

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, М. А. БОРОДІН, О. А. ТАТАРИНОВА, А. В. СЕНЬКО

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНЕ ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТРИВИМІРНИХ ЗАДАЧ З ВИКОРИСТАННЯМ ХМАРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Основні співвідношення методу скінченних елементів, представлені у статті у загальному тривимірному формулюванні. застосовано для побудови програмного засобу, призначеного для розрахункового аналізу напружено-деформованого стану з використанням хмарних ресурсів у випадку великих обсягів даних. Наведено математичну постановку задачі. Описано основні залежності, що застосовуються для побудови скінченноелементних співвідношень елементу у формі чотирьохвузлового тетраедру. Використано лінійні функції форми. Система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується методом спряжених градієнтів. Обговорюється структура додаткових програм, призначених для пре- та постпроцесорної обробки даних. Наведено приклади роботи даних програм, що демонструють можливості аналізу скінченноелементних моделей, їхніх окремих фрагментів та розподілу компонентів напружено-деформованого стану за об'ємом елементу конструкції, що аналізується. Обговорюються результати верифікаційних досліджень, які показали задовільну достовірність даних, що отримуються при розв'язанні пружних задач. Описано запропонований для застосування хмарних ресурсів підхід з використанням технологій Terraform та Kubernetes, який дозволяє виконувати чисельне моделювання за допомогою розробленого програмного засобу. Виконано порівняння характеристик обчислювальних процесів з використанням програми для окремого персонального комп'ютера та розрахунку у хмарі. Наголошується, що за даними виконаних порівнянь випливає, що використання інфраструктури Microsoft Azure у поєднанні з автоматизованими інструментами Terraform і Kubernetes суттєво прискорює виконання проаналізованих задач. Відмічається перевага запропонованого підходу у реалізації можливостей динамічного управління ресурсами системи відповідно до поточного обчислювального навантаження.

Ключові слова: тривимірний напружено-деформований стан, метод скінченних елементів, програмне забезпечення, хмарні технології, розподілені обчислення.

D. BRESLAVSKY, M. BORODIN, O. TATARINOVA, A. SENKO

FINITE ELEMENT SOFTWARE FOR SOLVING THREEDIMENSIONAL PROBLEMS BY USE OF CLOUD TECHNOLOGIES

The basic relations of the Finite Element Method are presented in the paper in a general three-dimensional formulation. They are used to build a software tool designed for computational analysis of the stress-strain state using cloud resources in the case of large amounts of data. The mathematical problem statement is given. The main dependencies used to build finite element relations for an element in the form of a four-node tetrahedron are described. Linear shape functions are used. The system of linear algebraic equations is solved by the conjugate gradient method. The structure of additional programs designed for pre- and post-processing of data is discussed. Examples of the work of these programs are given, demonstrating the possibilities of analyzing finite element models, their individual fragments and the distribution of the stress-strain state components over the volume of the structural element being analyzed. The results of verification studies are discussed, which showed satisfactory reliability of the data obtained when solving elastic problems. The proposed approach for the use of cloud resources using Terraform and Kubernetes technologies, which allows performing numerical modeling using the developed software tool, is described. The characteristics of computational processes using a separate personal computer and computing in the cloud are compared. It is emphasized that according to the data of the comparisons performed, it follows that the use of the Microsoft Azure infrastructure in combination with the automated tools Terraform and Kubernetes significantly accelerates the execution of the analyzed tasks. The advantage of the proposed approach in implementing the capabilities of dynamic management of system resources in accordance with the current computational load is noted.

Key words: three-dimensional stress-strain state, Finite Element Method, software, cloud technologies, distributed computing.

Вступ. Застосування у прикладному інженерному аналізі методу скінченних елементів [1, 2] вимагає постійного розвитку інформаційних технологій, що є сервісними при його використанні. Одним з найважливіших питань є забезпечення для проведення моделювання необхідних ресурсів ЕОМ, насамперед оперативної пам'яті та швидкодії. Найпотужніші організації, що працюють у царині САЕ систем, мають можливість використовувати великі обчислювальні засоби, мейнфрейми або серверні комплекси [3]. Але більшість дослідників працює або з використанням десктопних варіантів, або, останнім часом, з застосуванням хмарних технологій [4]. Використання останніх надає можливість доступу до машинних ресурсів у необхідному обсязі, що у багатьох випадках є критичним при розв'язанні прикладних задач, які характеризуються складною геометрією об'єктів та крайових умов, та забезпечення збіжності чисельних розв'язків [5].

Використання хмарних технологій у скінченноелементному моделюванні також

забезпечується поширенням відповідних сервісів [4]. Прикладом є, наприклад, служба Amazon Elastic Compute Cloud (EC2), яка надає віртуальні машини замість прямого доступу до фізичних комп'ютерів [6], що дозволяє більш ефективно використовувати фактично необмежену обчислювальну потужність. З огляду на переваги хмарних обчислень, високопродуктивні обчислення (HPC) у хмарі мають потенціал, щоб дозволити користувачам не тільки прискорити обчислювально дороге моделювання з використанням МСЕ, але й зменшити витрати за рахунок використання тільки за запитом та масштабованості ресурсів хмарних обчислень [7]. Для інтенсифікації скінченноелементного моделювання з використанням хмарних ресурсів розробляються нові підходи. Так, наприклад, у роботі [8] запропоновано методологію, що дозволяє трансформувати хмару точок, отриману в результаті дослідження безпосередньо в 3D МСЕ, напівавтоматичним способом. Розроблений гібридний підхід зворотного проектування спрямовано як на максимізацію

відповідності між моделлю для аналізу напружено-деформованого стану і реальним об'єктом так й на мінімізацію часу виконання.

В роботах [4-9] використання МСЕ із залученням хмарних ресурсів надало можливість розв'язання достатньо складних та об'ємних задач: напружено-деформованого стану у механізмах, коробках передач, газотурбінних двигунах [4], будівельних спорудах [8], систем ґрунт- фундамент токарного верстату [9] тощо.

Недоліком існуючих хмарних ресурсів є неоднорідна та неоптимальна (через спільне використання фізичних ресурсів і накладні витрати на віртуалізацію) продуктивність [5]. В цій роботі наголошується, що зниження продуктивності віртуальних машин залежить від того, скільки ресурсів використовується спільно з іншими користувачами.

Можливим рішенням даної проблеми може бути використання спеціалізованого програмного забезпечення, що має бути розробленим саме для використання з залученням хмарних технологій. На сьогодні, завдяки розвитку ресурсів обчислювальних засобів, в тому числі й хмарних, найпоширенішою областю моделювання напружено-деформованого стану є повний тривимірний аналіз [10, 11]. Для моделювання об'єктів будь-якої геометрії є придатним скінченний елемент у формі тетраедру [2, 10], він є широко поширеним у практичних застосуваннях. Розробка спеціалізованого програмного забезпечення для скінченноелементного моделювання напружено-деформованого стану у загальній тривимірній постановці з використанням елемента у формі тетраедру хмарних технологій є важливим завданням. Воно й є метою даною роботи.

Метод розв'язку та опис програм. На даному етапі розробки є завершеним алгоритмічне та програмне забезпечення для розв'язання пружних задач. Далі стисло опишемо застосовану постановку задачі, основні використані співвідношення МСЕ, структуру основної та постпроцесорної програм.

Розглянемо тіло V , що є обмеженим поверхнею $S = S_1 \cup S_2$ та навантаженим на частині поверхні S_1 будь-якою системою поверхневих сил \mathbf{q} та об'ємними силами \mathbf{F} . Тіло є закріпленням у просторі на частині його поверхні S_2 . За загально прийнятим у теорії пружності підходом [12], який використовується у МСЕ [1], запишемо варіаційну постановку задачі. Використовуючи найбільш придатний в даному випадку принцип мінімуму повної внутрішньої енергії системи, наведемо функціонал Лагранжу, що йому відповідає:

$$\Phi = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv - \int_V F_i u_i dv - \int_{S_1} q_i u_i ds, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де u_i – компоненти вектору переміщень; σ_{ij} – компоненти тензору напружень; ε_{ij} – компоненти тензору деформацій. Умова $\delta\Phi = 0$ відповідає задачі пошуку екстремуму функціоналу (1) [12].

Геометричні співвідношення використовуватимуться у формі рівнянь Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

а фізичні – у формі узагальненого закону Гука:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (3)$$

Використовуються граничні умови у переміщеннях та напруженнях:

$$\sigma_{ij} n_j = q_i, \quad x_i \in S_1; \quad u_i|_{S_2} = \bar{u}_i, \quad (4)$$

де D_{ijkl} – компоненти тензору пружних констант матеріалу, у загальному випадку анізотропного; n_j – компоненти вектора нормалі до поверхні S .

Перейдемо до скінченноелементного формулювання задачі. Використовуємо один з найбільш поширених скінченних елементів тривимірного аналізу – чотириохвужловий тетраедр [1], рис. 1.

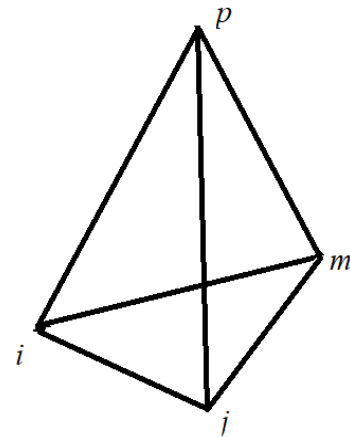


Рис. 1 – Чотириохвужловий скінченний елемент у формі тетраедру

Вектор, що визначає переміщення у напрямках осей декартової системи координат x, y, z , має вигляд:

$$\{u\}^T = \{u, v, w\}. \quad (5)$$

Скористаємось лінійним законом для апроксимації переміщень за елементом. За допомогою лінійних функцій форми [1] отримуються вирази для переміщень за скінченим елементом. Наприклад, для компоненти $u_1 = u$ маємо:

$$u = \frac{1}{6V} \{ (a_i + b_i x + c_i y + d_i z) u_i + (a_j + b_j x + c_j y + d_j z) u_j + (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) u_m + (a_p + b_p x + c_p y + d_p z) u_p \}, \quad (6)$$

де V – об'єм тетраедрального елемента, за коефіцієнти $a_i - d_i$ позначено визначники. Наприклад, для a_i :

$$a_i = \det \begin{pmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_m & y_m & z_m \\ x_p & y_p & z_p \end{pmatrix}.$$

За допомогою циклічного переставлення індексів p, i, j, m отримуються інші коефіцієнти.

Вектор переміщень $\{g\}$ визначається дванадцятьма компонентами переміщень його вузлів:

$$\{g\}^T = \{u_i, u_j, u_m, u_p\}. \quad (7)$$

Переміщення точки тетраедру u може бути записаним у вигляді:

$$\{u\} = [IN_i, IN_j, IN_m, IN_p] \{g\}. \quad (8)$$

де I – одинична матриця розміром $(3 \cdot 3)$.

Тут величини N визначаються співвідношеннями типу:

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i z). \quad (9)$$

Матриця деформування $[B_T]$, що забезпечує реалізацію геометричних співвідношень у випадку тривимірного деформованого стану:

$$\{\varepsilon\} = [B_T] \{g\}, \quad (10)$$

має вигляд:

$$[B_T] = [B_i, B_j, B_m, B_p],$$

де

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Інші підматриці отримуються перестановкою індексів.

Фізичні співвідношення – узагальнений закон Гука:

$$\{\sigma\} = [E_T] \{\varepsilon\}. \quad (12)$$

Використовується матриця пружних констант $[E_T]$, записана для загального випадку тривимірного напруженого стану [1].

Після підстановки отриманих виразів для векторів напружень (12) та деформацій (10) до функціоналу у випадку відсутності об'ємних сил для окремого скінченного елемента отримуємо:

$$\int_V [B_T]^T [E_T] [B_T] dv - \int_V [N]^T \{q\} dv = 0. \quad (13)$$

Вираз для матриці жорсткості скінченного елемента у формі тетраедру $[K^{el}]$ визначається першим інтегралом у (13). Другий інтеграл визначає величину вузлових сил, статично еквівалентних діючому поверхневою навантаженню.

Після отримання матриць жорсткості для всіх скінчених елементів виконується процедура ансамблювання всієї конструкції, представлені сукупністю тетраедрів, та отримується матриця жорсткості конструкції $[K]$ та вектор вузлових сил $\{F\}$ [1]. Отримана при цьому система лінійних алгебраїчних рівнянь (14) розв'язується методом спряжених градієнтів [13], який дозволяє виконувати розподілення обчислень.

$$[K] \{U\} = \{F\}. \quad (14)$$

Після отримання вектору вузлових переміщень $\{U\}$ є можливим виконати перехід до значень локальних вузлових переміщень та за співвідношеннями (10) та (12) визначити вектори напружень та деформацій в кожному скінченному елементі.

Описана реалізація МСЕ з використанням скінченного елемента у формі тетраедру реалізована у вигляді комп'ютерних програми *FEM Tetra*, написаною мовою C++ (десктопний варіант) та мовою Java (для використання при роботі з хмарними ресурсами). Програми побудовано з використанням структурно-логічної методології, вони містять функції побудови матриць жорсткості елементів та всієї конструкції, вектору правих частин, визначення напружень та деформацій в елементах.

Також реалізовано сервісні програми – препроцесор для відображення скінченноелементних моделей та постпроцесор для виведення розподілів компонентів напружено-деформованого стану за моделлю.

Препроцесор і постпроцесор реалізовані у вигляді комп'ютерної програми написаної на мові програмування Java. Відображення тривимірних фігур реалізовано з використанням бібліотеки OpenGL [14]. Вхідними даними для препроцесору є таблиця координат та матриця індексів скінчених елементів моделі. Бібліотека OpenGL [14], як і більшість бібліотек для роботи з 3Д графікою, приймає на вхід масив трикутників. В препроцесорі реалізована конвертація матриці індексів скінчених елементів в матрицю індексів трикутників, з яких складаються ці елементи. Алгоритм роботи препроцесора зображений на рис. 2.

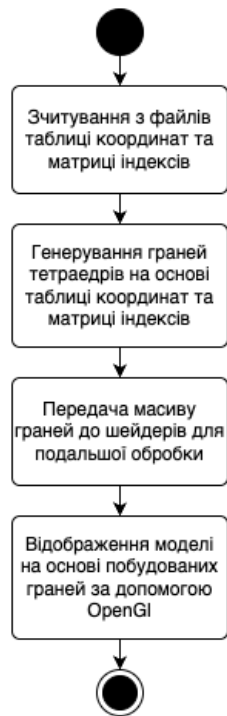


Рис. 2 – Алгоритм відображення моделі у препроцесорі

Постпроцесорну програму призначено для відображення розподілів компонентів напружено-деформованого стану за скінченноелементною моделлю елемента конструкції. Для відображення моделі використовується алгоритм, реалізований в препроцесорі. Далі на побудованій моделі за допомогою представлення зон рівної інтенсивності кольорами відображаються значення компонентів напружено-деформованого стану в елементах, отримані з основної програми. Вхідними даними для постпроцесора є таблиця, в якій перший стовбець є номером елемента, другий – значення компоненту, що відображається. Реалізовано розбиття числових значень напружень на сім рівномірних діапазонів, кожному з яких відповідає один колір. За необхідності є можливим задати довільні діапазони значень напружень. Приклади роботи пре- та постпроцесорів наведено на рис. 3, 5.

Аналіз та верифікація розв'язків. Для аналізу достовірності отриманих за допомогою розроблених програмних засобів результатів проведено низку верифікаційних досліджень, які показали цілком задовільний ступінь відповідності отриманих даних та даних аналітичних розв'язків й виконаних за допомогою програмного комплексу ANSYS [5]. Як приклад, наведемо результати одного з них.

Розглянемо задачу згину жорстко закріпленого з одного боку бруса довжиною 1 м з прямокутним поперечним перерізом 0.05x0.05 м. На вільному краю бруса у середині верхньої поверхні його навантажено силою 1000 Н. Модуль пружності матеріалу бруса 2000 ГПа, коефіцієнт Пуассона 0.3.

Для аналізу збіжності послідовно аналізувались результати, отримані на скінченноелементних моделях

з різним числом елементів. На рис. 3 наведено дві останні моделі з числом елементів 8514 (верхня) та 27026 (нижня).

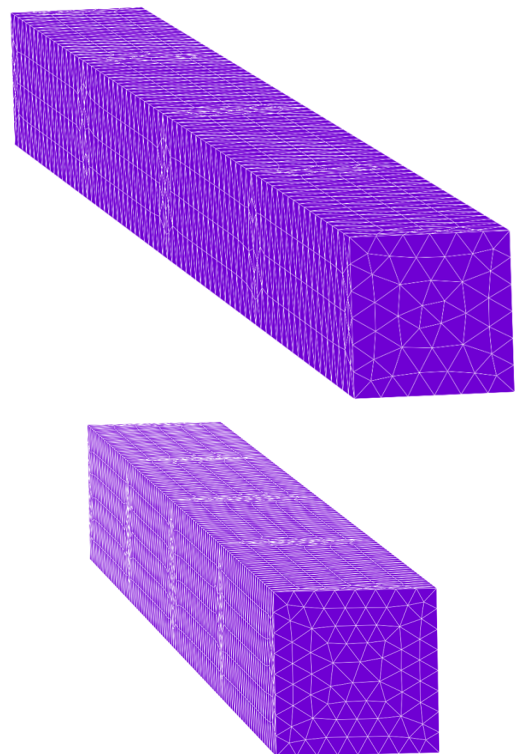


Рис. 3 – Загальний вигляд скінченноелементних моделей бруса

Результати чисельних досліджень показали, що застосовані в розробленому програмному засобі моделі цілком задовільно описують напружено-деформований стан бруса. Так, при числі елементів 8514 значення максимального нормального переміщення складає 0,0027 м, а при 27026 елементів - 0,0031 м. Аналітичне його значення [15] складає 0,0032 м, тобто відмінність не перевищує 3.3%.

Рис. 4 містить порівняння результатів розрахунків, проведених за допомогою даного розробленого програмного засобу *FEM Tetra* (синя крива) та ПК ANSYS (червона крива) для однакових скінченноелементних моделей з 27026 елементів. Як видно з рисунку, забезпечено цілком задовільне співпадіння результатів, максимальна розбіжність не перевищує 1%.

Максимальні значення нормальних згинних напружень σ_{22} , отримані за допомогою ПК ANSYS складають 62 МПа, а за допомогою ПК *FEM Tetra* – 58 МПа, тобто різниця не перевищує 6%.

Як приклад, на рис. 5 наведено розподіл величин інтенсивностей напружень за поверхнею бруса, отриманий за допомогою розроблених постпроцесорних засобів.

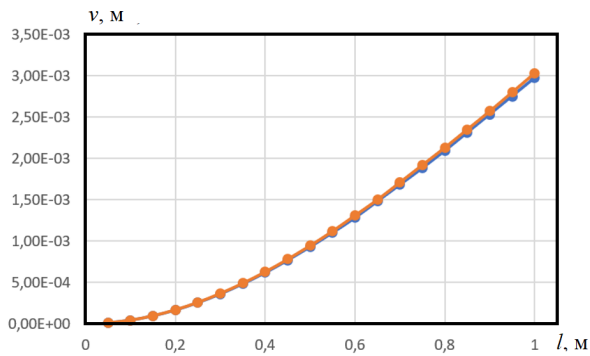


Рис. 4 – Порівняння значень нормальних переміщень, отриманих за допомогою ПК ANSYS (червона крива) та FEM Tetra (синя крива)

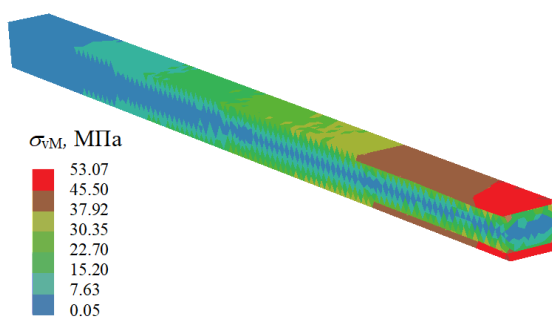


Рис. 5 – Розподіл величин інтенсивностей напружень за поверхнею бруса

Використання хмарних технологій. В роботі розроблено платформу на базі хмарних технологій, яка використовує сучасні інструменти для автоматизації та управління інфраструктурою обчислювальних процесів.

Для автоматизації процесу розгортання інфраструктури використовувалася технологія Terraform [16], що базується на підході «інфраструктура як код». Terraform на сьогодні є провідним засобом у світі DevOps для визначення,

запуску та керування інфраструктурою у вигляді коду (IaC) на різноманітних хмарних платформах і платформах віртуалізації, включаючи AWS, Google Cloud, Azure тощо [16]. Цей інструмент дозволяє описати необхідні компоненти інфраструктури у вигляді коду і розгорнути їх за допомогою однієї команди, значно спрощуючи налаштування середовища та скорочуючи час підготовки до проведення розрахунків.

Для динамічного управління ресурсами було використано Kubernetes [17], що дозволяє автоматично масштабувати кількість серверів залежно від навантаження. Розроблена система передбачає основний сервіс, який запускає додаткові обчислювальні сервіси для розподілу обчислювального навантаження, що дозволяє суттєво зменшити час виконання розрахунків. На рис. 6 представлено структуру хмарної платформи для чисельного моделювання напружено-деформованого стану.

Продуктивність хмарної платформи Microsoft Azure було оцінено за допомогою розв’язання пружної задачі з використанням сітки з 3625143 тривимірних тетраедральних скінченних елементів. Кількість виконаних ітерацій склала 31588. Для того, щоб визначити швидкість виконання ітерацій та загальний час розрахунків проводилось порівняння різних конфігурацій обчислювальних нод Azure, а також характеристики обчислювального процесу з використанням локального комп’ютеру.

Обчислення проводилися в хмарному середовищі Azure (на нодах типів: Standard_D4as_v5 та Standard_D32pls_v5) та персональному комп’ютері з 8 ядрами і 12 ГБ оперативної пам’яті, виділеними для Java процесу. В таблиці наведено характеристики персонального комп’ютеру, нод в сервісі Azure та час виконання однієї ітерації алгоритму в кожному з середовищ.

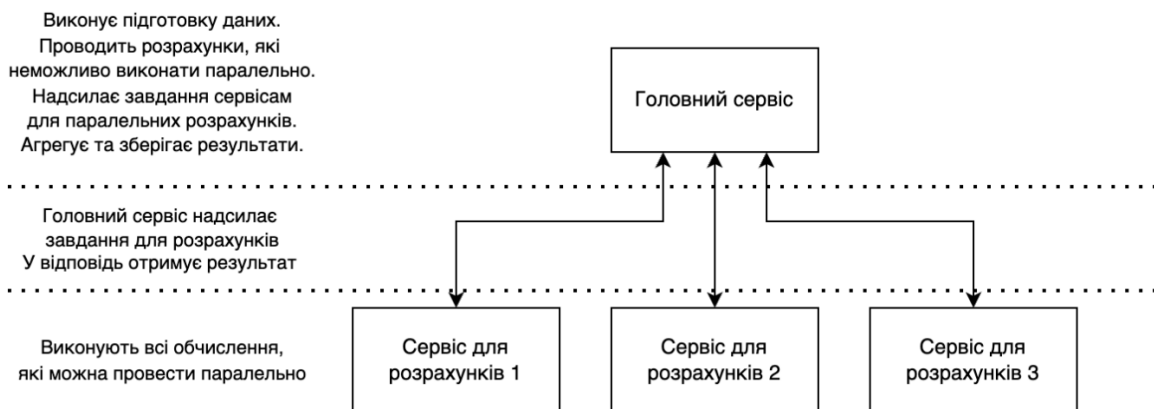


Рис. 6 – Структура програми з використанням розподілених обчислень

Таблиця 1 – Порівняння швидкості обчислень на різних конфігураціях в середовищі Azure та на персональному комп'ютері

Конфігурація	Характеристики	Час виконання ітерації
Персональний комп'ютер	M1 процесор з 8 ядрами, 12ГБ оперативної пам'яті	4-6.7 секунд
Standard_D4as_v5	4 ядра процесора AMD EPYC 7763, 12ГБ оперативної пам'яті	5-8.5 секунд
Standard_D32pls_v5	32 ядра процесора Ampere® Altra®, 56ГБ оперативної пам'яті	1-1.8 секунди

Час виконання ітерацій на персональному комп'ютері становив 4-6.7 секунд, загальний час виконання розрахунку напружено деформованого стану моделі становив приблизно 2 доби. На ноді Azure типу Standard_D32pls_v5 час розрахунку ітерації алгоритму варіювався від 1 до 1.8 секунди, що в 4 рази швидше, ніж на персональному комп'ютері.

Висновки. У статті розглянуто основні співвідношення методу скінченних елементів, представлені у загальному тривимірному формулюванні для виконаної побудови програмного засобу, призначеного для аналізу напружено-деформованого стану. Обговорюються додаткові програми, призначені для пре- та постпроцесорної обробки даних. Наведені результати верифікаційних досліджень показали задовільну достовірність даних, що отримуються при розв'язанні пружних задач.

Розроблений програмний засіб призначено для розрахункового аналізу задач великої розмірності за допомогою використання хмарних технологій. Обговорюється запропонований підхід з використанням технологій Terraform та Kubernetes, що дозволяє виконувати чисельне моделювання за допомогою розробленого програмного засобу та хмарних ресурсів.

Виконано порівняння характеристик обчислювальних процесів з використанням десктопної програми та розрахунку у хмарі. Результати порівняння показали, що використання інфраструктури Microsoft Azure у поєднанні з автоматизованими інструментами Terraform і Kubernetes прискорює виконання задач. Також перевагою такого підходу є можливість динамічного управління ресурсами системи відповідно до поточного обчислювального навантаження.

Список літератури

1. Zienkiewicz O. C. The finite element method for solid and structural mechanics. / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor., D. D. Wood – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. – 672 p. – <https://doi.org/10.1016/b978-1-85617-634-7.00016-8>

2. Chandrupatla T. Introduction to finite elements in engineering. / T. Chandrupatla, T. Belegundu – Cambridge University Press, 2021. – 512 p. <https://doi.org/10.1017/9781108882293>
3. Alfoqaha A. IBM POWER9 Systems, Shock Simulation and Testing Validation / A. Alfoqaha, K. O'Connell, E. Campbell // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2019. – Т. 59285. – С. V008T10A040. – <https://doi.org/10.1115/detc2019-97028>
4. Wu D. Digital design and manufacturing on the cloud: A review of software and services—RETRACTED / D. Wu, J. Terpeny, D. Schaefer // AI EDAM. – 2017. – Т. 31, № 1. – P. 104-118. – <https://doi.org/10.1017/s0890060416000305>
5. Chen X. Finite element modeling and simulation with ANSYS Workbench. / X. Chen, X. Liu. – CRC press, 2018. – 471 p. <https://doi.org/10.1201/9781351045872>
6. Törmä J. Cloud HPC strategies and performance for FEM. / J. Törmä. – 2016. – 45 p.
7. Wu D. Performance evaluation of cloud-based high performance computing for finite element analysis / Dazhong Wu, Xi Liu, Steve Hebert, Wolfgang Gentsch, Janis Terpeny // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2015. – Т. 57045. – С. V01AT02A043. – <https://doi.org/10.1115/detc2015-46381>
8. Quattrini R. From TLS to FE analysis: Points cloud exploitation for structural behaviour definition. The San Ciriaco's Bell Tower / R. Quattrini, F. Clementi, A. Lucidi, S. Giannetti, A. Santoni // The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences. – 2019. – V. 42. – P. 957-964. – <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-xxlii-2-w15-957-2019>
9. Cai L. Application of cloud computing to simulation of a heavy-duty machine tool / Ligang Cai, Yang Tian, Zhifeng Liu, Qiang Cheng, Jingjing Xu, Yue Ning // The International Journal of Advanced Particuli R. M. Engineering finite element analysis. – Morgan & Claypool Publishers, 2017. Manufacturing Technology. – 2016. – Т. 84. – P. 291-303. – <https://doi.org/10.1007/s00170-015-7916-2>
10. Pidaparti R. M. Engineering finite element analysis. / R. M. Pidaparti – Morgan & Claypool Publishers, 2017. – 253 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-79570-1>
11. Бреславський Д. В. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення / Д. В. Бреславський, Ю. М. Коритко, О. А. Татарінова – Харків, «Підручник НТУ «ХПИ». 2017. – 232 с.
12. Hetnarski R. B. The mathematical theory of elasticity. / R. B. Hetnarski, J. Ignaczak – CRC Press, 2016. – 837 p. <https://doi.org/10.1201/9781439828892>
13. Schleicher K. The conjugate gradient method / K. Schleicher // The Leading Edge. – 2018. – Т. 37, №. 4. – P. 296-298. <https://doi.org/10.1190/tle37040296.1>
14. Buss S. R. 3D computer graphics: a mathematical introduction with OpenGL. / S. R. Buss – Cambridge University Press, 2003. – 371 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511804991>
15. Öchsner A. Bending of Beams. / A. Öchsner, // Elasto-Plasticity of Frame Structure Elements. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2014. – P. 55-149. https://doi.org/10.1007/978-3-662-44225-8_4
16. Brikman Y. Terraform: Up and Running. / Y. Brikman – O'Reilly Media, Inc., 2022. – 460 p.
17. Luksa M. Kubernetes in action. / M. Luksa. – Simon and Schuster, 2017. – 624 p.

References (transliterated)

1. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Wood D. D. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014. 672 p. <https://doi.org/10.1016/b978-1-85617-634-7.00016-8>
2. Chandrupatla T., Belegundu A. *Introduction to finite elements in engineering*. – Cambridge University Press, 2021. 512 p. <https://doi.org/10.1017/9781108882293>
3. Alfoqaha A., O'Connell K., Campbell E. IBM POWER9 Systems, Shock Simulation and Testing Validation. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2019. T. 59285. C. V008T10A040. <https://doi.org/10.1115/detc2019-97028>
4. Wu D., Terpeny J., Schaefer D. Digital design and manufacturing on

- the cloud: A review of software and services—RETRACTED. *AI EDAM*. 2017. V. 31. №. 1. C. 104-118.
<https://doi.org/10.1017/s0890060416000305>
5. Chen X., Liu Y. Finite element modeling and simulation with ANSYS Workbench – CRC press, 2018.
<https://doi.org/10.1201/9781351045872>
 6. Törmä J. *Cloud HPC strategies and performance for FEM*. 2016. 45 p.
 7. Wu D. et al. Performance evaluation of cloud-based high performance computing for finite element analysis. *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers, 2015. T. 57045. C. V01AT02A043.
<https://doi.org/10.1115/detc2015-46381>
 8. Quattrini R. et al. From TLS to FE analysis: Points cloud exploitation for structural behaviour definition. The San Ciriaco's Bell Tower. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2019. T. 42. C. 957-964.
<https://doi.org/10.5194/isprs-archives-xlii-2-w15-957-2019>
 9. Cai L. et al. Application of cloud computing to simulation of a heavy-duty machine tool. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2016. T. 84. C. 291-303.
<https://doi.org/10.1007/s00170-015-7916-2>
 10. Pidaparti R. M. *Engineering finite element analysis*. Morgan & Claypool Publishers, 2017. 253 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-79570-1>
 11. Breslavsky D. V., Korytko Yu. M., Tatarinova O. A.. *Proektuvannya ta rozrobka skinchennoelementnogo programnogo zabezpechennya* [Design and development of finite element software]. Kharkov, NTU "KhPI"; Publ., 2017. 232 p.
 12. Hetnarski R. B., Ignaczak J. *The mathematical theory of elasticity*. CRC Press, 2016. 837p. <https://doi.org/10.1201/9781439828892>
 13. Schleicher K. The conjugate gradient method. *The Leading Edge*. 2018. T. 37. №. 4. C. 296-298. <https://doi.org/10.1190/tle37040296.1>
 14. Buss S. R. *3D computer graphics: a mathematical introduction with OpenGL*. Cambridge University Press, 2003.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511804991>
 15. Öchsner A. Bending of Beams. In: *Elasto-Plasticity of Frame Structure Elements*. Springer, Berlin, Heidelberg. C. 55-149.
 16. Brikman Y. *Terraform: Up and Running*. O'Reilly Media, Inc., 2022. 460 p.
 17. Luksa M. *Kubernetes in action*. Simon and Schuster, 2017. 624 p.

Надійшла (received) 27.11.2024

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович – доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)7076454; email: Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Breslavsky Dmytro – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)7076454; email: Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Бородін Марія Анатоліївна – аспірантка кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)7076454; email: Mariia.Borodin@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4479-7103>

Borodin Mariia – PhD student of the Department of Computer Modelling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)7076454; email: Mariia.Borodin@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-4479-7103>

Татарінова Оксана Андріївна – кандидат технічних наук, доцент, завідувачка кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Oksana.Tatarinova@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3090-8469>

Tatarinova Oksana – PhD, Associate Professor, Head of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-60-58; e-mail: Oksana.Tatarinova@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3090-8469>

Сенько Альона Володимирівна – доктор філософії, старший викладач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)7076454; email: Alyona.Senko@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9961-7419>

Senko Alyona – PhD, Senior lecturer of the Department of Computer Modelling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)7076454; email: Alyona.Senko@khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9961-7419>