

К. І. ЛЮБИЦЬКА, І. О. МОРАЧКОВСЬКА, Г. М. ТИМЧЕНКО

ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИЙ ЗГИН ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК НА ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

В роботі розглянуто задачу геометрично-нелінійного згину пологих елементів конструкцій, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів (FGM) під впливом різноманітного поперечного навантаження. Пологі оболонки, що розглядаються, можуть мати довільну форму плану та контактують з пружною основою типу Вінклера-Пастернака. Передбачається, що механічні характеристики функціонально-градієнтних матеріалів безперервно змінюються за товщиною та обчислюються згідно зі степеневим законом. Математичну постановку виконано в рамках класичної геометрично-нелінійної теорії. Для лінеаризації нелінійної системи диференціальних рівнянь рівноваги застосовано метод послідовних навантажень в комплексі з методом Ньютона. Для розв'язання послідовності лінійних крайових задач, отриманих у результаті лінеаризації, разом із теорією R-функцій використовується метод Рітца. Поєднання теорії R-функцій та варіаційних методів надало значну можливість проведення чисельного експерименту для елементів конструкцій в широкому діапазоні зміни геометрії, силових навантажень, способів закріплення та властивостей матеріалу тощо. Завдяки використанню теорії R-функцій, побудовано необхідні системи координатних функцій у разі довільної геометрії плану оболонки та способів її обпирання. Запропонований підхід програмно реалізовано, протестовано та застосовано для розв'язання задач згину пологих оболонок складної форми плану з отворами. Розглянуто згин квадратної та гексагональної сферичних пологих оболонок на пружній основі, з круглим отвором, під дією рівномірно розподіленого навантаження. Досліджено вплив коефіцієнтів пружності основи, градієнтного показника в розподілі часток металу та кераміки, а також інших параметрів на прогини елементів конструкцій. Порівняння з результатами інших авторів дозволило встановити достовірність та ефективність розробленого підходу.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали, пологі оболонки, теорія R-функцій, метод послідовних навантажень, геометрична нелінійність.

K. LIUBYTSKA, I. MORACHKOVSKA, G. TIMCHENKO

GEOMETRICLY NONLINEAR BENDING OF FUNCTIONAL-GRADIENT SHALLOW SHELLS ON AN ELASTIC FOUNDATION

The paper considers the problem of geometrically nonlinear bending of shallow structural elements made of functional graded materials (FGM) under the influence of various transverse loads. The shallow shells under consideration may have arbitrary plan shapes and be in contact with an elastic base of the Winkler-Pasternak type. It is assumed that the mechanical properties of functional-gradient materials vary continuously through the thickness and are calculated according to the power law. The mathematical formulation is carried out within the framework of classical geometric-nonlinear theory. To linearize the nonlinear system of equilibrium differential equations, the sequential loading method in combination with Newton's method is applied. To solve a sequence of linear boundary value problems obtained as a result of linearization, the Ritz method is used together with the R-functions theory. The combination of the theory of R-functions and variational methods provided a significant opportunity to conduct numerical experiments on structural elements over a wide range of geometry, loading conditions, boundary constraints, material properties, etc. The use of the theory of R-functions made it possible to construct the necessary systems of coordinate functions for shells with arbitrary geometry and support conditions. The proposed approach was implemented in software, tested, and applied to solve the problems of bending shallow shells of complex plan shapes with holes. The bending of square and hexagonal spherical shallow shells on an elastic base with a circular hole under a uniformly distributed load was considered. The influence of the elasticity coefficients of the base, the gradient index in the distribution of metal and ceramic particles, as well as other parameters on the deflection of structural elements, was studied. Comparison with the results of other authors has allowed us to establish the reliability and efficiency of the developed approach.

Keywords: functionally graded materials, shallow shells, theory of R-functions, the sequential load method, geometric nonlinearity.

Вступ. Активне використання сучасних композитних матеріалів, у тому числі й функціонально-градієнтних (FGM), для виготовлення різних елементів тонкостінних конструкцій створює потребу в розробці ефективних методів їх аналізу та розрахунку. В сучасній літературі особлива увага приділяється нелінійним проблемам, до яких належать задачі згину, коливань та стійкості пластин та оболонок як основних елементів багатьох авіаційних та машинобудівних конструкцій. Велика кількість статей та монографій присвячена питанням розрахунку пластин та оболонок з FGM, з урахуванням їхнього нелінійного деформування. Достатньо повний огляд таких робіт представлений, наприклад, в [1-3].

Аналіз публікацій, присвячених розробці методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пластин та оболонок з FGM, показує, що запропоновані аналітичні методи здебільшого підходять для дослідження конструкцій з прямокутним планом [4; 5]. Значно в меншій кількості робіт досліджено елементи круглого плану [6; 7] чи зі Geometricly nonlinear bending of

functional-gradient shallow shells on an elastic foundation складною формою (з отворами тощо) [8]. Проте, виявились майже відсутніми роботи, у яких були б представлені чисельні результати для оболонкових FGM конструкцій зі складною формою плану, що лежать на пружній основі під дією поперечного навантаження.

В даній роботі пропонується підхід, який використовує варіаційно-структурний метод (RFM): теорію R-функцій та варіаційні методи [3; 9-11]. Така комбінація надала значну можливість проведення чисельного експерименту для елементів в широкому діапазоні зміни геометрії, силових навантажень, способів закріплення, властивостей матеріалу тощо. Алгоритм лінеаризації вихідної нелінійної системи диференціальних рівнянь базується на методі послідовних навантажень (МПН) [12] з уточненням отриманого результату методом Ньютона.

Раніше в [13] було запропоновано метод для дослідження НДС ортотропних пластин та пологих оболонок на пружній основі при їх нелінійному

деформуванні. У роботі [14] цей метод поширений на FGM пластини. Дана робота є продовженням попередніх досліджень і присвячена геометрично-нелінійній задачі згину пологих FGM оболонок.

Постановка задачі. Розглянемо згин пологої FGM оболонки, яка знаходиться під дією розподіленого навантаження $q(x, y)$ та спирається на пружну основу із реакцією $p(x, y)$. В даній роботі використано основу Вінклера-Пастернака, реакція якої:

$$p(x, y) = K_1 w + K_2 \nabla^2 w,$$

де K_1 та K_2 – коефіцієнти жорсткості, w – прогин.

Передбачається, що прогини оболонки, які виникають в результаті навантаження, є великими, отже для запису рівнянь рівноваги застосуємо класичну геометрично-нелінійну теорію:

$$d_{11}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) + 2(d_{12} + 2d_{66})w_{,xxyy} - b_{12}(\phi_{,xxxx} + \phi_{,yyyy}) + 2(b_{66} - b_{11})\phi_{,xxyy} - \nabla_k \phi = q(x, y) - p(x, y) + L(w, \phi), \quad (1)$$

$$a_{11}(\phi_{,xxxx} + \phi_{,yyyy}) + (2a_{12} + a_{66})\phi_{,xxyy} - b_{12}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) - 2(b_{11} - b_{66})w_{,xxyy} + \nabla_k w = -\frac{1}{2}L((w, w)), \quad (2)$$

де $\phi(x, y)$ – функція напруг

$$N_x = \phi_{,yy}, \quad N_y = \phi_{,xx}, \quad N_{xy} = -\phi_{,xy},$$

$L(R, \Psi) = R_{,xx} \Psi_{,yy} - 2R_{,xy} \Psi_{,xy} + \Psi_{,xx} R_{,yy}$ – загальний вигляд нелінійних операторів $L(w, \phi)$ та $L((w, w))$, $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ та $[d_{ij}]$ ($i, j = 1, 2, 6$) – матриці зведених поверхневої, зсувної та згинальної жорсткості [1, 8, 15]:

$$[a] = [A]^{-1}, \quad [b] = -[A]^{-1}[B], \quad [d] = [D] - [B][A]^{-1}[B]. \quad (3)$$

$$([A], [B], [D]) = \int_{-h/2}^{h/2} [Q(z)](1, z, z^2) dz \quad (4)$$

$$[Q(z)] = \frac{E(z)}{1 - \nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu(z)}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Дане дослідження присвячено функціонально-градієнтним оболонкам, у яких властивості матеріалу безперервно змінюються за товщини згідно степеневому закону [1]:

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n, \quad E(z) = (E_c - E_m)V_c + E_m, \quad \nu(z) = (\nu_c - \nu_m)V_c + \nu_m, \quad (6)$$

(4) – (6) та інтегрування обчислюються наступним чином: де V_c – об'ємна частка кераміки;

z – відстань від поточної точки до серединної площини;

n ($0 \leq n < \infty$) – показник степеня, якщо $n = 0$ отримуємо однорідний матеріал – керамічний, при $n \rightarrow \infty$ – металевий.

Припустимо, що оболонка знаходиться в умовах сталої температури, тобто характеристики складових

FGM матеріалу від неї не залежать. Це означає, що коефіцієнти матриць (3) після підстановки

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{\nu}{E_1}, \quad a_{66} = 2(1 + \nu)a_{11}, \quad (7)$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{66} = -\frac{E_2}{E_1}, \quad b_{12} = b_{21} = b_{16} = b_{26} = 0 \quad (8)$$

$$d_{11} = d_{22} = \frac{1}{1 - \nu^2} \left(E_3 - \frac{E_2^2}{E_1} \right), \quad d_{12} = d_{21} = \nu d_{11},$$

$$d_{16} = d_{61} = d_{26} = d_{62} = 0, \quad d_{66} = \frac{1 - \nu}{2} d_{11}. \quad (9)$$

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{n + 1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)nh^2}{2(n + 1)(n + 2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{4(n+1)} \right) \right) h^3. \quad (10)$$

Для кожного способу обпирання конструкції та отримання частинного розв'язку системи (1) – (2) додаються відповідні граничні умови. Наприклад, для ковзаючого шарніра:

$$W = 0, \quad M_n = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (11)$$

Метод розв'язання. Лінеаризацію нелінійних рівнянь (1) – (2) виконуємо за методом послідовних навантажень [12]. Відповідно до цього методу вихідне навантаження розбивається на n малих навантажень $\delta q^{(r)}$. На кожному r -му кроці навантаження розв'язується лінеаризована система рівнянь, а сумарні функції зусиль і прогину обчислюються через суперпозицію розв'язків:

$$w^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta w^{(r)}, \quad \phi^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta \phi^{(r)}.$$

Розв'язання лінеаризованої системи було виконано за допомогою RFM, в рамках якого було складено відповідний функціонал для кожного кроку навантаження:

$$\begin{aligned} \Pi(\delta w^{(r)}, \delta \phi^{(r)}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ d_{11}(\delta w_{,xx}^{(r)})^2 + \right. \\ & + d_{22}(\delta w_{,yy}^{(r)})^2 + 2d_{12}\delta w_{,xx}^{(r)}\delta w_{,yy}^{(r)} + \\ & + 4d_{66}(\delta w_{,xy}^{(r)})^2 - a_{22}(\delta \phi_{,xx}^{(r)})^2 - \\ & - a_{12}\delta \phi_{,xx}^{(r)}\delta \phi_{,yy}^{(r)} - a_{66}(\delta \phi_{,xy}^{(r)})^2 - a_{11}(\delta \phi_{,yy}^{(r)})^2 + \\ & + (\delta w_{,x}^{(r)})^2 \phi_{,yy}^{(r-1)} - 2\delta w_{,x}^{(r)}\delta w_{,y}^{(r)}\phi_{,xy}^{(r-1)} + \\ & + (\delta w_{,y}^{(r)})^2 \phi_{,xx}^{(r-1)} + \\ & + 2(\delta w_{,y}^{(r)}\delta \phi_{,y}^{(r)}w_{,xx}^{(r-1)} + \delta w_{,x}^{(r)}\delta \phi_{,x}^{(r)}w_{,yy}^{(r-1)}) - \\ & - 2w_{,xy}^{(r-1)}(\delta w_{,x}^{(r)}\delta \phi_{,y}^{(r)} + \delta w_{,y}^{(r)}\delta \phi_{,x}^{(r)}) + \end{aligned}$$

$$+ k_x \delta w^{(r)}_{,y} \delta \phi^{(r)}_{,y} + k_y w^{(r)}_{,x} \delta \phi^{(r)}_{,x} + K_1 (\delta w^{(r)})^2 + K_2 (\nabla \delta w^{(r)})^2 - 2 \delta q^{(r)} \delta w^{(r)} \} d\Omega. \quad (12)$$

Тут $w^{(r-1)}$ і $\phi^{(r-1)}$ – сумарні прогин та функція напруг для попереднього, $(r-1)$ -го, кроку навантаження.

Згідно варіаційного методу Ритця, для розв'язання (12) невідомі $\delta w^{(r)}$, $\delta \phi^{(r)}$ подаються у вигляді послідовності координатних функцій $\{w_i\}$, $\{\phi_i\}$, що задовольняють, принаймні, кінематичним граничним умовам:

$$\delta w^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_1} c_i w_i, \quad \delta \phi^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_2} c_i \phi_i, \quad (13)$$

де c_i – невідомі коефіцієнти розкладання. Для побудови таких послідовностей у роботі використовується теорія R -функцій, яка дозволяє їх будувати для пологих оболонок зі складною формою плану та різноманітними умовами закріплення.

Через накопичування похибок розв'язок, отриманий за методом послідовного навантаження, рекомендується уточнювати. В даній роботі для цього було застосовано метод Ньютона, проте його збіжність значно залежить від того, на скільки обрана початкова ітерація наближена до розв'язку. Збіжність ітераційного процесу контролюється за допомогою нерівності

$$\left\| \frac{w^{(s+1)} - w^{(s)}}{w^{(s)}} \right\|^2 + \left\| \frac{\phi^{(s+1)} - \phi^{(s)}}{\phi^{(s)}} \right\|^2 \leq \varepsilon,$$

де ε – задана величина відносної похибки.

Чисельні результати. Для перевірки достовірності запропонованого алгоритму та створеного програмного забезпечення було вирішено низку тестових завдань.

Задача 1. Розглянемо згин квадратної $(a \times a)$ FGM ($n = 1$) пологої сферичної ($k_x = k_y = k = 1/Ra$) оболонки (рис.1), $h = 0.01$ м, $a = 0.2$ м, яка виготовлена з матеріалу алюміній - цирконій

($E_m = 70 \text{ GPa}$, $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu_m = 0.3$, $\nu_c = 0.3$) та знаходиться під дією рівномірно розподіленого поперечного навантаження q . Граничні умови – ковзаючий шарнір. Графіки залежності прогину в центрі оболонки від розміру навантаження для різної кривини ($R=0.725, 5, \infty$) представлені на рис. 2, де також наведені результати, отримані в роботі [15]. Як видно з рисунка, результати добре узгоджуються між собою, що підтверджує достовірність розробленого алгоритму.

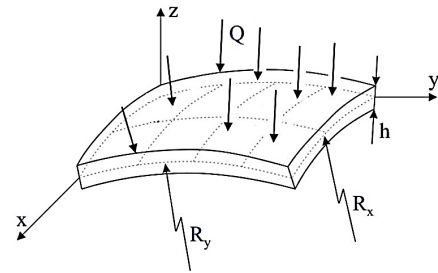


Рис.1 – Форма оболонки

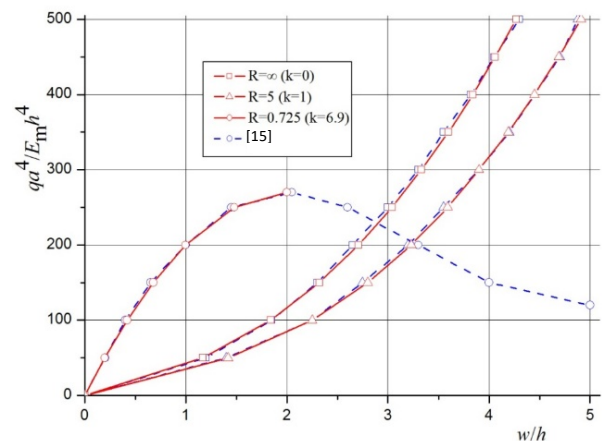


Рис. 2 – Порівняння залежності «навантаження-прогин у центрі» шарнірно опертій оболонки при $n = 1$

Задача 2. Розглянемо згин квадратної пологої сферичної оболонки на пружній основі, з круглим отвором, під дією рівномірно розподіленого навантаження (рис.3). Геометричні параметри оболонки: $h = 0.01$ м, $a = 0.2$ м. Коефіцієнти пружності основи $k_1 = K_1 a^4 / E_m h^3$, $k_2 = K_2 a^4 / E_m h^3$. Матеріал – алюміній - цирконій. Зовнішній контур спирається на ковзаючий шарнір, отвір вільний.

Згідно RFM, для побудови координатних функцій (13) перш за все необхідно скласти рівняння плану оболонки та структурні формули, які відповідають заданій комбінації граничних умов. Для даної крайової задачі структурні формули мають наступний вигляд:

$$\delta w^{(r)} = \omega_1 \Phi_1, \quad \delta \phi^{(r)} = \omega^2 \Phi_2. \quad (14)$$

Тут $\omega = f_1 \vee_0 (f_2 \wedge_0 f_3) = 0$ – рівняння границі всієї області, а $\omega_1 = f_2 \wedge_0 f_3 = 0$ – рівняння отвору, Φ_1 , Φ_2 – невизначені компоненти структурних формул [9], які в даній роботі розкладаються за степеневими поліномами (13). При цьому $f_1 = (c^2 - x^2 - y^2)/2c \leq 0$ – зовнішність круга радіуса c із центром у початку координат; $f_2 = (a^2/4 - x^2)/a \geq 0$ – вертикальна полоса, обмежена прямими $x = \pm a/2$; $f_3 = (a^2/4 - y^2)/a \geq 0$ – горизонтальна полоса, обмежена прямими $y = \pm a/2$.

На рис. 4 представлена залежність максимального прогину (який виникає на контурі отвору) оболонки ($c = 0.15a, n = 1$) без пружної основи ($K_1 = K_2 = 0$) від зовнішнього навантаження для різних значень радіуса кривини. Вплив радіуса отвору для елемента,

який досліджується, із кривиною $k = 1$ наведено на рис. 5. Видно, що збільшення отвору зменшує максимальний прогин елемента, що відповідає фізичному сенсу задачі. Такий самий ефект спостерігається на рис. 2 та 4 при різних значеннях кривини. Крім того, при збільшенні кривини сферичної оболонки виникає ефект втрати нею стійкості та зміни форми рівноваги, вивчення якого є окремою дослідницькою задачею.

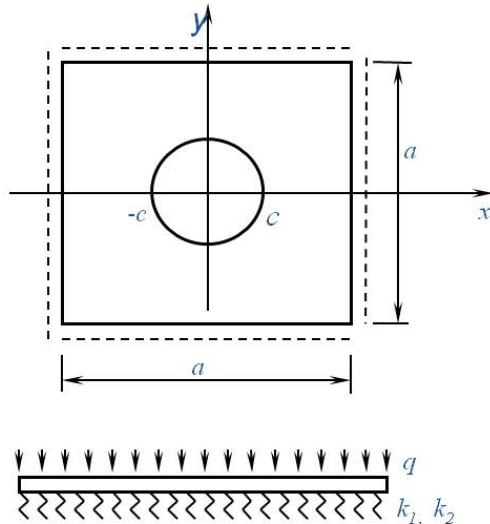


Рис. 3 – План квадратної сферичної оболонки з центральним отвором

Результати дослідження впливу пружної основи для різного степеня n матеріалу при $c = 0.1a$, $k = 1$ представлені на рис. 6. Як видно з графіків, збільшення впливу пружної основи зменшує ефект FGM матеріалу та прогини, які виникають. Можна побачити, що у випадку $k_1 = 100$, $k_2 = 10$ (основа Вінклера-Пастернака) криві для алюмінію та цирконію дуже наближені одна до одної, степінь FGM матеріалу майже не впливає на прогин оболонки. Також відмітимо, що відсутність коефіцієнта k_2 (основа Вінклера) вже значно збільшує варіативність прогину в залежності від характеристик матеріалу. Ці висновки підтверджують амортизаційну функцію пружних основ. Найбільші прогини та розбіг результатів для різних матеріалів виникає, відповідно, при відсутності пружної основи.

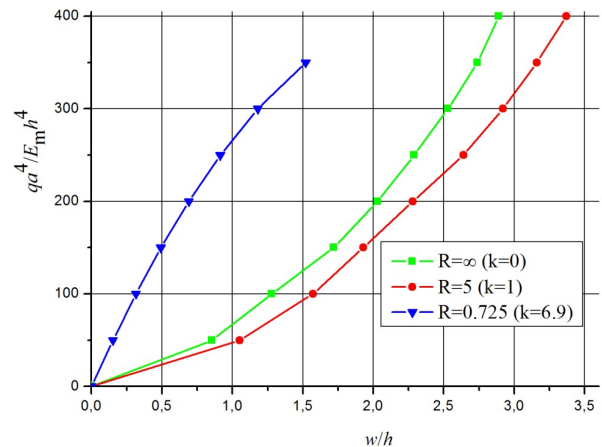


Рис. 4 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки (рис. 3), при $n = 1$, $c = 0.15a$, $K_1 = K_2 = 0$

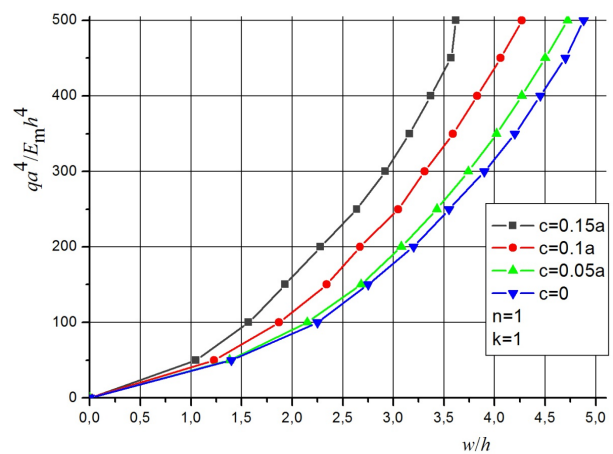


Рис. 5 – Вплив радіуса отвору на залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки (рис. 3), $K_1 = K_2 = 0$, $k = 1$, $n = 1$

Задача 3. Для демонстрації можливостей розробленого алгоритму щодо полігональної геометрії розглянемо згин пологої гексагональної сферичної оболонки на пружній основі з круговим отвором (рис.7). Геометричні параметри: $h = 0.01$ м, $a = 0.5$ м, $c = 0.1$ м, $k = 6.9$, $n = 1$. Зовнішній контур спирається на ковзаючий шарнір, отвір вільний.

Графіки залежностей «зовнішнє навантаження-максимальний прогин» для різних типів пружної основи представлено на рис. 8, звідки видно, що наявність пружної основи, особливо основи Вінклера-Пастернака, суттєво зменшує прогини пластини.

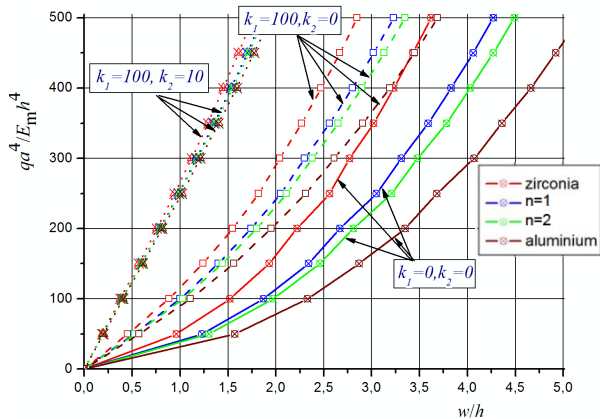


Рис. 6 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки ($k = 1$) з отвором ($c = 0.1a$) при різних коефіцієнтах пружності основи та степені об'ємної частки матеріалу

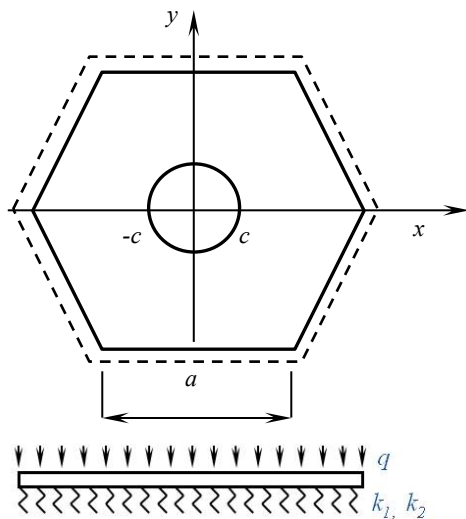


Рис. 7 – Шарнірно оперта гексагональна сферична оболонка з отвором

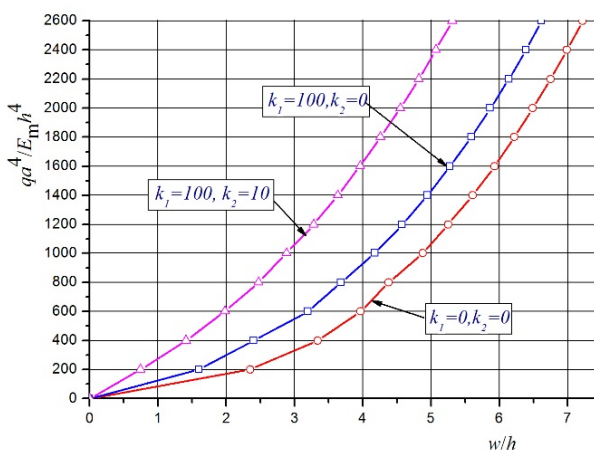


Рис. 8 – Залежність «навантаження-максимальний прогин» для оболонки при різних значеннях коефіцієнтів пружності основи

Висновки. В роботі запропоновано чисельно-аналітичний метод для дослідження геометрично-

нелінійного згину FGM пологих оболонок зі складною геометрією на пружній основі типу Вінклера-Пастернака. Розроблений метод базується на спільному використанні варіаційного методу Рітца, теорії R-функцій, методах послідовного навантаження та Ньютона.

Створене програмне забезпечення реалізує розроблений підхід у рамках класичної геометрично-нелінійної теорії. Наведені тестові приклади підтверджують достовірність запропонованого методу.

Досліджено вплив пружної основи та степені об'ємної частки матеріалу на прогини сферичної оболонки. Наявність отворів та геометрія плану помітно впливають на прогини, що виникають. Також варто зазначити, що пружна основа значно зменшує не тільки прогини елементів конструкцій, а й вплив степеня градієнта FGM матеріалу.

Таким чином, описаний метод і розроблене програмне забезпечення дозволяють проводити широкий обчислюваний експеримент для пологих оболонок складної форми та різних видів граничних умов, що дуже важливо при проектуванні реальних конструкцій.

Список літератури

1. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.
2. Erasmo Viola. Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery / Erasmo Viola, Luigi Rossetti, Nicholas Fantuzzi, Francesco Tornabene // Composite Structures – 2014. – V.112. P. 44–65.
3. Kurpa L. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz, G. Timchenko, I. Morachkovska // Journal of Applied and Computational Mechanics – 2023. – V.9(4). P. 1144–1155.
4. Tran Quoc Quan. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells / Tran Quoc Quan, Nguyen Huy Cuong, Nguyen Dinh Duc // Aerospace Science and Technology. – 2019. No 90. – P. 160–180.
5. Hui-Shen Shen. Nonlinear bending and postbuckling of FGM cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations in thermal environments / Hui-Shen Shen, Hai Wang // Composites Part B. – 2015. – No.78. P. 202–213.
6. Son Thai. Nonlinear bending analysis of variable thickness multi-directional functionally graded plates based on isogeometric analysis / Son Thai, Dieu T. T. Do, Tien Nguyen Tan // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – V. 30, No. 20. – P. 4091–4109.
7. Jingchao Wang. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach / Jingchao Wang, Zheng Liang Li, Wei Yu // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 138. – P. 430–457.
8. Ömer Civalek. Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method // Composite Structures. – 2017. No 161. – P. 93–110.
9. Rvachev V. L. The R-functions theory and its applications / V. L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p.
10. Kurpa L. V. The R-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L. V. Kurpa. – Kharkov: NTU "KhPI", 2009. – 408p.
11. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133–147.
12. Petrov. V. V. The method of consecutive loads in the nonlinear theory of plates and shells / V. V. Petrov. – Saratov, 1975. – 119 p.

13. Kurpa L. V. The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for ortho- tropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // Int. J. Applied Mech. – 2010. – No 6. – P. 660–668.
14. J. Awrejcewicz. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations / J. Awrejcewicz, L. V. Kurpa, K. I. Lyubitska // Proceeding of the 11-th conference “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), October 11-13,2017, Gdansk, Poland.- Shell Structures: Theory and Applications, Taylor & Francis Group, London, UK 2017.- V.4, p.61-64.
15. Woo J. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / J. Woo, S. A. Meguid, // Int. J. Solid and Structures. – 2001. – No 38. P. 7409–7421.
6. Son Thai. Nonlinear bending analysis of variable thickness multi-directional functionally graded plates based on isogeometric analysis / Son Thai, Dieu T. T. Do, Tien Nguyen Tan // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2023. – V. 30, No. 20. – P. 4091–4109.
7. Jingchao Wang. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach / Jingchao Wang, Zheng Liang Li, Wei Yu // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 138. – P. 430-457.
8. Ömer Civalek. Buckling analysis of composite panels and shells with different material properties by discrete singular convolution (DSC) method // Composite Structures. – 2017. No 161. – P. 93–110.
9. Rvachev V. L. The R-functions theory and its applications / V. L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p.
10. Kurpa L. V. The R-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L. V. Kurpa. – Kharkov: NTU “KhPI”, 2009. – 408p.
11. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the R-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133-147.
12. Petrov V. V. The method of consecutive loads in the nonlinear theory of plates and shells / V. V. Petrov. - Saratov, 1975. - 119 p.
13. Kurpa L. V. The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for ortho- tropic shallow shells on elastic foundations / L. V. Kurpa, K. I. Lybitska, I. O. Morachkovskaya // Int. J. Applied Mech. – 2010. – No 6. – P. 660–668.
14. J. Awrejcewicz. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates with complex shape resting on elastic foundations / J. Awrejcewicz, L. V. Kurpa, K. I. Lyubitska // Proceeding of the 11-th conference “Shell Structures: Theory and Applications” (SSTA 2017), October 11-13,2017, Gdansk, Poland.- Shell Structures: Theory and Applications, Taylor & Francis Group, London, UK 2017.- V.4 , p.61-64.
15. Woo J. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / J. Woo, S. A. Meguid, // Int. J. Solid and Structures. – 2001. – No 38. P. 7409–7421.

References (transliterated)

1. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.
2. Erasmo Viola. Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery / Erasmo Viola, Luigi Rossetti, Nicholas Fantuzzi, Francesco Tornabene // Composite Structures – 2014. –V.112. P. 44–65.
3. Kurpa L. Analysis of free vibration of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates by the R-functions method / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz, G. Timchenko, I. Morachkovska // Journal of Applied and Computational Mechanics – 2023. –V.9(4). P. 1144-1155.
4. Tran Quoc Quan. Nonlinear buckling and post-buckling of eccentrically oblique stiffened sandwich functionally graded double curved shallow shells / Tran Quoc Quan, Nguyen HuyCuong, Nguyen Dinh Duc // Aerospace Science and Technology.– 2019. No 90. – P. 160–180.
5. Hui-Shen Shen. Nonlinear bending and postbuckling of FGM cylindrical panels subjected to combined loadings and resting on elastic foundations in thermal environments / Hui-Shen Shen, Hai Wang // Composites Part B. – 2015. – No.78. P. 202-213.

Надійшло (received) 05.08.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Любицька Катерина Ігорівна (Liubytka Kateryna) - кандидат технічних наук, Середньо-Шведський університет, дослідник кафедри інженерії, математики та предметної дидактики; м. Сундсвалль, Швеція; ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2080-0299>; e-mail: kateryna.liubytka@miun.se

Морачковська Ірина Олегівна (Morachkovska Iryna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-60-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4164-4780>; e-mail: i.morachkovska@gmail.com

Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри прикладної математики; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-60-32; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7279-7173>; e-mail: gntimchenko2000@gmail.com