

Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, О. О. БРОВАРНИК

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ЗВАЖЕНИХ ВІДХИЛІВ У ФОРМІ МСЕ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ДВОВИМІРНИХ РОЗПОДІЛІВ

Статтю присвячено опису методу двовимірної апроксимації даних за допомогою алгоритмів методу зважених відхилів з кусково заданими базисними функціями у реалізації методу скінченних елементів. Надано математичну постановку задачі та основні співвідношення методу для двовимірних областей. До моделювання залучено трикутний скінченний елемент. Наведено інформацію щодо розробленої за алгоритмами даного методу програми, результатом роботи якої є виділення областей двовимірної фігури з заданими значеннями параметрів, що аналізуються. З використанням випадково розподілених координат виконано верифікацію результатів для різних наборів даних та отримано задовільну відповідність апроксимованих та вхідних даних. Для створення бази даних, які заплановано до обробки шляхом апроксимації, розроблено додаткове програмне забезпечення, що включає програми, написані мовою Python, та вебзастосунок, створений за допомогою фреймворку Laravel мовою PHP. Для реалізації завдань роботи використано бібліотеки PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup та систему управління базами даних PostgreSQL. Описано алгоритми роботи розробленого програмного забезпечення. Надано приклад відтворення місць розташування міст на мапі України. Розроблену програму двовимірної апроксимації було застосовано до аналізу просторово-часової динаміки виникнення міст на території України. Як приклад, розглянуто дані з заснування міст у період з 800 по 1200рр. від РХ та визначено основні урбанізовані на той час регіони. Результати даної скінченноелементної апроксимації отримано з метою підготовки даних для подальшого моделювання соціодинамічних процесів на території України. Отримані результати у вигляді координат границь регіонів, що мали високий рівень урбанізованості, можуть бути використані у різних наукових дослідженнях, в першу чергу в історичних науках.

Ключові слова: апроксимація, двовимірні розподіли, метод скінченних елементів, програма, вебзастосунок, база соціодинамічних даних.

D. BRESLAVSKY, O. BROVARNYK

USING THE METHOD OF WEIGHTED RESIDUALS IN THE FEM FORM FOR THE APPROXIMATION OF TWO-DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS

The paper is devoted to the description of the method of two-dimensional approximation of data using algorithms of the method of weighted residuals with piecewise specified basis functions in the implementation of the Finite Elements Method. The mathematical formulation of the problem and the main relations of the method for two-dimensional regions are provided. A triangular finite element is involved in the simulation. Information is given about the program developed according to the algorithms of this method, the result of which is the selection of regions of a two-dimensional figure with the specified values of the analyzed parameters. By use of randomly distributed coordinates, the verification of the results for different data sets was performed and a satisfactory correspondence of the approximated and input data was obtained. Additional software, including programs written in Python and a web application created using the Laravel framework in PHP, has been developed to create a database that is scheduled to be processed by approximation. The PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup libraries and the PostgreSQL database management system were used to implement the project tasks. Algorithms of the developed software are described. An example of the reproduction of the locations of cities on the map of Ukraine is provided. The developed program of two-dimensional approximation was applied to the analysis of spatio-temporal dynamics of the emergence of cities on the territory of Ukraine. As an example, data on the founding of cities in the period from 800 to 1200 AD were considered and the main urbanized regions at that time were determined. The results of this Finite Element approximation were obtained for the purpose of preparing data for further modeling of sociodynamic processes in the terrain of Ukraine. The obtained results in the form of coordinates of the borders of regions that had a high level of urbanization can be used in various scientific studies, primarily in historical sciences.

Key words: approximation, two-dimensional distributions, Finite Element method, software, web application, sociodynamic data base.

Вступ. Представлення даних двовимірних розподілів останнім часом стає досить розповсюдженим завданням, потреби у ньому виникають безпосередньо в інформаційних технологіях та у природничих, соціальних, технічних науках [1-4]. Безперечно, основою методологій при цьому є використання класичних математичних методів апроксимації та наближення функцій, представлених просторовими розподілами [5-8]. Але, на жаль, у більшості випадків вони оперують з канонічними областями визначення на кшталт прямокутних, колових об'єктів або подібних до них.

Між іншим, на практиці у більшості випадків є необхідним візуалізація даних саме для областей складної геометрії, які представляють реальні об'єкти. У зв'язку з цим є цілком доречним використання підходів методів зважених відхилів у формі методу скінченних елементів (МСЕ) [9, 10] для апроксимації

функцій у таких областях складної геометрії. Такі задачі все частіше розв'язуються останнім часом.

Стійкість та збіжність схем двовимірної апроксимації розглянуто у роботі [11]. Введено скінченно-елементну дискретизацію ітераційного алгоритму та показано її стійкість і збіжність на використаних триангуляціях. Запропоновано апостеріорний критерій, що дозволяє контролювати достатні умови для слабкої збіжності на загальних триангуляціях і для адаптивного уточнення сітки.

В роботі [12] обговорюється методологія побудови узагальнених функцій форми типу функцій Лагранжа для скінченних елементів (СЕ), визначених на неструктурованих сітках. Для побудови розбиття області використовуються R-функції. Запропонована методологія дозволяє використовувати узагальнені функції форми у частинах області визначення, де потрібна їхня висока гладкість. Досліджено

інтегровність функцій за стандартними правилами Гауса–Лежандра.

Просторово-часову інтерполяцію географічних даних виконано у роботі [2]. Застосовано як 2D, так і 3D функції форми для просторової інтерполяції. Розробляються нові 4D функції форми для спільної просторової (3D) та часової інтерполяції (1D) даних. Критерії порівняння з використанням різних наборів даних включають точність інтерполяції, схильність до помилок агрегування часу, тип обмежень, що використовуються в представленні інтерпольованих даних тощо.

Авторами [13] стверджується, що правильний підхід до отримання хорошої апроксимації полягає у застосуванні спочатку процесу сегментації для точного визначення розташування великих варіацій даних, а потім у використанні техніки дискретної апроксимації. Для виконання сегментації запропоновано квазіавтоматичний алгоритм, що використовує метод набору рівнів для отримання з заданих (за сіткою або розсіяних) даних, розділених великими градієнтами (або розломами). Далі генерується трикутна скінченноелементна сітка, що враховує ідентифікований набір розривів, на якій будуватиметься апроксимація за допомогою сплайнів.

Таким чином, досвід використання методу зважених відхилів у формі МСЕ дозволяє його застосування в задачах апроксимації розподілів функцій, заданих на двовимірних областях складної геометрії. Використання при цьому трикутних скінченних елементів [9] дозволяє ефективно виконувати апроксимацію без зайвих витрат оперативної пам'яті.

Постановка задачі. Метою роботи є розробка алгоритмічного та програмного забезпечення для апроксимації двовимірних розподілів на основі використання МСЕ.

Основні етапи роботи включають математичне формулювання задачі, отримання на основі відомих співвідношень МСЕ основних формулювань методу, реалізованого в алгоритмічному та програмному забезпеченні, проведення тестових розрахунків. Додаткові задачі включають розробку вебзастосування для збирання даних часової зміни урбаністичної ситуації, яку обрано як приклад демонстрації роботи програми двовимірної апроксимації, та програми для відображення на мапі місць розташування населених пунктів.

Математичне формулювання задачі. Виконати кускову апроксимацію деякої функції φ , заданої в R^2 в області визначення Ω набором N точок з координатами x_i , $i=1,2$. Область визначення обмежено замкненою кривою Γ . Використовуємо декартову систему координат. Під кусковою апроксимацією будемо розуміти визначення підобластей Ω_j області Ω , в яких існують ненульові значення функції $\varphi(x_i)$, з визначенням інтенсивності їхнього представлення. Тут $j=1,N$.

Метод апроксимації. Як метод апроксимації функції, заданої у двовимірній області, метод

зважених відхилів [9]. Згідно його підходів представимо наближене, апроксимоване значення функції $\varphi(x_i)$, $i=1,2$, у вигляді розвинуень за лінійно незалежними базисними функціями $N_k(x_1, x_2)$ в області визначення Ω :

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{k=1}^n a_k N_k(x_1, x_2), \quad (1)$$

де a_k є невідомими параметрами, що потребують визначення, ($k=1..n$; n – число членів ряду (1)).

Згідно з підходами МСЕ [9] представимо область Ω визначення невідомої функції $\varphi(x_i)$ як сукупність підобластей Ω^β (вони мають назву скінченних елементів) у вигляді (2):

$$\Omega = \sum_{\beta}^{Ne} \Omega^\beta, \quad (2)$$

де N_e – загальна кількість підобластей-скінченних елементів з номером β .

Границя області визначення Γ є представленою сукупністю частин границь скінченних елементів Γ^β (3), які своїми боками виходять на Γ :

$$\Gamma = \sum_{\beta}^{Ne} \Gamma^\beta. \quad (3)$$

Апроксимація $\hat{\varphi}$ будуватиметься кусковим чином, на кожній підобласті – скінченному елементі, при цьому використані при апроксимації базисні функції також задаються кусково, на скінченних елементах. Базові співвідношення методу зважених відхилів [9] представляються співвідношеннями (4) та (5):

$$\int_{\Omega} N_i R_{\Omega} d\Omega = \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Omega^\beta} N_i^\beta R_{\Omega^\beta} d\Omega^\beta, \quad (4)$$

$$\int_{\Gamma} N_i R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Gamma^\beta} N_i^\beta R_{\Gamma^\beta} d\Gamma^\beta. \quad (5)$$

У співвідношеннях (4) та (5) позначено $R_{\Omega} = (\varphi - \hat{\varphi})_{\Omega}$ – відхил за областю визначення Ω ; $R_{\Gamma} = (\varphi - \hat{\varphi})_{\Gamma}$ – відхил за границею Γ . Згідно з використаним підходом Гальоркіна як вагові функції також використовуються базисні.

Вимоги мінімізації функції відхилів за всією областю Ω та границею Γ призводять до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Omega^\beta} N_i^\beta R_{\Omega^\beta} d\Omega^\beta + \sum_{\beta}^{Ne} \int_{\Gamma^\beta} N_i^\beta R_{\Gamma^\beta} d\Gamma^\beta = 0. \quad (6)$$

СЛАР (6) можливо представити наступним чином:

$$[K^\beta] \{a^\beta\} = \{f^\beta\}. \quad (7)$$

У СЛАР (7) $\{a\}$ є вектором невідомої системи, розмірність якого в теорії МСЕ визначено кількістю вузлів моделі. Компоненти матриці СЛАР (l - номер рядку, m - номер стовпця) для окремого скінченного елемента визначаються виразом (8):

$$K_{lm}^{\beta} = \int_{\Omega^{\beta}} N_l^{\beta} N_m^{\beta} d\Omega^{\beta}. \quad (8)$$

Компоненти вектору правих частин обчислюються за співвідношенням (9):

$$f_l^{\beta} = \int_{\Omega^{\beta}} N_l^{\beta} \varphi^{\beta} d\Omega^{\beta}. \quad (9)$$

Тут φ^{β} є відомими значеннями функції, що апроксимується, на даному елементі β . Відхил за границю враховуємо згідно зі стандартними підходами МСЕ.

Далі за процедурою ансамблювання [9] проводиться побудова матриці системи рівнянь, що охоплює взаємодію всіх N^e скінчених елементів системи та отримується матриця всієї СЛАР $[K]$, що входить до загальної системи рівнянь відносно вектору вузлових невідомих коефіцієнтів апроксимації $\{a\}$ (10):

$$[K]\{a\}=\{f\}. \quad (10)$$

де $\{f\}$ – вектор правих частин, що обумовлюється значеннями вузлових невідомих векторів скінчених елементів після процедури ансамблювання [9].

Для розв'язання двовимірної задачі апроксимації використаємо підхід з застосуванням двовимірних тривузлових трикутників. Базисні функції N_i^{β} для них є відомими та можуть бути обраними лінійними за виразом (11):

$$N_i^{\beta} = \delta_{1i}^{\beta} + \delta_{2i}^{\beta} x_1 + \delta_{3i}^{\beta} x_2. \quad (11)$$

де δ_{ji}^{β} , $i, j=1,2,3$ є коефіцієнтами, що обчислюються за значеннями координат вузлів елемента β x_1, x_2 за виразами (12):

$$\delta_{1i}^{\beta} = \frac{x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j}{2\Delta^{\beta}}, \delta_{2i}^{\beta} = \frac{x_2^j - x_2^k}{2\Delta^{\beta}}, \delta_{3i}^{\beta} = \frac{x_1^k - x_1^j}{2\Delta^{\beta}}, \quad (12)$$

де Δ^{β} - площа трикутного скінченного елемента, $i, j, k=1,2,3$ з циклічною перестановкою індексів.

Програма двовимірної апроксимації. Описаний метод апроксимації двовимірних розподілів було реалізовано у вигляді прикладної дослідницької програми. Для її побудови застосовано блоки та процедури програмного комплексу *FEM Creep* [14], який використовує той самий скінчений елемент. Програму написано мовою C++, вона складається з трьох основних функцій – побудови матриці системи, визначення вектору правих частин та розв'язання СЛАР методом Холєцького. Після визначення вектору невідомих вузлових коефіцієнтів апроксимації відбувається перехід до окремого скінченного елемента, для якого й визначаються потрібні характеристики.

Для верифікації результатів, що отримуються з

застосуванням розробленої програми апроксимації даних в двовимірній області, було проведено цикл перевірочних розрахунків. Прямокутна область заповнювалась точками, координати яких задавались випадковим чином. Після цього розрахунками визначались області, в яких присутні одна або більше точок.

Як приклад, наведемо результати двох розрахунків з 50 та 300 точками на прямокутнику. Результати апроксимації представлено на рис.1 (задача з 50 точками) та рис.2 (задача з 300 точками). Кольорами позначено області з відповідним числом отриманих точок. Проведена перевірка показує, що процедура апроксимації працює вірно.

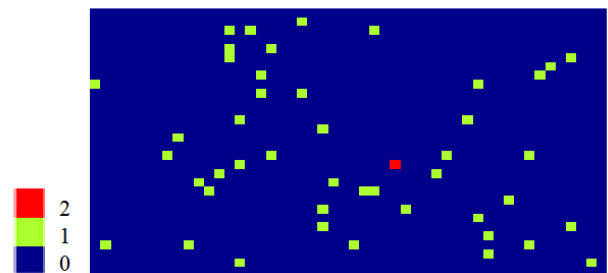


Рис. 1 – Апроксимація за прямокутною областю. Массив даних з 50 точок

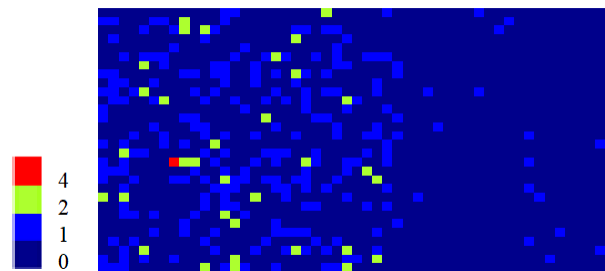


Рис. 2 – Апроксимація за прямокутною областю. Массив даних з 300 точок

Вебзастосунок для збирання даних часової зміни урбаністичної ситуації. Розроблену програму апроксимації даних на двовимірній області було заплановано використати для аналізу часової та просторової динаміки міського населення України. Для підготовки вхідних даних було розроблено вебзастосунок. Надамо його стислий опис.

Для первинного наповнення бази даних вебзастосунку обрано вебресурс «Вікіпедія». Для збирання даних використано програму *HDSearch*, створену на мові програмування Python та бібліотеки *requests*, *aiohhttp*, *BeautifulSoup* для здійснення HTTP запитів та вебскрапінгу сторінок. Блок-схему алгоритму збирання інформації наведено на рис. 3.

Для зберігання даних використана система управління базами даних PostgreSQL, що дозволяє ефективно структурувати зібрану інформацію за допомогою організованої схеми бази даних.

Для перегляду, додавання та редагування даних створено вебзастосунок. При його створенні за основу був вибраний фреймворк Laravel через його гнучкість, безпеку та зручність у розробці.

Для зображення місць розташування населених пунктів на мапі України створено окрему програму. Використано мову програмування Python, бібліотеку PyQt5 – набір бібліотек та інструментів, що дозволяють створювати графічні користувацькі інтерфейси (GUI), бібліотеку OSMnx [15], яка призначена для завантаження, побудови, аналізу та візуалізації складних мереж доріг і іншої міської інфраструктури за даними OpenStreetMap. Для прикладу на рис. 4 наведено вигляд інтерфейсу програми з наданими точками місцями розташування населених пунктів, заснованими в період з 1000 по 1200 рр.



Рис. 3 – Блок-схема алгоритму збирання даних

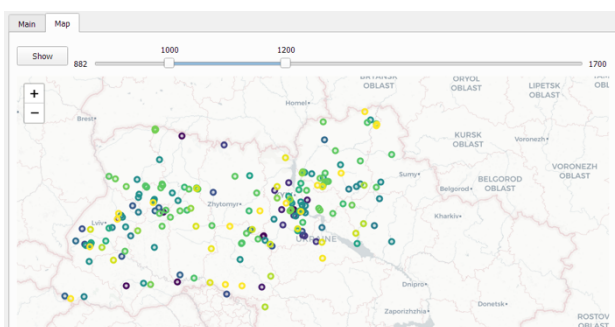


Рис. 4 – Інтерфейс програми для відображення населених пунктів України

Використання програми двовимірної апроксимації для представлення соціодинамічних даних. Розроблену програму двовимірної скінченноелементної апроксимації було використано для визначення найбільш урбанізованих регіонів середньовічної України. Отримані за допомогою програми *HDSearch* координати розташування міст

України розглядалися як вхідні дані.

Для розрахунків було побудовано скінченноелементну модель мапи України. Після перевірочних та верифікаційних розрахунків до моделювання було обрано сітку з 6294 трикутних скінченних елементів.

Розрахунки виконувались наступним чином. За обраним часовим тактом масив вхідних даних оновлювався шляхом завантаження додаткових координат міст, що утворились саме у даний проміжок часу. Аналізувались дані з 800 по 1200 рр. від РХ.

Результати апроксимації представлено на рис. 5 та рис. 6, де як приклад червоним кольором представлено урбанізовані райони України, що утворились до 1000р (рис.5) та до 1100р. (рис.6).

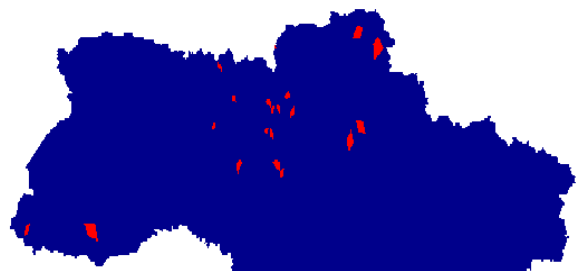


Рис. 5 – Регіони України з наявністю міст . Ситуація на 1000р.

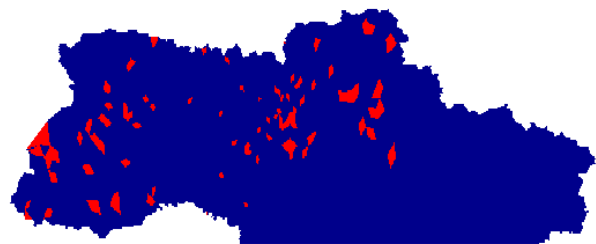


Рис. 6 – Регіони України з наявністю міст . Ситуація на 1100р.

Висновки. В даній роботі надано опис методу двовимірної апроксимації даних за допомогою алгоритмів методу зважених відхилів з кусково заданими базисними функціями у реалізації методу скінченних елементів. Наведено інформацію щодо розробленої за алгоритмами даного методу програми, результатом роботи якої є виділення областей двовимірної фігури з заданими значеннями параметрів, що аналізуються. З використанням випадково розподілених даних виконано верифікацію результатів, яка дозволила перейти до аналізу інших задач. Як приклад, розглянуто дані з заснування міст України у період з 800 по 1200рр. від РХ.

Для отримання цих вхідних даних розроблено додаткове програмне забезпечення, що включає програми, написані мовою Python, та вебзастосунок, створений за допомогою фреймворку Laravel мовою PHP. Для реалізації завдань роботи також використано бібліотеки PyQt5, OSMnx, requests, aiohttp, BeautifulSoup та систему управління базами даних

PostgreSQL.

Дану апроксимацію виконано з метою підготовки даних для подальшого моделювання соціодинамічних процесів на терені України, але отримані результати у вигляді координат границь регіонів, що мали високий рівень урбанізованості, можуть бути використані у різних наукових дослідженнях, в першу чергу в історії та археології.

Список літератури

1. Panzera D. *Areal Interpolation Methods: The Bayesian Interpolation Method* / D. Panzera // *Spatial Econometric Methods in Agricultural Economics Using R*. – 2021. – P. 185-201. <https://doi.org/10.1201/9780429155628-10>
2. Najar M. *A Brief Overview of Interpolation Methods* / M. Najar // *Journal of Computational Methods in Engineering*. – 2024. – Vol. 43. – No. 1. – P. 69-101. <https://doi.org/10.47176/jcme.43.1.1021>
3. Minda A. A. A review of interpolation methods used for frequency estimation / A. A. Minda, C. I. Barbinita, G. R. Gillich // *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. – 2020. – Vol. 17. – No. 1. – P. 21-26.
4. Li J. Spatial interpolation methods applied in the environmental sciences: A review / J. Li, A. D. Heap // *Environmental Modelling & Software*. – 2014. – Vol. 53. – P. 173-189. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.12.008>
5. Meinardus G. Approximation of functions: Theory and numerical methods. / G. Meinardus – Springer Science & Business Media, 2012. – Vol. 13. – 198 p.
6. Jazar R. N. Approximation methods in science and engineering. / R. N. Jazar – New York, NY: Springer, 2020. – 537 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-0716-0480-9>
7. Mhaskar H. N. Fundamentals of approximation theory. / H. N. Mhaskar, D. V. Pai – CRC Press, 2000. – 541 p.
8. Atangana A. New numerical scheme with Newton polynomial: theory, methods, and applications. / A. Atangana, S. I. Araz – Academic Press, 2021. – 460 p.
9. Zienkiewicz, O. C. Finite elements and approximation. / O. C. Zienkiewicz, K. Morgan – Courier Corporation, 2006. – 325 p.
10. Ern A. Finite elements I: Approximation and interpolation. / A. Ern, J. L. Guermond – Springer Nature, 2021. – Vol. 72. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-56341-7>
11. Bartels S. Fast and accurate finite element approximation of wave maps into spheres / S. Bartels // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. – 2015. – Vol. 49. – No. 2. – P. 551-558. <https://doi.org/10.1051/m2an/2014044>
12. Duarte C. A. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations / C. A. Duarte, D. J. Kim, D. M. Quaresma // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 2006. – Vol. 196. – No. 1-3. – P. 33-56. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.12.016>
13. Gout C. Approximation of surfaces with fault (s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D m-splines and the finite element method / C. Gout et al. // *Numerical Algorithms*. – 2008. – Vol. 48. – P. 67-92. <https://doi.org/10.1007/s11075-008-9177-8>

14. Бреславський Д. В., Коритко Ю. М., Татарінова О. А. Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: Підручник НТУ «ХПІ», 2017. – 232 с.
15. McClain B. P. *Python for Geospatial Data Analysis*. / B. P. McClain – O'Reilly Media, Inc., 2022.

References (transliterated)

1. Panzera D. *Areal Interpolation Methods: The Bayesian Interpolation Method*. *Spatial Econometric Methods in Agricultural Economics Using R*. 2021. P. 185-201. <https://doi.org/10.1201/9780429155628-10>.
2. Najar M. *A Brief Overview of Interpolation Methods*. *Journal of Computational Methods in Engineering*. 2024. Vol. 43. No. 1. P. 69-101. <https://doi.org/10.47176/jcme.43.1.1021>
3. Minda A. A., Barbinita C. I., Gillich G. R. *A review of interpolation methods used for frequency estimation*. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 2020. Vol. 17. No. 1. P. 21-26.
4. Li J., Heap A. D. *Spatial interpolation methods applied in the environmental sciences: A review*. *Environmental Modelling & Software*. 2014. Vol. 53, P. 173-189. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.12.008>
5. Meinardus G. *Approximation of functions: Theory and numerical methods*. *Springer Science & Business Media*, 2012. Vol. 13. 198 p.
6. Jazar R. N. *Approximation methods in science and engineering*. *New York, NY: Springer*, 2020. 537 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-0716-0480-9>
7. Mhaskar H. N., Pai D. V. *Fundamentals of approximation theory*. *CRC Press*, 2000. 541 p.
8. Atangana A., Araz S. I. *New numerical scheme with Newton polynomial: theory, methods, and applications*. *Academic Press*, 2021. 460 p.
9. Zienkiewicz O. C., Morgan K. *Finite elements and approximation*. *Courier Corporation*, 2006. 325 p.
10. Ern A., Guermond J. L. *Finite elements I: Approximation and interpolation*. *Springer Nature*, 2021. Vol. 72. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-56341-7>
11. Bartels S. *Fast and accurate finite element approximation of wave maps into spheres*. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2015. Vol. 49. No. 2. P. 551-558. <https://doi.org/10.1051/m2an/2014044>
12. Duarte C. A., Kim D. J., Quaresma D. M. *Arbitrarily smooth generalized finite element approximations*. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. 2006. Vol. 196. No. 1-3. P. 33-56. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.12.016>
13. Gout C. et al. *Approximation of surfaces with fault (s) and/or rapidly varying data, using a segmentation process, D m-splines and the finite element method*. *Numerical Algorithms*. 2008. Vol. 48. P. 67-92. <https://doi.org/10.1007/s11075-008-9177-8>
14. Breslavsky D. V., Korytko Yu. M., Tatarinova O. A. *Proektuvannya ta rozrobka skinchennoelementnogo programnogo zabezpechennya*. *Kharkiv: NTU "KhPI"*, 2017. 232 p.
15. McClain B. P. *Python for Geospatial Data Analysis*. *O'Reilly Media, Inc.*, 2022.

Надійшла (received) 11.08.2024

Відомості про авторів/ About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khp.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Breslavsky Dmytro – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-64-54; e-mail: Dmytro.Breslavsky@khp.edu.ua ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3792-5504>

Броварник Олексій Олексійович – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: Oleksii.Brovarynyk@infiz.khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9689-1850>

Brovarynyk Oleksii – PhD student of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems; tel.: (057) 707 64 54; e mail: Oleksii.Brovarynyk@infiz.khpi.edu.ua. ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-9689-1850>