificial Intelligence (BDAI), Qingdao, China, 2021, P. 7-14.

Надійшла (received) 29.11.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Некрасова Марія Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: masha12dec@gmail.com https://orcid.org/0009-0006-9285-0740

Nekrasova Mariia Volodymyrivna – Candidate of Technical Sciences, Dozent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-60-58; e-mail: masha12dec@gmail.com https://orcid.org/0009-0006-9285-0740