

Р. Р. ВОЄДИЛО, В. В. ЛОБОДА

СИСТЕМА ТРЬОХ КОЛІНЕАРНИХ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН В ОБЛАСТІ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

Розглядається біматеріальна область складена із двох прямокутників, з'єднаних по торцям однакової довжини. В областях жорсткого з'єднання виникли три тріщини довільної довжини і розташування. Вважається, що навантаження, прикладене по зовнішнім торцям прямокутників, направлено ортогонально до інтерфейсу. Для розв'язку задачі використовується програмний комплекс Abaqus. Створена сітка скінчених елементів із згущенням поблизу тріщин і особливо біля їх вершин. Використані восьмивузлові скінченні елементи лагранжового типу. Проведено низку розрахунків на різних сітках з різним ступенем їх згущення, що дозволяє оцінити залежність результатів від параметрів сітки. Для спрощення та пришвидшення процесу моделювання була написана програма на мові Python, яка інтегрована в Abaqus як скрипт. Ця програма дозволяє швидко змінювати параметри тріщин, навантаження та властивості матеріалів, а також автоматично створювати нову сітку для кожної конфігурації. В якості параметра, що визначає можливість розвитку тріщини, використовувалась швидкість звільнення енергії. У випадку лінійних задач цей параметр дорівнює J-інтегралу для відповідної вершини тріщини. Використовується методика визначення J-інтеграла, яка реалізована через чисельне інтегрування по вузлах контурів навколо вершин тріщин. Проведено аналіз результатів обчислень на різних контурах навколо вершин, що дозволило встановити стабільність та збіжність отриманих результатів. При аналізі основна увага приділялась аналізу залежності розмірів області тріщин і розрахункової області. Встановлено зростання швидкості звільнення енергії при зменшенні відносного розміру розрахункової області. Особливо це проявляється для вершин тріщин, які є найближчими до границь області. Для випадку області, набагато більшої від розміру тріщин, проведено порівняння чисельних результатів з відповідними аналітичними розв'язками і встановлена їх хороша узгодженість.

Ключові слова: напруження, деформація, тріщина між двома матеріалами; розкриття тріщини, метод скінчених елементів, швидкість звільнення енергії.

The study considers a bimaterial region composed of two rectangles joined along edges of equal length. Three cracks of arbitrary lengths and positions are formed at the rigidly bonded interface. It is assumed that the external load applied on the outer edges of the rectangles is directed orthogonally to the interface. The finite-element software Abaqus is used to solve the problem. A finite-element mesh with refined density near the cracks, especially around their tips, is created. Eight-node Lagrangian finite elements are employed. A series of calculations is carried out using different meshes with varying refinement levels to assess the sensitivity of results to mesh parameters. To simplify and accelerate the modeling process, a Python program integrated into Abaqus as a script was developed. This program enables rapid adjustments of crack parameters, loads, and material properties and automatically generates a new mesh for each configuration. The energy release rate was used as a parameter determining the possibility of crack development. In the case of linear problems, this parameter is equal to the J-integral for the corresponding crack tip. The used method of determining the J-integral is implemented through numerical integration over the nodes of the contours around the crack tips. The analysis of the results of calculations on different contours around the crack tips was carried out. It allowed us to establish the stability and convergence of the obtained results. The primary focus is on analyzing the dependence between the sizes of the crack region and the computational domain. It was established that the energy release rate increases with a reduction of the relative size of the computational domain. This is especially pronounced at crack tips located close to the domain boundaries. For cases when the domain size significantly exceeds the crack dimensions, numerical results were compared with corresponding analytical solutions, demonstrating good agreement.

Keywords: stress, deformation, interface crack; crack opening, finite element method, energy release rate.

Вступ. Проблема дослідження систем тріщин між різнорідними матеріалами є критично важливою для ряду інженерних застосувань, зокрема у галузі матеріалознавства, механіки композитних матеріалів та при розробці багатошарових конструкцій. Незважаючи на значну кількість робіт, присвячених аналізу однієї тріщини на межі поділу матеріалів, питання взаємодії кількох тріщин у біматеріальних площинах досліджено набагато менше. Особливий інтерес становить вивчення впливу взаємодії тріщин на їхнє розповсюдження та руйнування матеріалів, що є актуальним для оптимізації міцності багатошарових структур.

Зараз найбільш повно досліджені поодинокі тріщини між двома матеріалами. Так в роботах [1-3] для дослідження вказаних тріщин використовувались аналітичні методи засновані на апараті теорії функцій комплексної змінної та задачі лінійного спряження. Чисельні методи для дослідження таких тріщин застосовувались в роботах [4-5].

Періодична система колінеарних тріщин між двома ізотропними матеріалами вперше була розглянута в роботі [6], після чого ця тема розвивалась в роботах [7-9]. У контексті анізотропних матеріалів такі проблеми вивчались в роботах [10-12].

Дослідження міжфазних тріщин у матеріалах з ускладненими фізичними характеристиками проведено в дослідженнях [13-14].

В той же час, система тріщин довільної довжини та взаємного розташування між двома ізотропними матеріалами залишається менш дослідженою, особливо щодо впливу відстаней між тріщинами на швидкість вивільнення енергії в області вершин. Аналітичний розв'язок плоскої задачі для трьох колінеарних тріщин між двома ізотропними півпросторами був наведений в роботі [15].

У даній роботі досліджується аналогічна задача для системи з трьох колінеарних тріщин, але у області скінчених розмірів. Вершини тріщин можуть бути розташовані на довільній відстані одна від одної, що дозволяє дослідити їх взаємний вплив на можливість розвитку тріщин та руйнування матеріалів.

В цій роботі також порівнюються результати, отримані аналітичним методом та чисельні розрахунки, виконані за допомогою програмного комплексу Abaqus, що дозволяє моделювати складні геометричні конфігурації та більш точно оцінювати такі критичні параметри, як коефіцієнти інтенсивності напружень та швидкість звільнення енергії.

Методика обчислення J-інтеграла в Abaqus передбачає використання дискретних контурів, сформованих вузлами скінченно-елементної сітки. Значення J-інтегралу обчислюється через інтегрування по вузлах навколо вершин тріщин, що дозволяє отримати значення інтегралів на основі дискретних даних. Зокрема, чисельне моделювання в Abaqus дозволяє отримати розв'язки для випадків, де аналітичні методи стикаються з обмеженнями через складну конфігурацію тріщин, їх взаємодію та необхідність задовольняти граничним умовам в тілах скінченних розмірів. Це порівняння дозволяє краще зрозуміти поведінку тріщин у різномірних матеріалах та дає можливість оптимізувати конструкції для забезпечення їх надійності.

Формулювання проблеми. Розглянемо систему трьох тріщин AB , CE та HP між двома прямокутними пластинами. Механічні характеристики верхньої і нижньої пластини E_1, ν_1 і E_2, ν_2 , відповідно (рис. 1). Тріщини можуть мати довільну довжину і взаємне розташування, а півпростори знаходяться в однорідному полі розтягувальних (σ) і зсувних (τ) напружень.

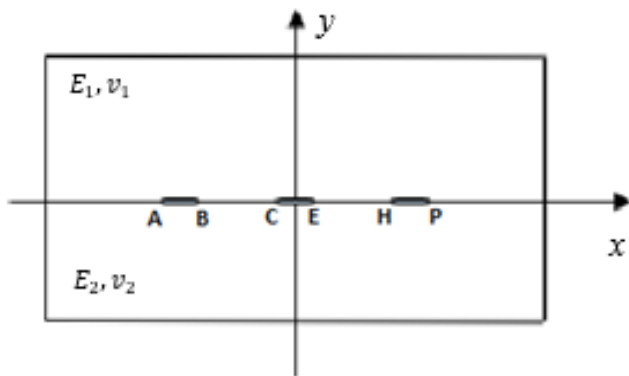


Рис. 1 – Система із трьох тріщин. AB , CE та HP , між двома ізотропними матеріалами.

Будемо використовувати метод скінченно-елементного розв'язку задачі, який реалізовано в програмному комплексі Abaqus. Як було зазначено раніше, аналітичний підхід, що використовувався для нескінченної пластини не може бути безпосередньо застосований для скінченної області, тому в Abaqus ми повинні створити модель пластини із урахуванням границь розрахункової області.

Геометричні параметри моделі. Спочатку було створено двовимірну модель пластини із розмірами по координаті x (-2000, 2000) та по координаті y (-1500, 1500). Область з такими розмірами в подальшому будемо називати «Пластина 1». Вибір таких розмірів пластини забезпечує коректне моделювання та мінімізує вплив граничних умов на розподіл напружень і деформацій у безпосередній близькості до тріщин. Розташування тріщин визначається такими координатами: перша тріщина AB — (-400, -380), друга CE — (-10, 10), третя HP — (380, 400). Вибір розмірів

моделі пов'язаний з можливістю подальшого порівняння з аналітичним розв'язком, отриманим для необмеженої області. Для коректності такого порівняння мінімальна відстань до границь має перевищувати розмір критичної області (область тріщин) принаймні у 5 разів [17]. Отже, для нашої задачі область тріщин AP , розташована в межах від -400 до 400, тому відстань від початку координат до країв моделі вздовж осі x обирається такою, щоб вона була п'ятикратною півдовжині області тріщин.

Усі тріщини вважаються математичними розрізами без початкового розкриття, що характерно для розгляду більшості проблем механіки руйнування [1-3, 6]. Такий підхід дозволяє спростити чисельний аналіз, а також забезпечити можливість коректного порівняння з аналітичними розрахунками.

Таке співвідношення дозволяє мінімізувати граничні ефекти, які можуть вплинути на розрахунок напружено-деформованого стану навколо тріщин. Тут і в подальшому усі лінійні розміри подаються в міліметрах і за потреби можуть масштабуватися для інших систем одиниць.

Механічні властивості матеріалів. Модель пластини складається з двох зон, які мають різні механічні властивості. Пластина поділена віссю x , саме там відбувається контакт двох матеріалів. Верхня частина пластини має такі характеристики: модуль Юнга

$E_1 = 10^{10}$ Па, коефіцієнт Пуассона $\nu_1 = 0.3$. Нижня частина пластини виготовлена з матеріалу із модулем Юнга

$E_2 = 10^{11}$ Па та тим же коефіцієнтом Пуассона $\nu_2 = 0.3$. Таке поєднання матеріалів дозволяє врахувати неоднорідну механічну структуру моделі і вплив матеріальних параметрів на розвиток тріщин. До пластини прикладене однорідне розтягуюче механічне навантаження величиною 10 МПа, що діє вздовж осі y . Це навантаження може спричинити розвиток тріщин та дозволяє аналізувати можливість руйнування матеріалу в умовах напруженого стану.

Створення моделі в Abaqus. Першим кроком чисельного моделювання є побудова геометрії пластини в програмному комплексі Abaqus. Для цього створюється двовимірний модель з відповідними координатами та механічними властивостями матеріалів, які були описані вище. Пластина поділяється на дві зони для кожного матеріалу з окремо визначеними механічними властивостями. Тріщини моделюються як лінійні розриви з берегами, на які не діє безпосереднє навантаження, при цьому початкове розкриття тріщин вважається нульовим.

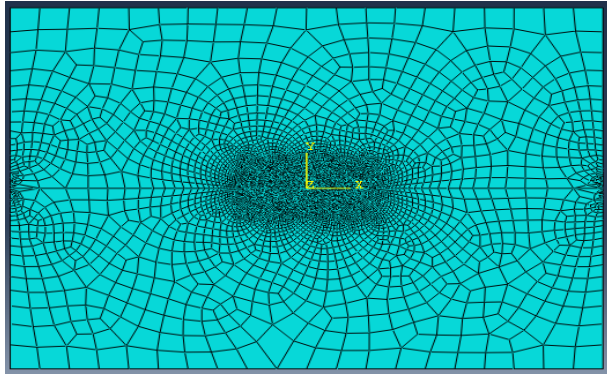


Рис.3а – Загальний вид сітки

Дискретизація моделі та створення сітки. Одним із найважливіших етапів чисельного моделювання є побудова якісної сітки скінченних елементів. Для цього використовувалась восьмивузлова сітка Лагранжевого типу, що забезпечує необхідну точність моделювання зв'язків між елементами та механічних властивостей матеріалів. Проте, оскільки основною метою моделювання було визначення J -інтеграла, що відображає швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) під час росту тріщини, і є критичним параметром для оцінки стійкості матеріалу до руйнування, стандартної сітки недостатньо.

Тому особливу увагу було приділено побудові адаптивної сітки навколо тріщин, оскільки саме в цих зонах концентрація напружень є максимальною. Навколо кожної вершини тріщини було створено концентричні кругові сітки, розбиті на сектори. Всього таких вершин шість, оскільки кожна тріщина має по дві вершини. Загальний вигляд сітки показаний на Рис. 3а, а сітки в околі області тріщин та безпосередньо біля середньої тріщини - на рисунках 3б та 3в, відповідно. На рис. 3в додатково позначені чотири контури, по яких обчислювався J -інтеграл.

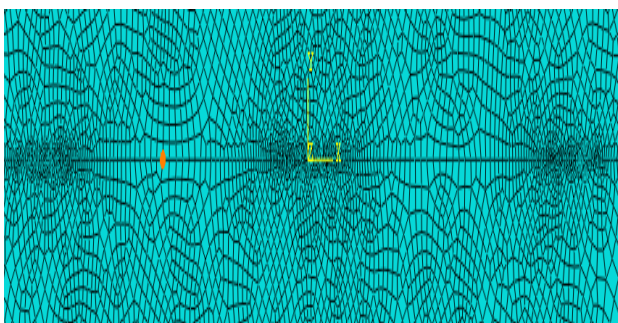


Рис.3б – Вигляд сітки в області тріщин

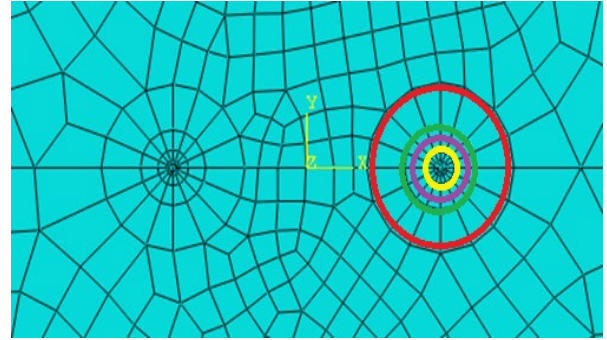


Рис.3в - Вигляд сітки в околі середньої тріщини

Використання кругових елементів із розбиттям на сектори виправдане з кількох причин:

1. Концентрація напружень у вершинах тріщин: В зоні тріщини напруження розподіляються нерівномірно, а мають стрімкий ріст при підході до вершин тріщин. Стандартна прямокутна або трикутна сітка без згущення не може коректно передати цей розподіл, що призводить до похибок в обчисленні J -інтеграла.

2. Адаптивна сітка: Використання концентричних кіл дозволяє зробити сітку більш щільною безпосередньо в зоні тріщини, при цьому зберігаючи більший розмір елементів у віддалених від тріщини ділянках. Це підвищує ефективність обчислень, зменшуючи кількість елементів без втрати точності.

3. Точність обчислень J -інтеграла: Оскільки J -інтеграл є контурним, важливо точно описати розподіл напружень і переміщень на контурах навколо вершин тріщин. Концентричні кругові сітки з секторами ідеально відповідають цій вимозі.

Альтернативні варіанти, такі як просте зменшення розміру елементів стандартної сітки, не могли б забезпечити належної точності без значного збільшення кількості елементів і часу на розрахунок.

Обчислення J -інтегралу. На дискретній скінченно-елементній сітці J -інтеграл обчислюється шляхом чисельного інтегрування по контурах навколо вершин тріщин. В Abaqus це реалізується через спеціальні контурні інтеграли, які використовують напружено-деформований стан у вузлах сітки.

Основні етапи обчислення:

1. Вибір контурів навколо вершини тріщини – створюються кілька замкнених контурів, концентричних до вершини тріщини, що дозволяє оцінити збіжність результатів.

2. Розрахунок енергетичних параметрів – J -інтеграл визначається через величини напружень, деформацій і переміщень, отримані у вузлах сітки.

3. Інтегрування методом Гауса – чисельне інтегрування здійснюється по сегментах кожного контуру, враховуючи елементи сітки.

Цей підхід дозволяє апроксимувати J -інтеграл за допомогою дискретних вузлових значень, забезпечуючи високу точність при достатньому згущенні сітки в зоні тріщини.

Автоматизація процесу моделювання. Для спрощення та пришвидшення процесу моделювання була написана програма на мові Python, яка інтегрована в Abaqus як скрипт. Ця програма дозволяє швидко змінювати параметри тріщин, навантаження та властивості матеріалів, а також автоматично створювати нову сітку для кожної конфігурації. Такий підхід значно знижує витрати часу на налаштування моделі та дозволяє швидко аналізувати різні випадки для типових задач руйнування.

Цей скрипт є особливо корисним для проведення серій чисельних експериментів, оскільки він дозволяє

швидко змінювати ключові параметри, такі як розміри тріщин, відстані між ними та властивості матеріалів. Це дає можливість ефективно досліджувати вплив різних чинників на поведінку тріщин і їхній розвиток у матеріалі.

Обговорення результатів. У даному дослідженні було проведено числовий аналіз трьох тріщин у біматеріалі, що складається з двох ізотропних матеріалів

з різними механічними характеристиками. Характеристики матеріалів, геометричні характеристики та розташування тріщин і навантаження описані вище

Таблиця 1 – Значення J-інтегралів для різних вершин та контурів навколо них для Пластини 1

Контур	Ліва вершина (Л) (Н·м)	Права вершина (Л) (Н·м)	Ліва вершина (Ц) (Н·м)	Права вершина (Ц) (Н·м)	Ліва вершина (П) (Н·м)	Права вершина (П) (Н·м)
1	131.5	128.8	128.8	129.9	134.3	129.2
2	148.4	145.4	145.5	144.2	151.6	145.8
3	148.8	146.2	146.1	144.8	152.1	146.3
4	150.0	147.0	147.0	147.8	153.2	147.3

Розрахунки були здійснені шляхом знаходження J-інтегралів, отриманих на основі чотирьох контурів для кожної вершини тріщини. У таблиці 1 наведені відповідні результати знаходження J-інтегралу. Різні контури дозволяють оцінити інтенсивність напружень і енергію, що звільняється, у залежності від обраного шляху навколо тріщини. Результати наведені для лівої та правої вершин кожної тріщини. При цьому результати для лівої, центральної та правої тріщини позначені літерами «Л», «Ц» та «П», відповідно.

Із наведених результатів видно, що значення, отримані для першого контуру кожної вершини, значно відрізняються від наступних значень для інших

контурів цієї ж вершини. Це пояснюється тим, що перші контури знаходяться дуже близько до вершин, де має місце дуже великий градієнт напружень і похідних від переміщень. Але значення на наступних контурах демонструють більш рівномірну поведінку і можуть бути використані в якості наближених значень J-інтегралів для відповідних вершин.

Були також проведені чисельні розрахунки для аналізу впливу розмірів пластины на критичні параметри тріщин. Вони були виконані у програмі Abaqus для двох конфігурацій пластины, параметри яких описані в заголовках таблиць 2 і 3:

Таблиця 2 – Значення J-інтегралів для різних вершин та контурів навколо них для пластины розміром від -600 до 600 по осі x та від -450 до 450 по осі y (пластина 2).

Контур	Ліва вершина (Л) (Н·м)	Права вершина (Л) (Н·м)	Ліва вершина (Ц) (Н·м)	Права вершина (Ц) (Н·м)	Ліва вершина (П) (Н·м)	Права вершина (П) (Н·м)
1	144.8	141.4	130.7	129.4	144.0	142.9
2	163.3	159.7	147.6	146.0	162.7	161.2
3	163.8	160.4	148.2	146.5	163.2	161.8
4	165.0	161.4	149.1	147.6	164.3	163.0

Таблиця 3 – Значення J-інтегралів для різних вершин та контурів навколо них для пластины розміром від від -500 до 500 по осі x та від -200 до 200 по осі y (пластина 3).

Контур	Ліва вершина (Л) (Н·м)	Права вершина (Л) (Н·м)	Ліва вершина (Ц) (Н·м)	Права вершина (Ц) (Н·м)	Ліва вершина (П) (Н·м)	Права вершина (П) (Н·м)
1	148.0	146.2	137.1	140.4	146.4	147.3
2	166.9	165.1	154.8	158.4	165.4	166.2
3	167.4	165.9	155.4	158.9	165.9	166.8
4	168.6	166.9	156.4	160.1	167.0	168.0

Метою даного експерименту була перевірка впливу розмірів пластини та, відповідно, відстані від крайніх тріщин до меж пластини на значення J-інтегралу. Ці значення для різних вершин та контурів навколо них наведені в табл. 2 і табл. 3.

Порівняння результатів для трьох різних розмірів пластини показало, що зменшення відстані між тріщинами і межами пластини призводить до

збільшення значень J-інтегралів особливо для тріщин, які найближче прилягають до меж пластини. Це свідчить про те, що при меншій відстані до країв пластини напружений стан біля тріщин стає більш інтенсивним, що може прискорити їх поширення.

Для зручності порівняння основні результати для усіх трьох розмірів пластини зведені у таблиці 4

Таблиця 4 – Результати знаходження J-інтегралу для біматеріальної області різних розмірів.

Контур	Ліва вершина (I) (Н·м)	Права вершина (I) (Н·м)	Ліва вершина (II) (Н·м)	Права вершина (II) (Н·м)	Ліва вершина (III) (Н·м)	Права вершина (III) (Н·м)
1	148.0	146.2	137.1	140.4	146.4	147.3
2	166.9	165.1	154.8	158.4	165.4	166.2
3	167.4	165.9	155.4	158.9	165.9	166.8
4	168.6	166.9	156.4	160.1	167.0	168.0

Результати в табл. 4 відповідають розрахункам J-інтегралу по четвертому контуру. Вибір четвертого контуру зумовлений тим, що ближчі до вершини тріщини контури як правило дають менш точні результати через швидко змінні локальні деформації та напруження, що виникають навколо вершини тріщини. При цьому четвертий контур обирається достатньо близьким до відповідної вершини тріщини, щоб з найбільшою можливою точністю описати напружено-деформований стан у зоні навколо тріщини.

Для випадку, коли розмір області набагато більший області тріщин (пластина I) проведено порівняння чисельних результатів, наведених у першому рядку Табл. 4, з аналітичними. Результати обчислення швидкості звільнення енергії, для такої ж системи тріщин і такого ж навантаження отримані аналітично в статті [16] і згідно з результатами цієї статті значення ШЗЕ для усіх вершин тріщин є однаковими і дорівнюють 152,06 Н·м. Порівняння показує, що отримані чисельні результати добре узгоджуються з аналітичними. Найбільша відмінність між ними має місце в лівій вершині середньої тріщини і складає 3,42%. Ця відмінність пов'язана в першу чергу з тим, що виконується порівняння результатів розрахунків для нескінченної і скінченної біматеріальних областей.

Порівняння розкриття центральної тріщини для пластин різних розмірів. На графіку рис.4 представлені результати моделювання розкриття центральної тріщини для пластин різних розмірів. Лініями I та II позначено переміщення верхнього і нижнього берегів тріщини, відповідно, для пластини з розмірами -600 до 600 по осі x і -450 до 450 по осі y, а III та IV — такі ж характеристики для пластини з меншими розмірами: -500 до 500 по осі x і -200 до 200 по осі y. Аналіз показує, що розкриття тріщини для меншої пластини (лінії III та IV) є більшим, що пов'язано зі зменшенням загальної жорсткості

пластини через її менші геометричні розміри. Це зумовлює більш локальну концентрацію напружень у зоні тріщини, що призводить до інтенсивного розкриття. У меншій пластині градієнт деформацій в зоні тріщини є вищим, тоді як у більшій пластині розподіл напружень є більш рівномірним завдяки її значним розмірам.

Важливо також зазначити, що менша висота пластини (-200 до 200 по осі y) збільшує вплив граничних умов на зону тріщини, що посилює розкриття.

Таким чином, геометричні параметри пластини та її матеріальні властивості суттєво впливають на характер розкриття тріщини, визначаючи його інтенсивність і зону впливу.

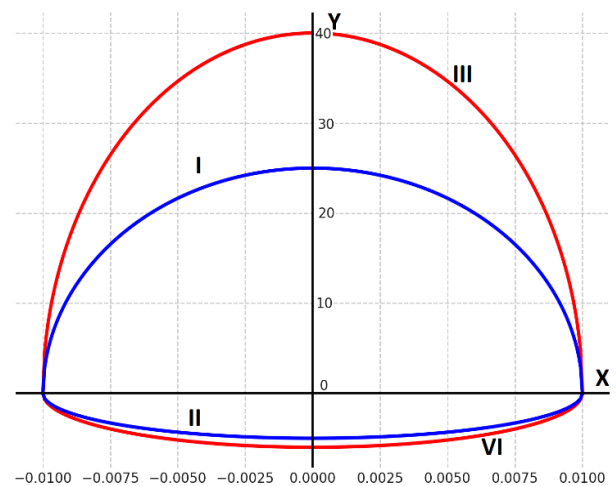


Рис 4. - Порівняння розкриття центральної тріщини

Висновки. Проведено чисельне дослідження задачі плоскої деформації біматеріалу складеного із двох різновидних прямокутників з трьома колінеарними тріщинами, розташованими вздовж межі розділу матеріалів, під впливом віддалених

рівномірно розподілених розтягуючих напружень, ортогональних берегах тріщин. Застосовувався метод скінченних елементів з використанням пакету Abaqus. Для спрощення та пришвидшення процесу моделювання була написана програма на мові Python, яка інтегрована в Abaqus як скрипт. Ця програма дозволяє швидко змінювати параметри тріщин, навантаження та властивості матеріалів, а також автоматично створювати нову сітку для кожної конфігурації. Такий підхід значно знижує витрати часу на налаштування моделі та дозволяє швидко аналізувати різні випадки для типових задач руйнування. При побудові сітки проводилось зменшення розміру елементів при підході до тріщин і особливо до їх вершин.

Спочатку вважалось, що розмір області набагато більший сумарної довжини тріщин. Значення швидкостей звільнення енергії, отримані в цьому випадку, порівнювались з аналітичними розв'язками для нескінченної біматеріальної області з таким же розташуванням тріщин і таким же навантаженням. Встановлено їх хороша узгодженість, що підтверджує правильність методик що застосовуються. Проведені розрахунки також для областей, границі яких наближаються до тріщин. Встановлено зростання ШЗЕ для вершин тріщин, які є найближчими до границь області. Слід також відзначити що для тріщин, які розташовані на значній відстані одна від одної, чисельні результати для розкриття та ШЗЕ демонструють узгодженість із значеннями, отриманими для однієї тріщини. Це означає, що при значних відстанях між тріщинами можна використовувати результати розрахунків, отримані для поодиноких тріщин.

Список літератури

1. Hu K. Q., Jin H., Yang Z., Chen X. Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect // *Acta Mechanica*. – 2019. – Vol. 230. – P. 2455–2474. DOI: 10.1007/s00707-019-02404-z.
2. Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M. A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings // *Acta Mech.* – 2019. – Vol. 230, no. 6. – P. 1999–2012. DOI: 10.1007/s00707-019-2364-y.
3. Govorukha V., Kamlah M., Sheveleva A. Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field // *Acta Mechanica*. – 2015. – Vol. 226. – P. 2379–2391. DOI: 10.1007/s00707-015-1329-z.
4. Адлущкий В. Я., Левченко М. С., Лобода В. В. Скінченноелементний аналіз параметрів руйнування в п'єзоелектричному біматеріалі з міжфазною тріщиною при різних типах граничних умов на її берегах // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2021. – 64, № 4. – С. 55–67.
5. Levchenko M., Lapusta Y., Loboda V. 3-D analysis of a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials // *Procedia Structural Integrity*. – 2024. – Vol. 59. – P. 724–730. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.04.103.
6. Rice J. R., Sih G. C. Plane problems of cracks in dissimilar media // *J. Appl. Mech.* – 1965. – Vol. 32. – P. 418–423. DOI: 10.1115/1.3625818.
7. Clech J. P., Keer L. M., Lewis J. L. An array of no-slip tensile cracks at a bimaterial interface // *Eng. Fract. Mech.* – 1986. – Vol. 23. – P. 889–911. DOI: 10.1016/0013-7944(86)90066-9.
8. Hwu C. Explicit solutions for collinear interface crack problems // *Int. J. Solids Struct.* – 1993. – Vol. 30. – P. 301–312. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90088-P.
9. Noda N., Oda K. Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks // *Int. J. of Fract.* – 1997. – Vol. 84. – P. 117–128. DOI: 10.1023/A:1007351114563.
10. Hu Y., Huang Y., Zhong W. Collinear periodic cracks in anisotropic bimaterials // *Int. J. of Fract.* – 1997. – Vol. 85. – P. 69–80. DOI: 10.1023/A:1007327904309.
11. Boniface V., Banks-Sills L. Stress intensity factors for finite interface cracks between a special pair of transversely isotropic materials // *Transactions of the ASME*. – 2002. – Vol. 69. – P. 230–239. DOI: 10.1115/1.1456458.
12. Tafreshi A. Analytical stress intensity factors and Jk-integrals of periodic and collinear interface cracks between dissimilar orthotropic materials // *Fatigue Fract Eng Mater Struct.* – 2021. – Vol. 44. – P. 317–332. DOI: 10.1111/ffe.13367.
13. Verma P. R. Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2022. – Vol. 29. – P. 1529–1542.
14. Hu K. Q., Gao C.-F., Zhong Z., Chen Z. T. Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 2021. – Vol. 101, no. 11. DOI: 10.1002/zamm.202000360.
15. Босіло Р. Р., Лобода В. В. Біматеріальна площа з трьома міжфазними тріщинами // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. – 2023. – вип. 36, № 1. – С. 12–24. DOI: 10.15421/4223102.

References (transliterated)

1. Hu, K. Q., Jin H., Yang Z., Chen X. "Interface crack between dissimilar one-dimensional hexagonal quasicrystals with piezoelectric effect." *Acta Mechanica*, vol. 230, 2019, pp. 2455–2474, DOI:10.1007/s00707-019-02404-z.
2. Govorukha, V., Sheveleva, A., and Kamlah, M. "A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings." *Acta Mechanica*, vol. 230, no. 6, 2019, pp. 1999–2012, DOI:10.1007/s00707-019-2364-y.
3. Govorukha, V., Kamlah, M., and Sheveleva, A. "Influence of concentrated loading on opening of an interface crack between piezoelectric materials in a compressive field." *Acta Mechanica*, vol. 226, 2015, pp. 2379–2391, DOI:10.1007/s00707-015-1329-z.
4. Adlutskiy, V. Ya., Levchenko, M. S., and Loboda, V. V. "Skinchennoelementnyi analiz parametriv ruynuvannya v p'ezoelektrychnomu bimateriali z mizhfaznoiu trishchynoiu pry riznykh typakh hranychnykh umov na yii berehakh." *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia*, vol. 64, no. 4, 2021, pp. 55–67.
5. Levchenko, M., Lapusta, Y., and Loboda, V. "3-D analysis of a crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials." *Procedia Structural Integrity*, vol. 59, 2024, pp. 724–730, DOI:10.1016/j.prostr.2024.04.103.
6. Rice, J. R., and Sih, G. C. "Plane problems of cracks in dissimilar media." *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32, 1965, pp. 418–423, DOI:10.1115/1.3625818.
7. Clech, J. P., Keer, L. M., and Lewis, J. L. "An array of no-slip tensile cracks at a bimaterial interface." *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 23, 1986, pp. 889–911, DOI:10.1016/0013-7944(86)90066-9.
8. Hwu, C. "Explicit solutions for collinear interface crack problems." *International Journal of Solids and Structures*, vol. 30, 1993, pp. 301–312, DOI:10.1016/0020-7683(93)90088-P.
9. Noda, N., and Oda, K. "Interaction effect of stress intensity factors for any number of collinear interface cracks." *International Journal of Fracture*, vol. 84, 1997, pp. 117–128, DOI:10.1023/A:1007351114563.
10. Hu, Y., Huang, Y., and Zhong, W. "Collinear periodic cracks in anisotropic bimaterials." *International Journal of Fracture*, vol. 85, 1997, pp. 69–80, DOI:10.1023/A:1007327904309.
11. Boniface, V., and Banks-Sills, L. "Stress intensity factors for finite interface cracks between a special pair of transversely isotropic materials." *Transactions of the ASME*, vol. 69, 2002, pp. 230–239, DOI:10.1115/1.1456458.

12. *Tafreshi, A.* "Analytical stress intensity factors and Jk-integrals of periodic and collinear interface cracks between dissimilar orthotropic materials." *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, vol. 44, 2021, pp. 317–332, DOI:10.1111/ffe.13367.
13. *Verma, P. R.* "Magnetic-yielding zone model for assessment of two mode-III semi-permeable collinear cracks in piezo-electro-magnetic strip." *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 29, 2022, pp. 1529–1542.
14. *Hu, K. Q., Gao, C.-F., Zhong, Z., and Chen, Z. T.* "Interaction of collinear interface cracks between dissimilar one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystals." *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 101, no. 11, 2021, DOI:10.1002/zamm.202000360.
15. *Voiedilo, R. R., and Loboda, V. V.* "Bimaterialna ploshchyna z troma mizhfaznymi trishchynamy." *Problemy obchysliuvanoi mekhaniky i mitsnosti konstruktсии*, no. 36, issue 1, 2023, pp. 12–24, DOI:10.15421/4223102.

Надійшла (received) 26.11.2024

Відомості про авторів/ About the Authors

Воєділо Роман (Roman Voiedilo) – аспірант, кафедра теоретичної та комп’ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м.Дніпро, ORCID: 0009-0002-2802-3864, е-мейл: roman.voyedilo@gmail.com

Лобода Володимир (Loboda Volodymyr) - д.ф.-м.н., професор, кафедра теоретичної та комп’ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м.Дніпро, ORCID: 0000-0002-0432-629X, е-мейл: loboda@dmu.dp.ua