

Ю. А. ПЛАКСІЙ

**ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ НА СФЕРИЧНІЙ МОДЕЛІ КУТОВОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА**

Стаття присвячена проблемі підвищення точності визначення орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації рухомих об'єктів за рахунок удосконалення існуючих алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації. Розглядається задача чисельно-аналітичної оптимізації трьох алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації за рахунок уточнення коефіцієнтів в структурі алгоритмів. З них два алгоритми використовують в якості «проміжного параметра» вектор орієнтації, третій алгоритм заснований на розкладенні розв'язку кінематичного кватерніонного рівняння в ряд по степеням вектора позірного повороту. Уточнення коефіцієнтів в алгоритмах відбувається на основі комп'ютерного моделювання і програмно-чисельної мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу із застосуванням в якості модельного тестового руху аналітичної еталонної моделі обертого руху твердого тіла в послідовності кутів Крилова, що змінюються в часі за лінійним законом. Для цього модель тестового руху доповнюється моделюванням ідеальної інформації з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат з використанням аналітичних формул для вектора позірного повороту. Експериментально показано, що похибка накопиченого обчислювального дрейфу на застосованій еталонній моделі обертого руху має лінійний закон зростання з часом для всіх неоптимізованих алгоритмів, що розглядаються. В результаті чисельного експерименту отримані нові значення коефіцієнтів в структурах алгоритмів, що мінімізують похибку накопиченого дрейфу і покращують характеристики тренду цієї похибки. Проведена оптимізація призводить до зменшення на порядок максимального модуля похибки накопиченого дрейфу і змінення лінійно-зростаючого характеру залежності величини похибки обчислювального дрейфу від часу на коливально-незростаючий характер. Наводяться результати проведеного обчислювального експерименту

**Ключові слова:** кути Крилова, вектор орієнтації, кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, алгоритм орієнтації, чисельно-аналітичне моделювання, обчислювальний дрейф.

The paper is devoted to the problem of increasing the accuracy of determining the orientation in strapdown attitude control systems for moving objects by improving the existing algorithms for determining orientation quaternions. The problem of numerical and analytical optimization of three algorithms for determining orientation quaternions by refining the coefficients in the structure of the algorithms is considered. Two of them use the orientation vector as an intermediate parameter, the third algorithm is based on the expansion of the solution of the kinematic quaternion equation in a series in powers of the apparent rotation vector. The coefficients in the algorithms are refined based on computer modeling and software-numerical minimization of the error of the accumulated computational drift using an analytical model of the rotational motion of a rigid body in a sequence of Krylov angles changing in time according to a linear law as a model test motion. For this purpose, the test motion model is supplemented by modeling ideal information at the outputs of the angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates using analytical formulas for the apparent rotation vector. It is experimentally shown that the accumulated computational drift error on the applied reference model of rotational motion has a linear growth law over time for all considered non-optimized algorithms. As a result of the numerical experiment, new values of the coefficients in the algorithm structures are obtained, minimizing the accumulated drift error and improving the characteristics of the trend of this error. The optimization performed leads to a decrease in the maximum modulus of the accumulated drift error by an order of magnitude and a change in the linearly increasing nature of the dependence of the computational drift error on time to an oscillatory non-growing nature. The results of the computational experiment are presented.

**Keywords:** Krylov angles, orientation vector, quaternion, reference model, test motion, quasi-coordinates, orientation algorithm, numerical analytical modeling, computational drift.

**Вступ.** Розглядається задача точного аналізу і оптимізації алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації в безплатформених інерціальних системах орієнтації (БІСО), яка зазвичай має місце на етапі проектування системи орієнтації рухомого об'єкта. На теперішній час розроблено велику кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації на основі ідеальної інформації з тріади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат [1-6]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де  $\omega_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості  $\vec{\omega}(t)$  на осі зв'язаної з рухомих об'єктом системи координат. Роботи з розробки і удосконалення математичних формул відомих алгоритмів велися і тривають дотепер [7, 8].

Найбільш поширене застосування в алгоритмах безплатформеної орієнтації рухомих об'єктів в якості параметрів орієнтації отримали кватерніони, для яких кінематичне рівняння є лінійним, має перший інтеграл, а операції перетворення векторів легко виконуються за допомогою алгебри кватерніонів. Однак, розкладення кватерніонного кінематичного рівняння в ряд в термінах квазікоординат (1) призводить до низки однокрокових алгоритмів, які

практично обмежуються четвертим порядком точності. При цьому алгоритми третього і четвертого порядку вимагають спеціальної «розгонки». Ці обставини, а також жорсткі вимоги до точності алгоритмів призвели до використання в якості «проміжного параметра» вектора орієнтації [1,2,7-12]. Значний доробок в розробку алгоритмів обчислення вектора орієнтації різного порядку в Україні належить А. Панову [5,9,10,12,13]. Використання вектора орієнтації теоретично дозволяє підвищити точність визначення поточної орієнтації за рахунок використання додаткової інформації про квазікоординати всередині такту обчислень, що є особливо важливим для високодинамічних об'єктів [14]. Більшість розроблених алгоритмів визначення приросту вектора орієнтації на такті обчислень заснована на поліноміальній апроксимації вектора кутової швидкості всередині такту обчислень з використанням наближеного рівняння Борца [15] для моделі кінчного руху твердого тіла. Відомо, що оптимізовані під кінчний рух алгоритми втрачають певний порядок точності в умовах інших обертого руху. Практичний інтерес для точного аналізу алгоритмів орієнтації представляють розробки тестових рухів, відмінних від кінчного. В роботах

[16-22] запропоновані формальні аналітичні моделі обертального руху твердого тіла, які засновані на представленнях модельного кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій кутів, що змінюються з часом за лінійним законом і не є кутами в послідовності Ейлера.

В даній роботі наводяться результати оптимізації трьох відомих алгоритмів орієнтації на формальній моделі сферичного руху твердого тіла, яка побудована на послідовності кутів Крилова, що змінюються з часом за лінійним законом.

**Модель сферичного руху твердого тіла в послідовності кутів Крилова.** Розглянемо модель обертального руху твердого тіла, яка відповідає послідовності елементарних поворотів навколо координатних осей у випадку Крилова. Кватерніон результуючого повороту має вигляд:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3, \quad (2)$$

$$\text{де } \Lambda_1 = \left( \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\Lambda_2 = \left( \cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_2 \sin \frac{\psi}{2} \right),$$

$$\Lambda_3 = \left( \cos \frac{\nu}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\nu}{2} \right),$$

$\varphi, \psi, \nu$  - кути курсу, крену і тангажу.

У випадку, коли кути змінюються лінійно за часом:  $\varphi(t) = k_1(t)$ ,  $\psi(t) = k_2(t)$ ,  $\nu(t) = k_3(t)$ , компоненти кватерніона (2) мають вигляд [17]:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \\ \lambda_1 &= c_1 \cdot c_2 \cdot s_3 - s_1 \cdot s_2 \cdot c_3, \\ \lambda_2 &= c_1 \cdot s_2 \cdot c_3 + s_1 \cdot c_2 \cdot s_3, \\ \lambda_3 &= s_1 \cdot c_2 \cdot c_3 - c_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \end{aligned} \quad (3)$$

де позначено:  $c_i = \cos \left( \frac{k_i t}{2} \right)$ ,  $s_i = \sin \left( \frac{k_i t}{2} \right)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $k_i$  - постійні величини, які можна інтерпретувати як деякі частоти.

Кватерніону орієнтації (3) згідно кінематичного рівняння відповідають наступні залежності для проєкцій вектора кутової швидкості на зв'язані осі:

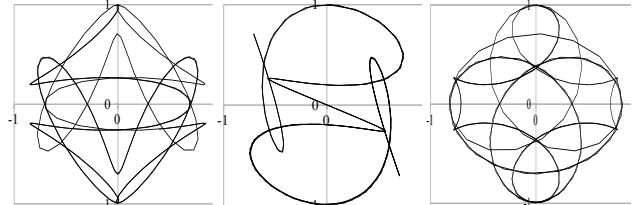
$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 - k_1 \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cos(k_2 t) \sin(k_3 t) + k_2 \cos(k_3 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cos(k_2 t) \cos(k_3 t) - k_2 \sin(k_3 t). \end{aligned} \quad (4)$$

Представлені аналітичні залежності від часу для компонент кватерніону орієнтації (3) і проєкцій вектора кутової швидкості (4) можна інтерпретувати, як відповідні аналітичні розв'язки системи динамічного і кінематичного рівнянь обертального руху твердого тіла. Але при цьому модель (3), (4), як і відома модель кінчного руху, є формальною, оскільки не можна наперед вказати моменти інерції твердого тіла, для якого ці розв'язки мають місце. В роботі [17] на основі аналізу побудованих траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації показано, що модель в лінійних кутах Крилова описує

більш складний обертальний рух, ніж відома модель кінчного руху.

На рис.1 представлені траєкторії  $\lambda_i(\lambda_0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  в конфігураційному просторі параметрів орієнтації, які побудовані на основі чисельного експерименту для кінематичної моделі (2) на інтервалі часу  $t \in [0, 200]$ с при значеннях частот

$$k_1 = 0.15, k_2 = 0.25, k_3 = 0.05.$$



$\lambda_1(\lambda_0)$

$\lambda_2(\lambda_0)$

$\lambda_3(\lambda_0)$

Рис. 1 - Траєкторії в конфігураційному просторі для моделі сферичного руху твердого тіла

**Алгоритми орієнтації, вибрані для оптимізації на моделі сферичного руху в кутах Крилова**

1. Алгоритм А1 (R. Miller [1]). В цьому алгоритмі приріст вектора орієнтації

$$\vec{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2}, \theta_{n3})$$

на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^{(1)} \times \vec{\theta}_n^{(3)}) + \beta \vec{\theta}_n^{(2)} \times (\vec{\theta}_n^{(3)} - \vec{\theta}_n^{(1)}), \quad (5)$$

$$\vec{\theta}_n^{(1)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(2)} = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt,$$

$$\vec{\theta}_n^{(3)} = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$$

- вихідні сигнали гіроскопів, що формуються всередині такту обчислень в моменти часу

$$t_{n-1} + 1/3 \Delta T, t_{n-1} + 2/3 \Delta T, t_{n-1} + \Delta T,$$

$\Delta T$  - величина такту обчислень,

$$\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*).$$

R. Miller на основі оптимізації під кінчний рух отримав, що

$$\alpha + \beta = 90/80, \alpha = 33/80, \beta = 57/80.$$

2. Алгоритм А2 (А. Панов [5]). В цьому двокороковому алгоритмі приріст вектора орієнтації на такті обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^{(4)} \times \vec{\theta}_n^*), \quad (6)$$

$$\text{де } \vec{\theta}_n^{(4)} = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/2\Delta T} \vec{\omega}(t) dt, \alpha = 2/3.$$

Для знаходження числового значення поточного кватерніона орієнтації  $\Lambda_n^*$  за допомогою алгоритмів А1 і А2, використаємо формулу додавання поворотів

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^*$$

де скалярна  $\Delta\lambda_{n0}^*$  і векторна  $\vec{\Delta\lambda}_n^*$  частини кватерніону повороту  $\Delta\Lambda_n^*$  обчислюються на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  за формулами:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{n0}^* &= 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4, \\ \vec{\Delta\lambda}_n^* &= (1/2)\vec{\theta}_n(1 - \theta_n^2/24), \quad i = 1,2,3, \quad (7) \\ \text{де } \theta_n^2 &= \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2. \end{aligned}$$

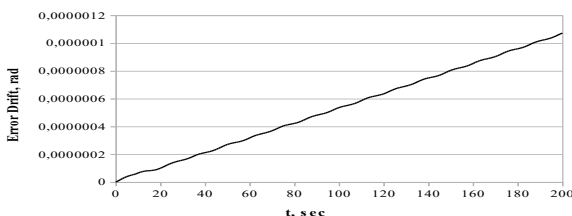
Зазначимо, що формули (7) забезпечують разом з алгоритмами A1 і A2 4-й порядок точності визначення кватерніона повороту.

3. Алгоритм 3 [6].]. Цей двокроковий степеневий алгоритм має 4 порядок точності, не використовує проміжні параметри і має наступні робочі формули для визначення компонент кватерніону повороту на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ :

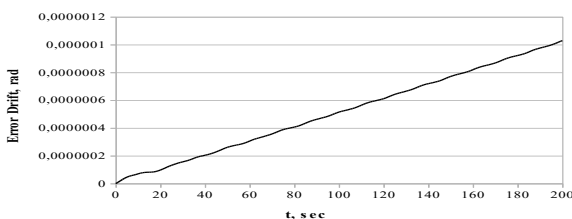
$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{n0}^* &= 1 - (1/8)\theta_n^{*2} + (1/384)\theta_n^{*4}, \\ \vec{\Delta\lambda}_n^* &= (1/2)\vec{\theta}_n^*(1 - \theta_n^{*2}/24) + \alpha(\vec{\theta}_n^{(4)} \times \vec{\theta}_n^*), \quad (8) \\ \text{де } \alpha &= 1/3. \end{aligned}$$

**Оптимізація алгоритмів орієнтації на моделі сферичного руху в кутах Кривола.** Розглянемо чисельну реалізацію аналітичної моделі обертового руху, яка описується формулами (3), (4) при значеннях частот  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.25$ ,  $k_3 = 0.05$ . На рис.2 представлені графіки залежностей від часу накопиченої похибки дрейфу для алгоритмів A1, A2, A3 на інтервалі часу  $t \in [0,200]$  с, такт обчислень

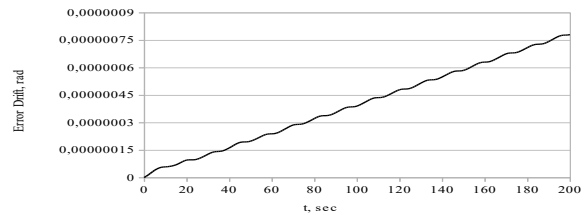
$$\Delta t = 0.1 \text{ с.}$$



а



б



с

Рис. 2 – Залежність накопиченої похибки дрейфу від часу (а – для Алгоритму 1; б – для Алгоритму 2; с – для Алгоритму 3)

Експериментально отримано, що для всіх алгоритмів, що розглядаються, похибка накопиченого обчислювального дрейфу має тренд лінійного зростання з часом. В таблиці 1 представлені максимальні значення похибки накопиченого дрейфу для алгоритмів A1, A2, A3 на інтервалі  $t \in [0,200]$  с.

Таблиця 1 - Максимальне значення похибки накопиченого дрейфу, рад

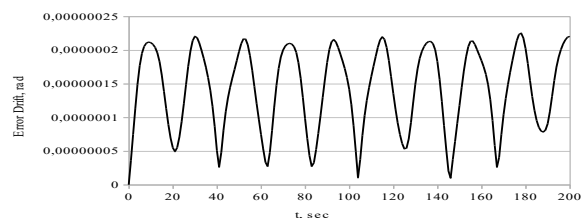
Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
1.073E-06	1.029E-06	0.78E-06

Оптимізація алгоритмів, що розглядаються, на основі мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу проводилася за рахунок уточнення коефіцієнтів в формулах алгоритмів. При цьому отримано, що для алгоритму A1, на відміну від інших алгоритмів, значення уточнених коефіцієнтів суттєво відрізняються від початкових. Значення уточнених коефіцієнтів для опрацьованих алгоритмів наведені в таблиці 2.

Таблиця 2 - Значення уточнених коефіцієнтів в алгоритмах

Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
$\alpha = -\frac{151}{20}, \beta = \frac{347}{40}$	$\alpha = \frac{4000321}{6000000}$	$\alpha = \frac{99994}{300000}$

На рис.3 представлений графік залежності від часу похибки накопиченого обчислювального дрейфу для оптимізованих алгоритмів.



а

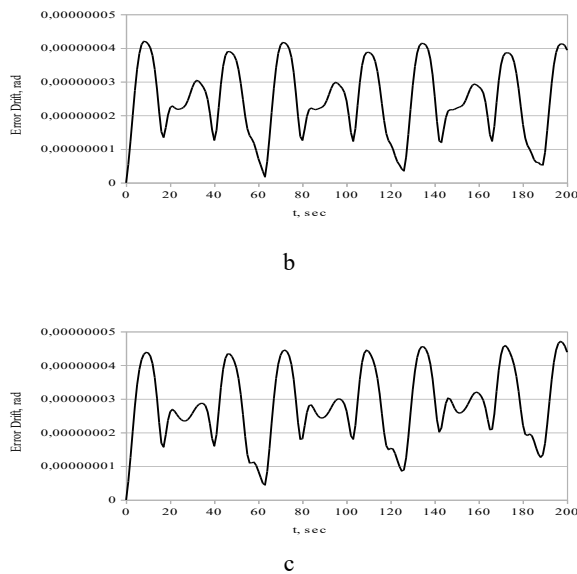


Рис. 3 - Залежність похибки накопиченого дрейфу від часу для оптимізованих алгоритмів (а – для алгоритму А1; б – для алгоритму А2; с – для алгоритму А3)

Проведений чисельний експеримент показав, що похибка накопиченого обчислювального дрейфу для всіх оптимізованих алгоритмів має коливальний характер на відміну від лінійно зростаючої похибки для неоптимізованих алгоритмів. При цьому максимальне значення похибки практично не зростає з часом.

В таблиці 3 представлені максимальні значення похибки накопиченого дрейфу для оптимізованих алгоритмів на інтервалі часу  $t \in [0, 200]$  с. Отримано, що в результаті оптимізації під конкретний рух, спостерігається суттєве зменшення похибки орієнтації

Таблиця 3 - Максимальне значення похибки накопиченого дрейфу, рад.

алгоритм 1	алгоритм2	алгоритм 3
0.225E-06	0.421E-07	0.471E-07

**Висновки.** Розроблена комп'ютерна програма, яка дозволяє отримувати з заданим тактом обчислень сферичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритма орієнтації і отримувати оцінку накопиченого дрейфу. На основі чисельного експерименту з використанням аналітичної моделі сферичного руху твердого тіла в послідовності кутів Крилова, що змінюються лінійно з часом, проведений точносний аналіз представлених алгоритмів орієнтації і отримані оцінки похибки накопиченого обчислювального дрейфу. На основі мінімізації похибки накопиченого обчислювального дрейфу були знайдені уточнені значення коефіцієнтів в алгоритмах. Експериментально доведено, що проведена оптимізація призводить до зменшення на порядок максимального значення похибки накопиченого обчислювального дрейфу і покращення тенденції змінення цієї похибки з часом. При цьому залежність вказаної похибки від часу приймає

коливальний характер на відміну від лінійно зростаючої з часом похибки для неоптимізованих алгоритмів.

#### Список літератури

1. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. Pp.287–291.
2. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics. Vol.13. No 2, 1990. Pp.363–369.
3. Tang C., Chen J., Chen L., Jiang H., Cui B. An Efficient Angular Rate Coning Algorithm for SINS// 2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference, Xiamen, China, 2018, Pp. 1-5. doi: 10.1109/GNCC42960.2018.9019067.
4. Zhang Z., Geng L., Fan Y. Performance Analysis of Three Attitude Algorithms for SINS// Academic Journal of Computing & Information Science (2022), Vol. 5, Issue 12: Pp.1-5. <https://doi.org/10.25236/AJCS.2022.051201>.
5. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной навигации. Київ.: Наук. Думка. 1995. 280 с.
6. Плакцій Ю. А. Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації// Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. №58 (1031). Харків. 2013. С.168–177.
7. Tang C., Chen J. A Class of Coning Algorithms Based on a Half-Compressed Structure//Sensors 2014. 14(8). Pp.14289-14301. <https://doi.org/10.3390/s140814289>.
8. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm //International Journal of Innovative Computing, Information and Control. Vol.9. No 8, 2013. Pp. 3449-3462.
9. Панов А. П. Оптимізація методів визначення кватерніонів при конічних коливаннях твердого тіла // Мех. гіроск. систем. Вып. 3. Київ. 1984. С. 105–112.
10. Панов А. П. Оптимізація високоточних алгоритмів визначення кватерніонів в случае прещесии твердого тіла // Кибернет. и вычисл. техн. Вып. 73. Київ. 1987. С. 3–9.
11. Guo X., Liu X., Yan J., Wang Y., Zeng J., Pan S. New rotation vector algorithm based on a high-order polynomial //IET Radar, Sonar & Navigation. Volume 14, Issue 1. 2020. Pp. 133-137. <https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2019.0286>
12. Панов А. П. Асимптотические оценки погрешностей методів визначення параметрів орієнтації твердого тіла // Кибернетика и вычисл. техника. Вып. 47. Київ. 1980. С. 59-71.
13. Панов А. П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычислений кватерніонів вращення твердого тіла // Кибернет. и вычисл. техн. Вып. 77. Київ. 1988. С.47–52.
14. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. New High-Precision Strapdown Navigation Attitude Algorithm under Angular-Rate Input Condition //Appl. Math. Inf. Sci. 9. No. 2L. 2015. Pp.283-290. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/092L02>.
15. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. Vol.7. No.1. 1971. Pp.61-66.
16. Плакцій Ю. А. Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла //Ю.А.Плакцій, І.О.Гомозкова // Вісник НТУ «ХПІ». №22 (1347). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2019. С.81–88.
17. Плакцій Ю. А. Еталонна модель обертання твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що змінюються у часі //Вісник НТУ «ХПІ». № 18(1127). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2015. С. 120-130.
18. Плакцій Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Перший тип моделі // Вісник НТУ «ХПІ». № 41(1150). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2015. С. 111-119.
19. Плакцій Ю. А. Узагальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі //Вісник НТУ «ХПІ». №6(1178). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків. 2016. С.96-104.

20. Плаксий Ю. А. Мультипликативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». №16 (1188). Серія: Математичне моделювання в техніці та технологія. Харків. 2016. С.72–80.
21. Plaksy Yu. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ D.Breslavsky, I.Homozkova, K.Naumenko// *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. 33(4). Pp. 1141–1160.
22. Плаксий Ю. А. Аналітично-чисельне моделювання процесу орієнтації твердого тіла в кватерніонах через послідовність ейлерових кутів для точного аналізу алгоритмів орієнтації в БІНС/ Ю. А. Плаксий, Ю. О. Кузнецов // Вісник НТУ «ХПІ». №2. Серія: «Динаміка і міцність машин». Харків. 2023. С.58-64.
- parameters ]// Space research in Ukraine. Issue 5. Kyiv: Nauk. Dumka. 1974. Pp. 76–82.
13. Panov A. P. Asimptoticheskie ocenki pogreshnostej metodov vychisleniya parametrov orientacii tverdogo tela [Asymptotic estimates of errors in methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]// *Cybernetics and Computational Technology*. Issue 47. Kyiv. 1980. Pp. 59-71.
14. Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z. New High-Precision Strapdown Navigation Attitude Algorithm under Angular-Rate Input Condition // *Appl. Math. Inf. Sci.* 9. No. 2L. 2015. Pp.283-290. <http://dx.doi.org/10.12785/amis/092L02>.
15. Bortz J. E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. Vol.7. No.1. 1971. Pp.61-66.
16. Plaksy Yu. A. Analiz tochnosti alhorytma oriientatsii R. Millera na chotyrokhhchastotnii etalonni modeli obertannia tverdogo tela [Analysis of the accuracy of R. Miller's orientation algorithm on the four-frequency reference model of rigid body rotation] /Yu.A.Plaksy, I.O.Homozkova // *Bulletin of NTU "KhPI"*. No. 22 (1347). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2019. Pp.81–88.
17. Plaksy Yu. A. Etalonna model obertannia tverdogo tela na osnovi predstavleniia kvaterniona orientatsii v funktsiakh kutiv Krylova, shcho zminiuutsia u chasi [Reference model of rotation of a rigid body based on the representation of the orientation quaternion in functions of Krylov angles changing in time] // *Bulletin of KhPI National Technical University*. No. 18(1127). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2015. Pp. 120-130.
18. Plaksy Yu. A. Uzahalnennia trokhchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdogo tela. Pershyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of rigid body rotation. The first type of model] // *Bulletin of NTU "KhPI"*. No. 41(1150). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2015. Pp. 111-119.
19. Plaksy Yu. A. Uzahalnennia trokhchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdogo tela. Druhyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of rigid body rotation. The second type of model] // *Bulletin of NTU "KhPI"*. No. 6 (1178). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2016. Pp.96-104.
20. Plaksy Yu. A. Mulyplikatyvni trokhchastotni modeli obertannia tverdogo tela [Multiplicative three-frequency models of solid body rotation] // *Bulletin of NTU "KhPI"*. No.16(1188). Series: Mathematical modeling in engineering and technology. Kharkiv. 2016. Pp.72–80.
21. Plaksy Yu. A. Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ Yu. Plaksy, D.Breslavsky, I.Homozkova, K.Naumenko// *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2021. 33(4). Pp.1141–1160.
22. Plaksy Yu. A. Analitichno-chyselne modeliuвання protsesu orientatsii tverdogo tela v kvaternionakh cherez poslidoavnist eilerovykh kutiv dlia tochnosnoho analizu alhorytmiv orientatsii v BINS [Analytical-numerical modeling of the process of solid body orientation in quaternions through a sequence of Euler angles for accurate analysis of orientation algorithms in BINS] / Yu.A. Plaksy, Yu.O. Kuznetsov // *Bulletin of NTU "KhPI"*. No. 2. Series: "Dynamics and strength of machines". Kharkiv. 2023. Pp.58-64.

Надійшла (received) 04.10.2024

#### Відомості про автора / About the Author

**Плаксий Юрій Андрійович** – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: [plaksy.yu@gmail.com](mailto:plaksy.yu@gmail.com).  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9487-8444>.

**Plaksy Yuriy** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Professor NTU «KhPI», Professor of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv; tel.: (057) 707-64-36; e-mail: [plaksy.yu@gmail.com](mailto:plaksy.yu@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9487-8444>