

О. І. ТРУБАЄВ, А. О. ЛАРІН, Н. П. ПРИХОДЬКО

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ У ЗАДАЧІ ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ ТРУБИ

Труби широко використовуються у промислових та інженерних об'єктах, таких як нафтогазопроводи, водопостачання, системи опалення тощо, де важливим є визначення їхніх динамічних характеристик для забезпечення надійності та безпеки експлуатації. У зв'язку з цим, визначення власних частот коливань трубопроводів відіграє важливу роль у процесі їхнього проектування, монтажу та обслуговування. У статті використовуються різні типи скінчено-елементних моделей, включаючи стрижневі (Pipe), оболонкові (Shell) та твердотільні (Solid) які порівнюються з точки зору точності визначення власних частот, особливостей деформацій труби та обчислювальної ефективності. Окрім того, у дослідженні розглянуто варіанти реалізації різних граничних умов, таких як шарнірне та жорстке закріплення. Ці умови мають значний вплив на результати чисельного моделювання, оскільки неправильне їх задання може призвести до суттєвих похибок у визначенні частот коливань. Для забезпечення коректності результатів проведено детальний аналіз впливу способів моделювання кожного типу закріплення на динамічні характеристики трубопроводів. Дослідження показало, що стрижнева модель Pipe забезпечує найкраще наближення до аналітичного рішення, особливо при розрахунках для труб з простою геометрією та лінійними граничними умовами. Окрім того, у статті представлено результати аналізу форм власних коливань, які виявили певні особливості деформацій труби під впливом різних граничних умов. Отримані результати мають важливе значення для подальшого проектування та оцінки ресурсу трубопровідних систем у різних галузях промисловості, зокрема в енергетичній та нафтохімічній сферах. Розроблені чисельні моделі можуть бути використані для прогнозування поведінки труб при впливі різних зовнішніх навантажень. Це дозволить значно підвищити надійність систем і уникнути потенційних аварійних ситуацій, пов'язаних із вібраційними пошкодженнями. З огляду на отримані результати, автори рекомендують поєднувати чисельні методи моделювання з експериментальними дослідженнями, що дасть змогу підвищити точність розрахунків та зменшити можливі похибки. Це особливо важливо у випадках складних граничних умов або нетрадиційних конструкцій трубопроводів. Загалом, проведене дослідження підтверджує ефективність скінчено-елементних моделей для вирішення завдань моделювання динаміки трубопровідних систем і вказує на перспективи їхнього подальшого застосування в інженерній практиці.

Ключові слова: циліндрична труба, граничні умови, власні частоти та форми коливань, метод скінчених елементів, шарнірне та жорстке закріплення

О. TRUBAYEV, A. LARIN, N. PRYKHODKO

ON THE MODELING OF BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEM OF DETERMINING THE NATURAL FREQUENCIES OF A PIPE

Pipes are widely used in industrial and engineering systems, such as oil and gas pipelines, water supply, heating systems, and more, where determining their dynamic characteristics is crucial for ensuring operational reliability and safety. In this context, determining the natural frequencies of pipeline vibrations plays an important role in the design, installation, and maintenance of these systems. The article employs various types of finite element models, including beam (Pipe), shell (Shell), and solid (Solid) models, which are compared in terms of accuracy in determining natural frequencies, deformation characteristics of the pipe, and computational efficiency. Additionally, the study examines different implementations of boundary conditions, such as hinged and fixed supports. These conditions have a significant impact on the results of numerical modeling, as incorrect boundary condition assignments can lead to substantial errors in determining vibration frequencies. To ensure the accuracy of the results, a detailed analysis of the influence of modeling methods for each type of boundary condition on the dynamic characteristics of pipelines was conducted. The research revealed that the beam Pipe model provides the closest approximation to the analytical solution, particularly for pipes with simple geometry and linear boundary conditions. Furthermore, the article presents the results of an analysis of the modes of natural vibrations, which identified certain deformation characteristics of the pipe under the influence of various boundary conditions. The findings are of great importance for the further design and evaluation of pipeline systems in various industries, particularly in the energy and petrochemical sectors. The developed numerical models can be used to predict the behavior of pipes under various external loads. This will significantly enhance the reliability of systems and prevent potential emergency situations related to vibration damage. Based on the findings, the authors recommend combining numerical modeling methods with experimental studies to improve the accuracy of calculations and reduce potential errors. This is especially important in cases of complex boundary conditions or non-standard pipeline designs. Overall, the study confirms the effectiveness of finite element models for solving dynamic modeling tasks in pipeline systems and highlights the potential for their continued application in engineering practice.

Keywords: cylindrical tube, boundary conditions, natural frequencies and vibration modes, finite element method, hinge and rigid fixation.

Вступ. У світлі зростаючого інтересу до дослідження динамічних характеристик трубопроводів, особливо тих, які переносять рідину, визначення власних частот стає важливим аспектом для забезпечення їхньої надійності та ефективності експлуатації. Одним із ключових аспектів, який суттєво впливає на точність таких досліджень, є коректне моделювання граничних умов, що суттєво впливає на динамічні характеристики трубопроводу. Дана стаття присвячена аналізу та моделюванню різних варіантів задання граничних умов з метою визначення власних частот труби, що має особливе значення для трубопроводів, які використовуються в

промислових, морських та енергетичних конструкціях. Розглядаючи вплив різних граничних умов на динамічні характеристики трубопроводу, автори ставлять перед собою мету виявити ключові параметри, що впливають на власні частоти. Для досягнення цієї мети використовується метод скінчених елементів. Отримані результати мають практичне значення для проектування та експлуатації трубопровідних систем у різних галузях промисловості.

Автори статті [1] розглядали вібрації труби з кутовим з'єднанням та визначали власні частоти та форми коливань за допомогою числового дослідження

та експериментального модального аналізу. Результати показали можливість використання цих розрахунків для визначення динамічних характеристик труби. Ще однією значущою працею є дослідження [2]. Автори зосереджуються на вільних проміжках підводних трубопроводів, визначаючи їх вібраційні характеристики та допустиму довжину. Труба розглядалася як балка з трьома видами закріплень (жорстке на обох кінцях, шарнірне на обох кінцях та зі змішаним закріпленням). Через використання рівнянь коливань та параметрів управління, автори визначають вплив різних факторів, таких як швидкість потоку, осьова сила та розміри труби на власні частоти та допустиму довжину трубопроводу. Н. Yi-min та його співавтори дослідили власні частоти трубопроводу, який переносить рідину, з різними граничними умовами [3]. Вони для отримання значень власних частот використали метод Бубнова – Гальоркіна та визначили вплив різних умов на характеристики коливань. У роботі також встановлюється залежність частоти коливань трубопроводу від різних факторів, таких як маса, жорсткість, довжина труби, щільність рідини та швидкість потоку. Важливим є висновок, що зміни амплітуди залишаються невеликими у випадку вільного опирання. Важливим аспектом, розкритим у роботі [3], є також можливість ігнорування впливу сили інерції Коріоліса (похибка не перевищує 3%). Зазначено також залежність від демпфування частоти згасаючих коливань у трубопроводі, який переносить рідину. У статті [4] вивчаються вібраційні характеристики бурової труби під час установки підводного бурового устаткування. Верхня частина труби жорстко закріплена а нижня частина залишена вільною. Застосовуючи експериментальні та чисельні методи, автори визначають частоти та форми власних коливань, аналізують вплив різних параметрів, таких як довжина, діаметр, маса та граничні умови, на ці характеристики. Результати експериментів підтверджують високу точність чисельних розрахунків (середня похибка не перевищує 5%) та можливість їх використання для визначення власних частот труби в умовах встановлення підводного бурового устаткування. У роботі [5] вивчаються характеристики вібрацій трубопроводу, що переносить рідину. Використовуючи метод матриці передачі, автори аналізують вплив граничних умов та щільності рідини на частотний відгук трубопроводу. Результати показують, що граничні умови значно впливають на амплітуду вібраційного відгуку трубопроводу, а щільність рідини впливає на частоту вібрацій та амплітуду в повздовжньому напрямку. В роботі [6] за допомогою теорії Релея досліджується динаміка трубопроводів, що переносять рідину. Зокрема, вивчається вплив неklasичних граничних умов на власні частоти трубопроводу (у першому випадку лівий та правий кінці труби були закріплені торсіонними пружинами; у другому випадку труба була закріплена на лівому кінці, а правий кінець ковзав за допомогою торсійної пружини). Результати показують, що параметри, такі як масове

співвідношення та співвідношення пружності, впливають на частоту вібрацій. Робота [7] розглядає аналітичний підхід до розрахунку вібрацій труб з узагальненими граничними умовами на основі моделі Пастернака. Автори представляють аналітичне рішення для вібраційного відгуку структури, яка може містити конструкційні елементи, такі як опори, клапани та ін. Врахування цих елементів та параметрів основи суттєво впливає на власні частоти трубопроводу. Показано, що чим ближче вони до вузлів форм коливань, тим менше вони впливають на відповідні власні частоти. У дослідженні [8] вивчається нелінійна динаміка слабо зігнутих труб, які переносять рідину під впливом теплових навантажень, з використанням трьох типів закріплень (фіксоване на обох кінцях, шарнірне на обох кінцях та зі змішаним закріпленням). Результати показують, що геометрія труб та температурні фактори значно впливають на власні частоти системи. Результати свідчать про збільшення амплітуди коливань трубопроводу під впливом теплових навантажень. У роботі [9] автори зосереджуються на визначенні власних частот труб із різними геометріями та граничними умовами. Використовуючи чисельне моделювання в ANSYS та враховуючи реальні умови закріплення трубопроводу, автори вивели коригувальні коефіцієнти для аналітичних розрахунків. Це дозволяє полегшити розрахунки, не вдаючись до складного моделювання, що є актуальним у практичних застосуваннях. У статті [10] досліджено вплив потоку рідини на частоти вібрацій труб із різними матеріалами та умовами закріплення. Показано, що стійкість труб залежить від граничних умов, при цьому найвищу стійкість забезпечує жорстке закріплення на обох кінцях. У роботі [11] досліджували вплив гравітації та масових параметрів на власні частоти трубопроводів з рідиною, використовуючи метод слабкої квадрупольної форми. Також була підтверджена точність і швидкість збіжності методу.

Дослідження [12], сфокусоване на модальному аналізі легких труб із застосуванням методу скінченних елементів для різних матеріалів (сталь, PVC) та умов закріплення. Це дало можливість визначити власні частоти та оптимізувати використання матеріалу. Нарешті, робота [13] надає детальний аналітичний розгляд власних частот трубопроводів, що переносять рідину, за допомогою методу Мюллера, підтверджуючи аналітичні результати експериментальними даними. Ці праці підкреслюють важливість урахування граничних умов та геометричних параметрів при аналізі динамічних характеристик трубопровідних систем.

Огляд літератури з вивчення динаміки трубопроводів, що переносять рідину, показує наявність різноманітних підходів та методів дослідження. Вказані дослідження демонструють важливість правильного моделювання граничних умов для визначення власних частот труб та їх динамічних характеристик. Отримані результати можуть мати значення для практичного застосування у проектуванні та експлуатації

трубопроводних систем в різних сферах промисловості. В цих роботах досліджується вплив різних факторів, таких як граничні умови, геометрія труб, температурні навантаження та властивості рідини, на динаміку трубопроводів. В той же час питання моделювання граничних умов не було розглянуто у вищезазначених дослідженнях. Такі дослідження дуже важливі для прогнозування ресурсу та оптимізації роботи трубопроводних систем.

1. Постановка задачі. Ставиться задача аналізу впливу способів моделювання граничних умов на частоти та форми власних коливань фрагментів трубопроводів. У представленому дослідженні розглядається прямолінійна циліндрична труба довжиною 5 м, внутрішнім діаметром 100 мм та товщиною стінки 5 мм. Для скінчено-елементного аналізу використані різні типи моделей: стрижневі (Pipe), оболонкові (Shell) та твердотільні (Solid). Використовувались такі варіанти реалізації умов шарнірного та жорсткого закріплення: в двох точках (вздовж горизонтальної осі), в чотирьох точках (вздовж горизонтальної та вертикальної осей), по лінії серединної поверхні труби (кільце) для моделі Shell та по торцевій поверхні для Solid. Було також побудовано геометричну модель труби довжиною 6 м, для моделювання жорсткого закріплення по частині зовнішньої поверхні труби довжиною по 0,5 м з кожного краю. Це закріплення в подальшому буде називатися затисканням. Для

шарнірного закріплення був заборонений рух вздовж всіх осей та поворот відносно осі труби. Деякі варіанти закріплення показані на рис. 1.

2. Аналітичне рішення. Результати, отримані МСЕ, зіставлялися з аналітичним рішенням, що відповідає звичайній балочній теорії. Власні частоти для балки при різних умовах закріплення можна визначити за формулою [14]

$$p_k = \frac{(\alpha l_k)^2}{l^2} * \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (1)$$

Тут l – довжина стрижня, EI – жорсткість на згин, де $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль пружності, $I = 2,28 \cdot 10^{-6}$ м⁴ – момент інерції поперечного перерізу, $\mu = 12,86$ кг/м – погонна маса, $\rho = 7800$ кг/м³ – густина, αl_k – корені частотного рівняння, які залежать від способу закріплення. Так для жорсткого закріплення $\alpha l_k = \pi(2k+1)/2$, а для шарнірного $\alpha l_k = \pi k$, де k – номер частоти.

3. Чисельні дослідження.

3.1. Перше дослідження. Результати, отримані за стрижневою моделлю Pipe показали, що ця модель при визначенні перших п'яти частот згінних коливань забезпечує похибку в межах 3% для шарнірного закріплення та в межах 7% для жорсткого закріплення (табл. 1). При цьому форми коливань відповідають звичайній балочній теорії і тут не наводяться.

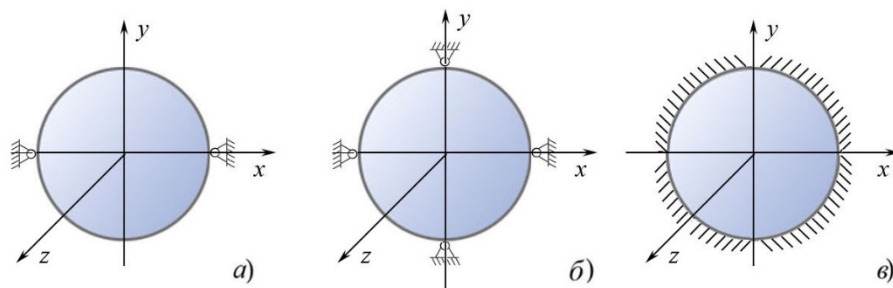


Рис. 1 - Деякі варіанти закріплення труби: а) шарнірне за двома точками; б) шарнірне за чотирма точками; в) жорстке по торцевому кільцю

Таблиця 1. – Власні частоти згінних коливань труби (Гц), отримані за моделлю Pipe та похибка відносно аналітичного рішення (%)

№ частоти	Шарнірне закріплення		Жорстке закріплення	
	Аналітичне рішення	Чисельне рішення	Аналітичне рішення	Чисельне рішення
1	12,12	12,13 (0,04 %)	27,28	27,43 (0,5%)
2	48,49	48,67 (0,37%)	75,73	75,74 (0,01%)
3	109,1	110,1 (0,9%)	148,5	149,0 (0,3%)
4	193,0	197,2 (2,2%)	231,2	247,7 (7,1%)
5	303,1	311,0 (2,6%)	366,7	372,8 (1,7%)

3.2. Друге дослідження проводилось для шарнірно закріпленої труби в двох точках. При цьому використовувались моделі Shell та Solid. Проведено порівняння з аналітичним рішенням для шарнірно закріпленого стрижня. Для інших варіантів реалізації граничних умов таке порівняння є недоречним, бо результати суттєво відрізняються від аналітичного рішення. У табл. 2 наведені власні частоти коливань шарнірно закріпленої труби (Гц), отримані за моделями Shell та Solid

З результатів цього дослідження (табл.2) можна побачити що для значень перших трьох частот похибка не перевищує 5%. Це підтверджує висновки, зроблені в статті [11], що базуються на експериментальних дослідженнях. Модель Solid дає значення частот трошки нижчі ніж аналітичне рішення, а модель Shell – навпаки дає вищі значення. Форми власних коливань отримані за моделлю Solid, що відповідають згину, наведені на рис. 2. На п'ятій формі згинних коливань відбувається деформування в площині, яка розташована вздовж осі z , та повернута відносно осі y на кут в 45 градусів. На цій формі присутні також ознаки оболонкових деформацій. Проте, слід зауважити, що у спектр згинних коливань вклинюється частота №9, що відповідає коливанням труби, як оболонки, так звана «**оболонкова форма**» коливань (рис. 2). Тут також присутні ознаки повороту площини згинних деформацій та можна стверджувати, що мають місце складні згинно-оболонкові коливання.

Таблиця 2. - Власні частоти за номером у загальному спектрі та у спектрі згинних коливань в площині yz (в дужках) для шарнірно закріплення та похибка відносно аналітичного рішення.

№ частоти	Аналітичне рішення	Shell	Solid
1 (1)	12,12	12,60 (4,0%)	11,78 (2,8%)
3 (2)	48,49	50,60 (4,3%)	46,91 (3,6%)
5 (3)	109,1	109,5 (0,37%)	104,7 (4,0%)
7 (4)	194,0	135,8 (оболонкова)	184,2 (5,0%)
9 (оболонкова)	-	216,9	278,5
10 (5)	303,1	334,2 (10,3%)	284,4 (6,2%)

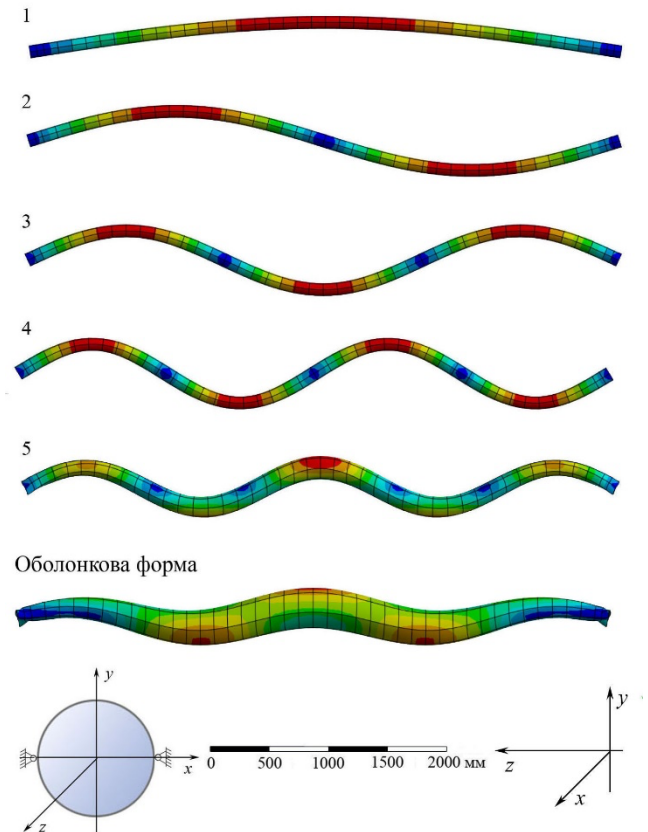


Рис. 2. Форми коливань при шарнірному закріпленні труби по краях за двома точками (модель Solid, див. табл. 2)

3.3. Третє дослідження проводилось для варіанту жорсткого закріплення труби за моделями Shell та Solid, а також шарнірного закріплення по серединній лінії.

З табл. 3 можна побачити що результати, отримані за моделлю Shell, є найбільш наближеними до аналітичного рішення якщо закріплення здійснюється за 4 точками (за винятком першої частоти). Похибка для перших трьох частот згинних коливань при закріпленні по серединній лінії змінюється у межах 9%. Результати, отримані за моделлю Solid, є найбільш наближеними до аналітичного рішення якщо закріплення здійснюється по торцевій або частині зовнішньої поверхні (затисканні). Для перших чотирьох частот згинних коливань у площині yz жорстко закріпленої труби похибка змінюється у межах 5%. Закріплення шарнірне чи жорстке по серединній лінії дає приблизно однакові результати близькі до аналітичного рішення для жорсткого закріплення. Закріплення шарнірне чи жорстке за чотирма точками дає також результати, які мають приблизно однакову похибку відносно аналітичного рішення для жорсткого закріплення. Форми коливань, отримані при жорсткому закріпленні труби по краях за торцевою поверхнею (модель Solid), показані на рис. 3. Серед них є класична оболонкова, яка не має ознак деформацій згину (частота 314,0 Гц). При цьому варіанті закріплення в нижній частині спектру частоти розпадаються на ті, що відповідають згинним та

оболонковим деформаціям. При закріпленні за чотирма точками було також зафіксовано оболонкову

форму, яка має одночасно ознаки і деформацій згину (частота №9 – 307,0 Гц, див. рис. 4).

Таблиця 3. - Власні частоти для жорсткого та шарнірного закріплення труби (Гц) та похибка відносно аналітичного рішення

№ частоти	Аналітичне рішення	Результати для моделі Shell			Результати для моделі Solid			
		4 точки (жорстке)	Закріплення по серединній лінії		4 точки		Закріплення по торцевій поверхні	Затискання
			(шарнір)	(жорстке)	(шарнір)	(жорстке)		
1 (1)	27,28	24,22 (11,2%)	28,76 (5,4%)	28,76 (5,4%)	23,75 (12,9%)	23,69 (13,2%)	26,64 (2,3%)	26,58 (2,6%)
3 (2)	75,73	74,77 (1,3%)	80,62 (6,5%)	80,71 (6,6%)	65,74 (13,2%)	65,62 (13,3%)	72,80 (3,9%)	72,65 (4,1%)
5 (3)	148,5	141,4 (4,8%)	162,3 (9,3%)	162,3 (9,3%)	128,9 (13,2%)	128,7 (13,3%)	141,1 (4,8%)	140,8 (5,2%)
7 (4)	231,2	258,6 (11,8%)	278,0 (20,2%)	278,5 (20,5%)	212,2 (8,2%)	212,0 (8,3%)	230,1 (0,5%)	229,7 (0,6%)
9 (оболонкова)	-	319,0	322,2	322,2	309,6	307,0	314,0	313,8
10 (5)	366,7	386,9 (5,5%)	434,9 (18,6%)	435,0 (18,6%)	314,8 (14,1%)	314,5 (14,2%)	338,3 (7,7%)	337,7 (7,9%)

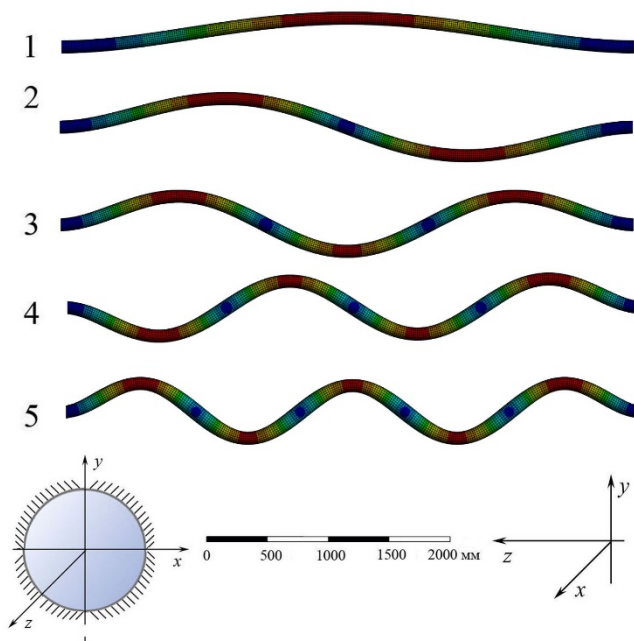


Рис. 3 - Форми коливань при жорсткому закріпленні труби по краях за торцевою поверхнею (модель Solid, див. табл. 2)

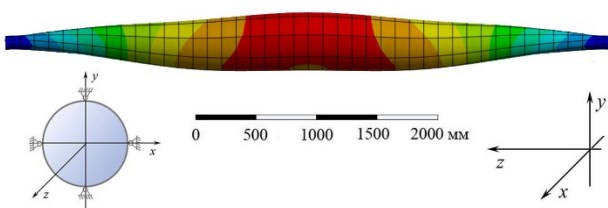


Рис. 4. - Форма коливань №9 при жорсткому закріпленні труби по краях за чотирма точками (модель Solid, див. табл. 3)

3.4. Досліджено збіжність результатів, отриманих за моделями Shell та Solid при закріпленні по двом точкам (див. табл. 4). З результатів табл. 4 видно, що моделі Solid, які містять 300–1500, та моделі Shell, які містять 400 елементів є адекватними. Для частот, які відповідають оболонковим формам збіжність не досліджувалась.

З наведених результатів видно, що у частотному діапазоні труби є значення, які відповідають оболонковим формам коливань. При цьому вони у спектрі частот мають менші значення, ніж при інших варіантах реалізації граничних умов. Значення частот, у яких починають проявлятися оболонкові властивості труби залежить також від її товщини [15].

Висновки. Проведено моделювання різних способів задання граничних умов з метою визначення власних частот циліндричної труби. Для шарнірного закріплення за моделями Shell та Solid найкращим варіантом граничних умов, що дозволяє наблизитися до аналітичних результатів, є закріплення на кожному краю труби у двох точках, через які проходить нейтральна лінія поперечного перерізу труби при згині. Для жорсткого закріплення результати, отримані за моделлю Shell, найближчі до аналітичного рішення, якщо закріплення здійснюється за чотирма точками. Для моделі Solid найбільш ефективним є закріплення по торцевій або частині зовнішньої поверхні труби (затискання). Аналіз форм власних

коливань показав, що при різних варіантах закріплення циліндричної труби виникають форми коливань, пов'язані з деформуванням труби як оболонки. Наявність таких форм коливань необхідно враховувати при проектуванні роторів, виконаних на основі оболонок. Оцінка збіжності отриманих результатів підтвердила адекватність скінчено-елементних моделей. З точки зору точності моделювання, отримані результати показали, що модель Ріре забезпечує похибку в межах 3% для шарнірного закріплення і до 7% для жорсткого закріплення. Моделі Shell і Solid демонструють похибки не більше 5-9%, залежно від граничних умов. Ці похибки є допустимими для більшості практичних

завдань, особливо на етапах проектування та оцінки динамічних характеристик трубопровідних систем. Запропоновані методи моделювання можуть бути використані для аналізу власних частот трубопровідних систем з достатньою точністю та збіжністю з аналітичними рішеннями, що дозволяє прогнозувати поведінку труб у реальних умовах експлуатації. Отримані результати вимагають додаткових досліджень, особливо при визначенні власних частот трубопровідних систем у реальних умовах закріплення, де експериментальні методи повинні обов'язково доповнювати чисельні розрахунки.

Таблиця 4. - Вплив числа елементів на точність розрахунків частот (Гц), отриманих за моделями Solid та Shell при шарнірному закріпленні по двох точках.

№ частоти	Аналітичне рішення	Результати для моделі Shell		Результати для моделі Solid	
		384 вузли (360 елементів)	1488 вузлів (1440 елементів)	2324 вузлів (264 елементи)	13 378 вузлів (1616 елементів)
1	12,12	12,60 (4%)	12,60 (4%)	11,80 (2,6%)	11,80 (2,6%)
2 (3)	48,49	50,60 (4,3%)	49,61 (2,3%)	46,91 (3,6%)	46,96 (3,2%)
3 (5)	109,1	109,5 (0,37%)	91,83 (оболонкова)	104,7 (4%)	104,8 (3,9%)
4 (7)	193,0	135,8 (оболонкова)	117,0 (оболонкова)	184,2 (5,0%)	184,3 (4,5%)
5 (9)	303,1	216,9 (оболонкова)	197,6 (оболонкова)	278,5 (оболонкова)	240,0 (оболонкова)

Список літератури

1. Carneiro, J. O & Melo, Francisco & Rodrigues, J. & Lopes, H. & Teixeira, Vasco. (2005). The modal analysis of a pipe elbow with realistic boundary conditions. International Journal of Pressure Vessels and Piping. 82. 593–601. 10.1016/j.ijpvp.2005.04.001.
2. Zhang, Bo & Xing, Ze-Yang & Wang, Tao & Wang, Zhuo. (2017). The Vibration Characteristics and Allowable Span Length of Free Span Submarine Pipeline. 10.2991/mme-16.2017.24.
3. Huang Yi-min, Liu Yong-shou, Li Bao-hui, Li Yan-jiang, Yue Zhu-feng. Natural frequency analysis of fluid conveying pipeline with different boundary conditions, Nuclear Engineering and Design, Volume 240, Issue 3, 2010, Pages 461-467, ISSN 0029-5493. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2009.11.038>.
4. Xiao, Wensheng & Qin, Haozhi & Liu, Jian & Liu, Qi & Cui, Junguo & Wang, Fengde. (2020). Natural Frequencies and Mode Shapes of Drill Pipe in Subsea Xmas Tree Installation. Mathematical Problems in Engineering. 2020. 1-17. 10.1155/2020/5634194.
5. Jun Long et al. 2021 J. Phys.: Conf. Ser. 1985 012074 <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1985/1/012074>
6. Begum Yurdanur Dagli, Abdulkarim Ergut, Dynamics of fluid conveying pipes using Rayleigh theory under non-classical boundary conditions, European Journal of Mechanics - B/Fluids, Volume 77, 2019, Pages 125-134, ISSN 0997-7546, <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2019.05.001>.
7. M. Li, X. C. Chen, X. P. Chang, Y. Qin, Y. H. Li, General analytical solution for vibrations of pipes with arbitrary discontinuities and generalized boundary condition on Pasternak foundation, Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 162, 2022, 107910, ISSN 0888-3270, <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.107910>.
8. Akintoye O. Oyelade, Ayo A. Oyediran, The effect of various boundary conditions on the nonlinear dynamics of slightly curved pipes under thermal loading, Applied Mathematical Modelling (2020), doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.019>

9. Noor Fariza Saari, Azma Putra, Irianto, Reduan Mat Dan, Muhammad Agus Zeli, Roszaidi Ramlan, Nawal Aswan Abdul Jalil, Safarudin Herawan, Estimating natural frequency of pipe with various geometries: Improvement of frequency factors, Heliyon, Volume 10, Issue 4, 2024, e26148, ISSN 2405-8440, <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e26148>.
10. Dangal, Manoj & Ghimire, Subodh. (2020). Modeling and Analysis of Flow Induced Vibration in Pipes Using Finite Element Approach.
11. Shui, Bo & Li, Yun-dong & Luo, Yu-mei & Luo, Fei. (2023). Free vibration analysis of Timoshenko pipes conveying fluid with gravity and different boundary conditions. Journal of Mechanics. 39. 10.1093/jom/ufad031.
12. Berkay E, Bekir Y. A finite element study on modal analysis of lightweight pipes. Sigma J Eng Nat Sci 2021;39(3):268–278.
13. Sutar, Shankarachar & Madabhushi, Radhakrishna & Chellapilla, Kameswararao Chellapilla & Babu, P. (2018). Determination of Natural Frequencies of Fluid Conveying Pipes using Muller's Method. Journal of The Institution of Engineers (India): Series C. 100. 10.1007/s40032-018-0446-6.
14. Timoshenko S. P., Young D. H., W. Weaver Jr. Vibration problems in engineering (Fourth Edition). JOHN, WILEY & SONS New York. 468 pp. Digitized by the Internet Archive in 2022 with binding from Kahle/Austin Foundation https://archive.org/details/vibrationproblem0000timo_g3q2/page/n7/mode/2up
15. Трубаев О. І. Про моделювання граничних умов для визначення критичних швидкостей обертання роторів / О. І. Трубаев, А. О. Ларін // Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Сер. : Динаміка і міцність машин = Bulletin of the National Technical University "KhPI". Ser. : Dynamics and Strength of Machines : зб. наук. пр. – Харків : НТУ "ХПІ", 2022. – № 2. – С. 56-60, doi: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2022.2.270867>

Reference list

1. Carneiro J. O., Francisco Melo, J. Rodrigues, H. Lopes, and Vasco Teixeira. "The Modal Analysis of a Pipe Elbow with Realistic

- Boundary Conditions." *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 82, 2005, pp. 593–601. doi:10.1016/j.ijpvp.2005.04.001.Zhang,
2. Zhang Bo, Ze-Yang Xing, Tao Wang, and Zhuo Wang. "The Vibration Characteristics and Allowable Span Length of Free Span Submarine Pipeline." *Proceedings of the International Conference on Manufacturing Materials and Energy*, 2017, doi:10.2991/mme-16.2017.24.
 3. Huang Yi-min, Yong-shou Liu, Bao-hui Li, Yan-jiang Li, and Zhu-feng Yue. "Natural Frequency Analysis of Fluid Conveying Pipeline with Different Boundary Conditions." *Nuclear Engineering and Design*, vol. 240, no. 3, 2010, pp. 461–467. doi:10.1016/j.nucengdes.2009.11.038..
 4. Xiao Wensheng, Haozhi Qin, Jian Liu, Qi Liu, Junguo Cui, and Fengde Wang. "Natural Frequencies and Mode Shapes of Drill Pipe in Subsea Xmas Tree Installation." *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, pp. 1–17. doi:10.1155/2020/5634194.
 5. Jun Long, et al. "Modal Analysis of Drill String in Well Engineering." *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1985, 2021, p. 012074. doi:10.1088/1742-6596/1985/1/012074.
 6. Dagli Begum Yurdanur, and Abdulkarim Ergut. "Dynamics of Fluid Conveying Pipes Using Rayleigh Theory Under Non-Classical Boundary Conditions." *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, vol. 77, 2019, pp. 125–134. doi:10.1016/j.euromechflu.2019.05.001.
 7. Li M., X. C. Chen, X. P. Chang, Y. Qin, and Y. H. Li. "General Analytical Solution for Vibrations of Pipes with Arbitrary Discontinuities and Generalized Boundary Condition on Pasternak Foundation." *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 162, 2022, p. 107910. doi:10.1016/j.ymssp.2021.107910.
 8. Oyelade Akintoye O., and Ayo A. Oyediran. "The Effect of Various Boundary Conditions on the Nonlinear Dynamics of Slightly Curved Pipes under Thermal Loading." *Applied Mathematical Modelling*, 2020. doi:10.1016/j.apm.2020.06.019.
 9. Saari Noor Fariza, Azma Putra, Irianto, Reduan Mat Dan, Muhammad Agus Zeli, Roszaidi Ramlan, Nawal Aswan Abdul Jalil, and Safarudin Herawan. "Estimating Natural Frequency of Pipe with Various Geometries: Improvement of Frequency Factors." *Heliyon*, vol. 10, no. 4, 2024, e26148. doi:10.1016/j.heliyon.2024.e26148.
 10. Danggal Manoj, and Subodh Ghimire. "Modeling and Analysis of Flow Induced Vibration in Pipes Using Finite Element Approach." *Proceedings of the Conference on Structural Dynamics*, 2020.
 11. Shui Bo, Yun-dong Li, Yu-mei Luo, and Fei Luo. "Free Vibration Analysis of Timoshenko Pipes Conveying Fluid with Gravity and Different Boundary Conditions." *Journal of Mechanics*, vol. 39, 2023. doi:10.1093/jom/ufad031.
 12. Berkay E., and Bekir Y. "A Finite Element Study on Modal Analysis of Lightweight Pipes." *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, vol. 39, no. 3, 2021, pp. 268–278.
 13. Sutar Shankarachar, Radhakrishna Madabhushi, Kameswararao Chellapilla, and P. Babu. "Determination of Natural Frequencies of Fluid Conveying Pipes Using Muller's Method." *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, vol. 100, 2018. doi:10.1007/s40032-018-0446-6.
 14. Timoshenko S. P., D. H. Young, and W. Weaver Jr. *Vibration Problems in Engineering*. 4th ed., John Wiley & Sons, 2022, Internet. https://archive.org/details/vibrationproblem0000timo_g3q2.
 15. Trubayev O. I., Larin A. O. "Pro Modelyuvannya Hranichnykh Umov dlya Vyznachennya Krytychnykh Shvydkostey Obertyannya Rotoriv." *Visnyk Natsionalnoho Tekhnichnoho Universytetu "KhPI". Seriya: Dynamika i Mitsnist Mashyn*, no. 2, 2022, pp. 56–60. doi:10.20998/2078-9130.2022.2.270867.

Надійшло (received) 18.06.2024

Відомості про авторів / About the Authors

Трубаєв Олександр Іванович (Trubayev Oleksandr) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-79; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7318-6526>; e-mail: trubayev@gmail.com

Ларін Андрій Олексійович (Larin Andrew) – кандидат технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри українознавства, культурології та історії науки; м. Харків, Україна; тел.: (057) 707-68-29; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1274-4333>; e-mail: professorlarin@gmail.com

Приходько Назар Павлович (Prykhodko Nazar) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Математичне моделювання та інтелектуальні обчислення в інженерії»; м. Харків, Україна; тел.: (093) 602-90-31; ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-9036-277X>; e-mail: prihodkonazar198@gmail.com