

Д.С. ФЕДОТОВ, В.В. ОВЧАРЕНКО, В.О. ФЕДОРОВ

ЗАСТОСУВАННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МЕТОДІВ У ЗАДАЧАХ АЕРОБАЛІСТИКИ. ВИЗНАЧЕННЯ СПРЯЖЕНИХ КУТІВ КИДАННЯ ТА ПОБУДОВА БАЛІСТИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ

Вивчена задача аеробалістики артилерійських неактивних снарядів на прикладі спрощеної математичної моделі. Як окремі підзадачі розглянуті: початкова задача, визначення горизонтальної дальності пострілу (метод Рунге-Кутти 4-го порядку з модифікацією поліноміальної інтерполяції); задача оптимізації (метод Пауелла), визначення кутів максимальної дальності — кутів кидання, при яких досягається максимальна горизонтальна дальність; крайова задача (метод стрільби з методом Ньютона-Рафсона/ методом січних/ методом поліноміальної інтерполяції), визначення кутів кидання при заданій відстані та задача знаходження спряжених траєкторій — настільної та навісної траєкторій, при яких досягається однакова горизонтальна дальність польоту снаряда при різних кутах кидання; обернена задача геодезії (метод Вінсенті), визначення геодезичної відстані між двома географічними точками на несферичній моделі Землі WGS-84. Графічно проілюстровані залежності від кутів кидання наступних характеристик: горизонтальна та вертикальна дальності, максимальна вертикальна та горизонтальна складова швидкості, модуль кінцевої швидкості, кут падіння та час польоту снарядів. Обґрунтовано існування спряжених траєкторій та визначено стратегію для інтервального запуску снарядів з метою одночасного враження цілі по різних траєкторіях. Програмування обчислювальних методів, алгоритму розв'язання поставленої задачі та елементи візуалізації були реалізовані за допомогою пакету прикладних програм MATLAB, розроблена методика та програмне забезпечення показали ефективність та можливість їх практичного застосування.

Ключові слова: зовнішня балістика, балістична траєкторія, математична модель, обчислювальні методи, системи диференціальних рівнянь.

The problem of aeroballistics of non-reactive artillery projectiles is studied by means of a simplified mathematical model. The following problems are considered as separate subproblems: initial value problem, determination of the horizontal range of a projectile (4th order Runge-Kutta method with modification of polynomial interpolation); optimization problem (Powell's method), determination of the angles of maximum range — the throwing angles at which the maximum horizontal range is achieved; the boundary value problem (shooting method with Newton-Raphson method/ secant method/ polynomial interpolation), determination of throwing angles at a given distance and the problem of finding conjugate trajectories — the low and high angled trajectories, which achieve the same horizontal range of the projectile at different throwing angles; the inverse geodesy problem (Vincenty's formulae), determination of the geodesic distance between two geographical points on the WGS-84 non-spherical Earth model. The following characteristics are graphically illustrated as a function of throwing angles: horizontal and vertical ranges, maximum vertical and horizontal velocity components, magnitudes of terminal velocities, impact angle, and flight time of projectiles. The existence of conjugate trajectories is established and the strategy of sequential firing of projectiles with the aim of simultaneously hitting the target along different trajectories is determined. The programming of the numerical methods, the algorithm for solving the problem, and the visualization elements were implemented using the MATLAB application package, and the developed methodology and software have demonstrated their effectiveness and the possibility of their practical application.

Keywords: exterior ballistics, ballistic trajectory, mathematical model, numerical methods, systems of differential equations.

Вступ. Аеробалістика (зовнішня балістика) — це наука, що вивчає вплив аеродинамічних сил на рух ракет і снарядів.

Моделювання балістичних траєкторій, розуміння поведінки снаряда під час руху в атмосфері відіграє найважливішу роль як і в плануванні стратегічних військових операцій, забезпечуючи ефективність при мінімізації використання цінних ресурсів, так і для захисту, інформуючи цивільне населення про загрозу та розробляючи обґрунтовані заходи оборони.

У контексті даної статті, на прикладі спрощеної математичної моделі, увагу сконцетровано на побудові спряжених траєкторій — балістичних траєкторій, при яких досягається однакова горизонтальна дальність польоту снаряда при різних кутах кидання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Сучасна наука про зовнішню балістику розвинулася як спеціалізований розділ динаміки твердих тіл, що рухаються під дією гравітаційних та аеродинамічних сил.

За три століття свого наукового існування зовнішня балістика досягла значного прогресу. За останні п'ятдесят років було досягнуто більшого прогресу, ніж за всі попередні століття. Так значний обсяг теоретичної інформації та результатів практичних досліджень викладено у [1,2], де розглядаються аеродинамічні сили та моменти, що діють на снаряди, побудова від найпростіших моделей

— руху у вакуумі, до найскладніших — повної моделі динаміки польоту з шістьма ступенями свободи.

У роботі [3] надається математична модель, де невизначеність обчислення сили спротиву повітря призводить до застосування апроксимації через розв'язання оберненої задачі механіки, що визначає функціональну залежність цієї сили на етапах руху снаряда та дозволяє автоматизувати визначення кута підйому в залежності від умов та параметрів стрільби.

Обчислювальні методи та наявні апроксимації, які можуть бути застосовані у контексті аеробалістики, наведені у [4-13].

Постановка задачі. Нехай задано дві точки на поверхні Землі, A та B , кожна з яких визначається певними координатами широти (φ) і довготи (λ). Під якими кутами кидання та через який проміжок часу від запуску першого снаряда з точки A потрібно запустити другий снаряд так, щоб вони одночасно влучили в точку B по двох різних траєкторіях? Дану задачу можна розділити на підзадачі:

- 1) Визначення геодезичної відстані D між заданими точками.
- 2) Визначення часу польоту снаряда t , що є розв'язком нелінійного рівняння

$$s_y(t) = 0, \quad t \neq 0.$$
- 3) Визначення кута найбільшої дальності θ_{\max} . Якщо розглянути функцію $f(\theta_0)$ залежності

дальності польоту снаряда від кута кидання, то

$$\theta_{\max} = \operatorname{argmax} f(\theta_0).$$

- 4) Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій. Для цього потрібно розв'язати рівняння

$$f(\theta_0) = D.$$

- 5) Визначення часу польоту снарядів по спряжених траєкторіях. Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння.

Побудова математичної моделі руху снаряда.

Для постійної маси снаряда другий закон Ньютона дає загальне векторне диференціальне рівняння руху у вигляді [1, 2]

$$m \frac{dv}{dt} = \sum \mathbf{F} + m\mathbf{g} + m\mathbf{\Lambda}, \quad (1)$$

де

m – маса снаряда;

$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$ – вектор прискорення снаряда;

$\sum \mathbf{F}$ – векторна сума всіх аеродинамічних сил;

\mathbf{g} – вектор прискорення вільного падіння;

$\mathbf{\Lambda}$ – вектор прискорення Коріоліса.

Розглянемо спрощену модель, яка ґрунтується на припущенні, що маса снаряда зосереджена в матеріальній точці у просторі. На такий снаряд не діє жодна аеродинамічна сила, окрім сили спротиву повітря. Якщо дуже малим Коріолісовим прискоренням нехтувати, то рівняння набуває вигляду [1-3]

$$m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F}_{\text{drag}} + m\mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} \rho C_d S_{\text{fr.pr.}} |\mathbf{v}| \mathbf{v},$$

$$S_{\text{fr.pr.}} = \frac{\pi d^2}{4},$$

де

\mathbf{F}_{drag} – сила спротиву повітря;

ρ – густина повітря;

C_d – коефіцієнт аеродинамічного спротиву;

$S_{\text{fr.pr.}}$ – площа фронтальної проекції снаряда;

d – діаметр снаряда.

Так як густина повітря не є постійною величиною, то можна використати її апроксимацію, яка доречна в межах тропосфери [4]:

$$\rho = \rho(h) \approx \frac{p_0 M}{RT_0} \left(1 - \frac{Lh}{T_0}\right)^{\frac{|g|M}{RL} - 1},$$

де

p_0 – стандартний атмосферний тиск на рівні моря;

T_0 – стандартна температура на рівні моря;

h – висота над рівнем моря;

R – універсальна газова стала;

L – швидкість падіння температури;

M – молярна маса сухого повітря.

Розглянемо прямокутну систему координат з початком координат на дулі пушки:

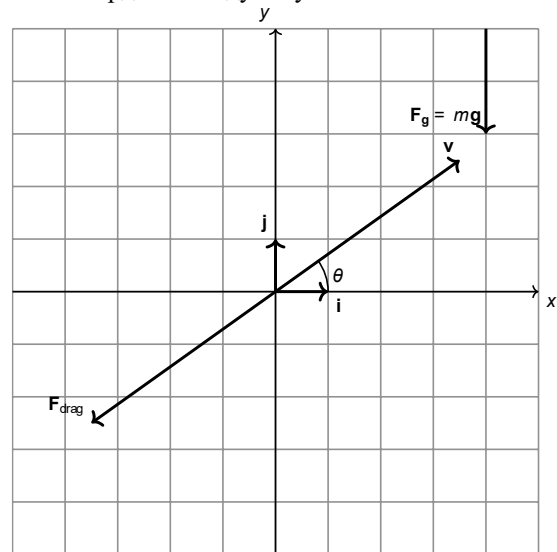


Рисунок 1 – Геометрична інтерпретація діючих сил

Вісь Ox обираємо дотичною до поверхні землі в точці запуску і спрямовуємо вздовж лінії вогню, нехтуючи відхиленням ($s_z = v_z = 0$). Вісь Oy спрямована вертикально вгору, через точку запуску.

Спроектуємо скалярно на осі всі наявні вектори, та запишемо другий закон Ньютона (2) у проєкціях:

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -|\mathbf{F}_{\text{drag}}| \cos \theta \\ m \frac{dv_y}{dt} = -m|\mathbf{g}| - |\mathbf{F}_{\text{drag}}| \sin \theta. \end{cases}$$

Скориставшись рис. 1 та визначенням швидкості, система диференціальних рівнянь набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} \dot{s}_x = -a(1 - bs_y)^c \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y = -|\mathbf{g}| - a(1 - bs_y)^c \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \dot{s}_y, \\ a = \frac{\pi d^2 p_0 M C_d}{8mRT_0}, \quad b = \frac{L}{T_0}, \quad c = \frac{|\mathbf{g}|M}{RL} - 1. \end{cases}$$

Введемо нові змінні:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \\ \dot{s}_x \\ s_y \\ \dot{s}_y \end{bmatrix},$$

після чого отримаємо нормалізовану систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a(1 - bx_3)^c \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -|\mathbf{g}| - a(1 - bx_3)^c \sqrt{x_2^2 + x_4^2} x_4, \end{cases} \quad (3)$$

а початкові умови мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} x_1(t)|_{t=t_0} = 0 \\ x_2(t)|_{t=t_0} = |\mathbf{v}_0| \cos \theta_0 \\ x_3(t)|_{t=t_0} = 0 \\ x_4(t)|_{t=t_0} = |\mathbf{v}_0| \sin \theta_0. \end{cases} \quad (4)$$

У такому вигляді початкова задача (3,4) подається у програму для подальшого розв'язку.

Математичне підґрунтя. Однією з підзадач є визначення геодезичної відстані, ця задача класифікується як обернена геодезична — знаходження найкоротшого шляху між двома заданими точками. Розв'язання відбувається на моделі Землі WGS-84 ітеративним оберненим методом Вінсенті, що цитується як точний з похибкою до міліметрів [6, 7].

Методи оптимізації. Для розв'язку третьої підзадачі треба використовувати методи одновимірної оптимізації, одним з таких є метод Пауелла, який і використовується у програмі [8].

Обчислювальні методи. Як і побудова балістичних траєкторій, так і кожне обчислення функцій $s_y(t)$ та $f(\theta_0)$ потребує розв'язку початкової задачі (3,4). Для цього у програмі використовуються явні m -етапні методи Рунге-Кутти [9].

Розглянемо n -вимірну систему диференціальних рівнянь з початковими умовами:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}_0, \quad t \in [t_0, t_{\max}],$$

де

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T,$$

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = [f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n)]^T.$$

Явний m -етапний метод Рунге-Кутти для даної системи визначається так:

$$\frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i}{\tau} = \sum_{s=1}^m b_s \mathbf{k}_{i,s} \Rightarrow \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \tau \sum_{s=1}^m b_s \mathbf{k}_{i,s},$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{i,1} = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{k}_{i,m} = \mathbf{f}\left(t_i + c_m \tau, \mathbf{x}_i + \tau \sum_{s=1}^{m-1} a_{m,s} \mathbf{k}_{i,s}\right), \end{cases}$$

де τ – крок дискретизації по часу.

Коефіцієнти методів зручно подаються у вигляді таблиці Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{c} & \mathbf{A} \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}$$

Аналізуючи методи, розглянуті в літературі, було обрано класичний метод Рунге-Кутти 4-ого порядку точності як оптимальний за кількістю етапів та потрібній точності у контексті поставленої задачі:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

Модифікації методів Рунге-Кутти. Природною умовою зупинки інтегрування системи диференціальних рівнянь (3) є

$$x_3(t) = s_y(t) = 0, \quad t \neq 0.$$

Геометрична інтерпретація цієї умови — влучання снаряда у кінцеву точку. Оскільки функція $s_y(t)$ є дискретною, то розв'язувати вищевказане рівняння потрібно використовуючи наближені методи.

Нехай система диференціальних рівнянь (3) з початковими умовами (4) була інтегрована методами Рунге-Кутти з кроком дискретизації по часу $\tau = \tau_0$. Розглянемо n -ту ітерацію:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}(t)|_{t=t_n} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} \\ x_4^{(n)} \end{bmatrix}, \quad x_3^{(n)} > 0,$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}(t)|_{t=t_{n+1}} = \begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \\ x_3^{(n+1)} \\ x_4^{(n+1)} \end{bmatrix}, \quad x_3^{(n+1)} < 0.$$

Звідси випливає, що $\exists t^* \in (t_n, t_{n+1}): x_3(t^*) = 0$.

Модифікації методів Рунге-Кутти полягають саме у визначенні $t = t^*$ з подальшим знаходженням нового значення $\tau = \tau_{\text{new}}$ для інтегрування системи диференціальних рівнянь з метою визначення часу та горизонтальної дальності польоту снаряда, кінцевих швидкостей та кутів падіння, що потребує даних про снаряд у момент влучання.

Крайові задачі. Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій можна інтерпретувати як крайову задачу [10,11], яка розв'язується методом стрільби спільно з методом Ньютона-Рафсона, методом січних, або використовуючи поліноміальну інтерполяцію.

Нехай дано $n + 1$ різних вузлів $x_i, i = \overline{0, n}$, та значення функції $y_i = y(x_i)$. Запишемо інтерполянт в інтерпретації Вандермонда:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Використовуючи умови інтерполяції, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів:

$$\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Матрицю \mathbf{V} називають матрицею Вандермонда [11,12], а вектор невідомих визначається як

$$\mathbf{a} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}.$$

З вищевказаних формул можна зробити висновок про єдиність полінома $P_n(x)$ степені $\leq n$ для якого виконуються умови інтерполяції.

Слід зазначити, що шукати інтерполянт в інтерпретації Вандермонда є нераціонально для великої кількості вузлів, тому що у загальному випадку визначення невідомих коефіцієнтів потребує $O(n^3)$ операцій, тому в програмі також реалізована поліноміальна інтерполяція Лагранжа.

Розглянемо класичну форму полінома Лагранжа, де кожне обчислення $P_n(x)$ потребує $O(n^2)$ операцій додвань та множень:

$$e_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i e_i(x).$$

Введемо новий параметр ω_i — барицентричну вагу:

$$\omega_i = \frac{1}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}.$$

Запишемо ще два вигляди інтерполянта, де кожне обчислення $P_n(x)$ потребує $\mathcal{O}(n)$ операцій додавань та множень [13]:

- 1) Модифікована форма полінома Лагранжа

$$\ell(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i),$$

$$P_n(x) = \ell(x) \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i y_i}{x - x_i}.$$

- 2) Барицентрична форма полінома Лагранжа

$$P_n(x) = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i y_i}{x - x_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{x - x_i}}.$$

Програмування усіх методів та візуалізація результатів здійснювалось на базі MATLAB [14], яка втілює інтерактивне середовище з високорівневою мовою програмування, що підтримує як числові, так і графічні команди для дво- та тривимірної аналізу та представлення даних.

Обґрунтування існування розв'язку поставленої задачі. Розглянемо дискретну множину кутів кидання

$$\Theta_0 = \{ \theta_0^{(k)} \mid \theta_0^{(k)} = 0.1^\circ + 0.01^\circ(k - 1), k = \overline{1, 8991} \}.$$

Нескінченний аналог визначимо наступним чином:

$$\Theta_0^{(\infty)} = \{ \theta_0 \mid \theta_0 \in \mathbb{R}, \theta_0 \in (0^\circ, 90^\circ) \}.$$

Математична модель розглядається на прикладі снаряда М795 [15]. Слід зазначити, що коефіцієнт аеродинамічного спротиву було підібрано так, щоб модельована максимальна дальність польоту снаряда наближено збігалась зі зазначеною у відкритому доступі, тому дана характеристика може відрізнитись від реальної як наслідок спрощення математичної моделі.

Зробити висновок про існування спряжених траєкторій та траєкторії максимальної дальності, що у свою чергу підтверджує коректність поставленої задачі та існування її розв'язку, можна побудувавши тільки одну неявну функцію $s_x(\theta_0)$, яка задається дискретно в результаті розв'язку 8991 початкових задач (3,4) для всіх $\theta_0 \in \Theta_0$:

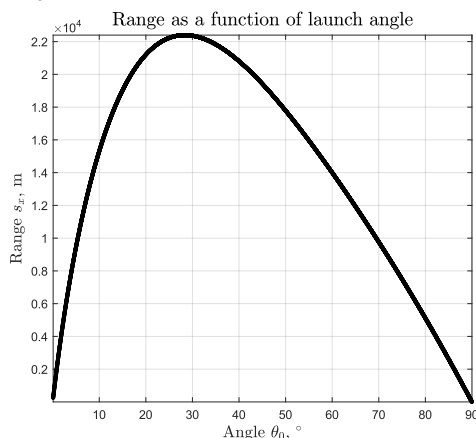


Рисунок 2 – Графік залежності горизонтальної дальності від кута кидання

Звідси впливають факти, які підтверджують існування шуканих траєкторій:

$$\exists! \theta_0 = \theta_{\max} \in \Theta_0^{(\infty)}: \theta_{\max} = \operatorname{argmax} s_x(\theta_0),$$

$$\exists \theta_{\text{low}}, \theta_{\text{high}} \in \Theta_0^{(\infty)} \setminus \{ \theta_{\max} \}: s_x(\theta_{\text{low}}) = s_x(\theta_{\text{high}}).$$

Частину чисельних результатів подано у наступній таблиці:

Таблиця 1 – Значення функції $s_x(\theta_0)$ в околі екстремуму

$\theta_0, ^\circ$	$s_x(\theta_0), m$	t_{\max}, s
28.1	22396.6158	59.341572
28.11	22396.68768	59.35637208
28.12	22396.75661	59.37116861
28.13	22396.82258	59.38596158
28.14	22396.88527	59.40074941
28.15	22396.94577	59.41553725
28.16	22397.00291	59.43031958
28.17	22397.0571	59.44509835
28.18	22397.10834	59.45987357
28.19	22397.15665	59.47464522
28.2	22397.20202	59.48941334
28.21	22397.24452	59.50417826
28.22	22397.28403	59.51893932
28.23	22397.3206	59.53369681
28.24	22397.35423	59.54845074
28.25	22397.38493	59.56320113
28.26	22397.4127	59.57794796
28.27	22397.43754	59.59269126
28.28	22397.45953	59.60743138
28.29	22397.47854	59.62216763
28.3	22397.49461	59.63690032
28.31	22397.50777	59.65162946
28.32	22397.518	59.66635505
28.33	22397.52531	59.68107711
28.34	22397.52972	59.69579563
28.35	22397.53128	59.71051098
28.36	22397.52986	59.72522247
28.37	22397.52553	59.7399304
28.38	22397.51828	59.75463478
28.39	22397.50813	59.76933563
28.4	22397.49508	59.78403294

З точністю до соті градуса вже можна визначити кут максимальної дальності, але кожного разу розв'язувати тисячі, а у випадку підвищення точності — десятки тисяч систем диференціальних рівнянь, є нераціональним шляхом розв'язку поставленої задачі.

Для майбутнього аналізу можуть бути корисні й наступні залежності, які можна отримати аналогічним чином, що й $s_x(\theta_0)$:

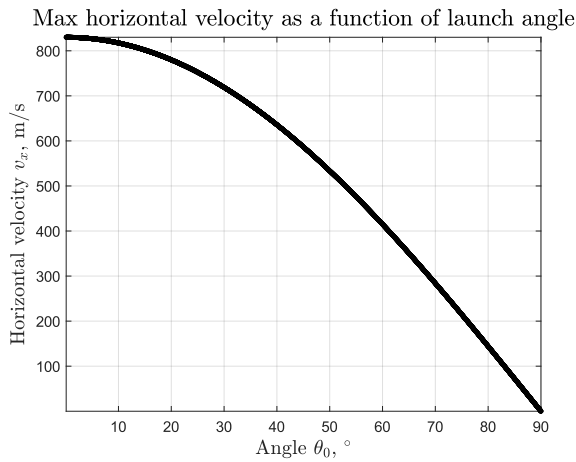


Рисунок 3 – Графік залежності максимальної горизонтальної складової швидкості від кута кидання

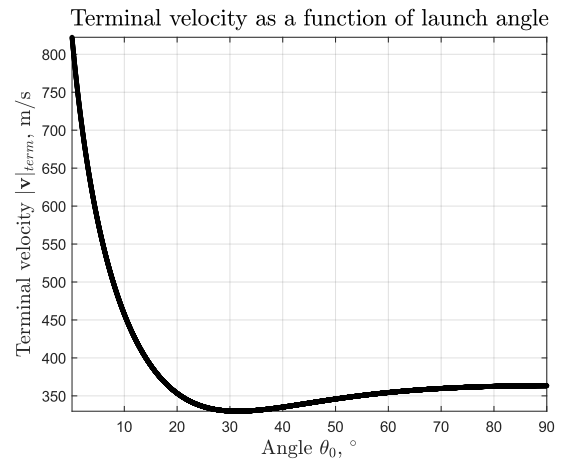


Рисунок 6 – Графік залежності кінцевої швидкості від кута кидання

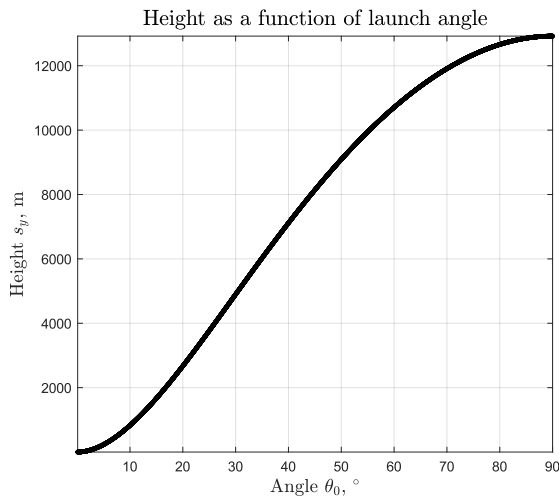


Рисунок 4 – Графік залежності вертикальної дальності від кута кидання

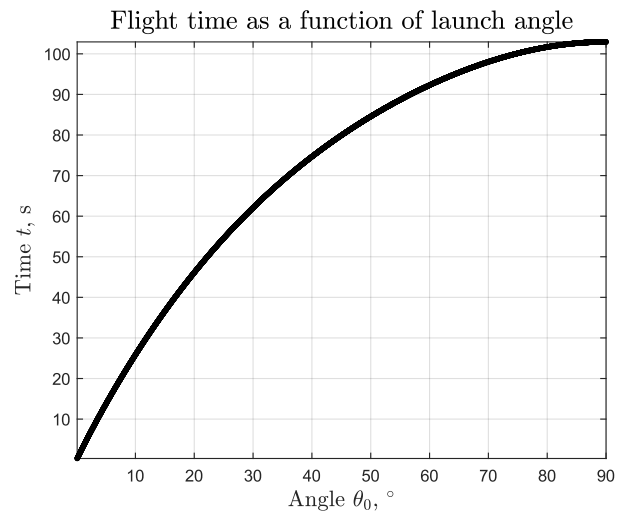


Рисунок 7 – Графік залежності часу польоту від кута кидання

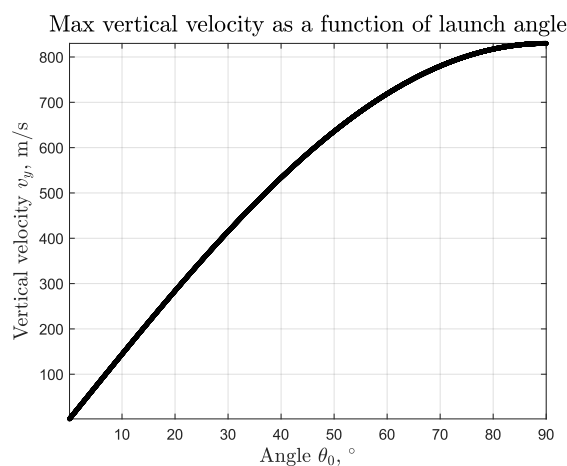


Рисунок 5 – Графік залежності максимальної вертикальної складової швидкості від кута кидання

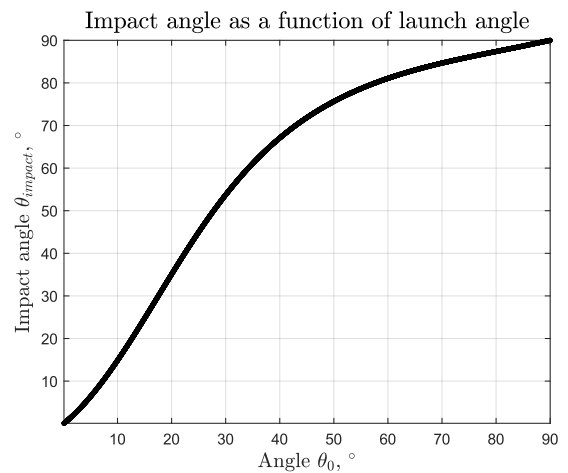


Рисунок 8 – Графік залежності кута падіння від кута кидання

Кут падіння розраховується за формулою

$$\theta_{\text{impact}} = \arccos\left(\frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{v}_{\text{term}}}{|\mathbf{v}_{\text{term}}|}\right).$$

Використовуючи монотонність функції залежності часу польоту від кута кидання можна також зробити висновок, що

$$\exists! \Delta t: t_{\text{max}}(\theta_{\text{low}}) + \Delta t = t_{\text{max}}(\theta_{\text{high}}).$$

Отже, поставлена задача є повністю коректною та має розв'язок.

Тестування працездатності програми. Перш за все, на чому базується алгоритм — це розв'язання початкової задачі (3,4), яке відбувається методом Рунге-Кутти 4-ого порядку точності з кроком по часу $\tau_0 = 0.1$ s разом з модифікацією для визначення часу польоту методами поліноміальної інтерполяції. Алгоритм програми має наступний вигляд:

- 1) Розв'язання оберненої геодезичної задачі методом Вінсенті. Порівняння геодезичної відстані D з максимальною дальністю снаряда.
- 2) Визначення кута максимальної дальності методом Пауелла.
- 3) Визначення кутів кидання для спряжених траєкторій методом січних.
- 4) Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння.

Допустима похибка у кожному методі варіюється, для тестування вона була встановлена на рівні $\varepsilon = 10^{-6}$ одиниць (градусів, метрів тощо).

Вхідними даними є характеристики снаряда М795 та координати точок

$$A(50.242222^\circ, 36.984722^\circ), \\ B(50.399967^\circ, 36.881389^\circ).$$

Після визначення геодезичної відстані

$$D \approx 19027.5106197135 \text{ m},$$

яке у середньому на даних точках відбувається за 5 ms , її можна нанести на відповідний графік для візуалізації поставленої задачі

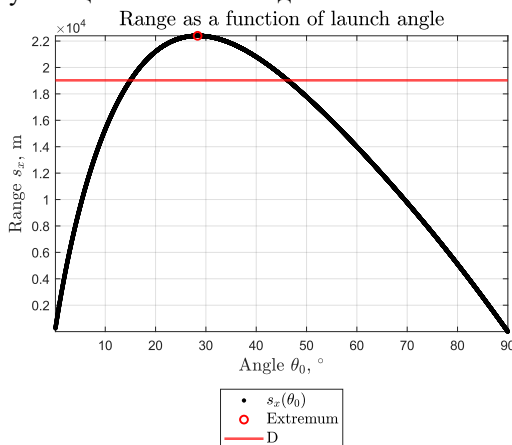


Рисунок 9 – Геометрична інтерпретація поставленої задачі

Для визначення кута максимальної дальності програми знадобилось 10 розв'язань початкових задач (3,4), а для визначення кутів спряжених траєкторій — 20 (11 для

визначення кута для настільної траєкторії, 9 — для нависної). Ці процеси у середньому відповідно тривали 120 ms та 187 ms .

Підрахунок проміжку часу для інтервального запуску снарядів, кінцевих швидкостей та кутів падіння у середньому тривали 16 ms .

Побудувавши отримані траєкторії, можна побачити наступний результат:

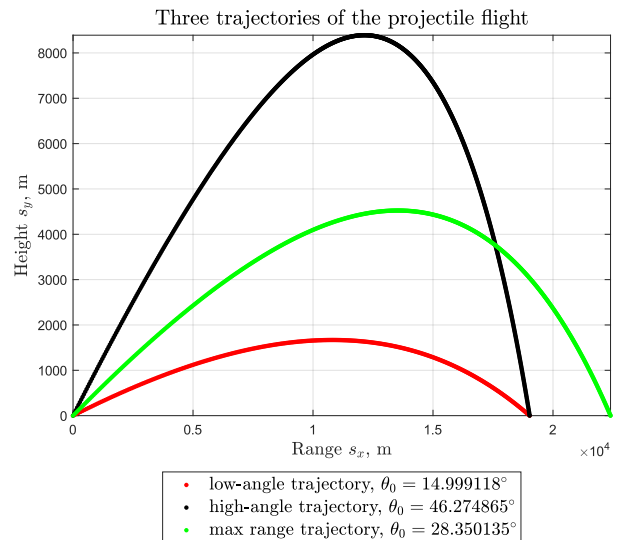


Рисунок 10 – Побудова трьох отриманих траєкторій

На відповідний графік можна нанести визначені спряжені кути, щоб візуально оцінити інтервал часу Δt для послідовного запуску снарядів:

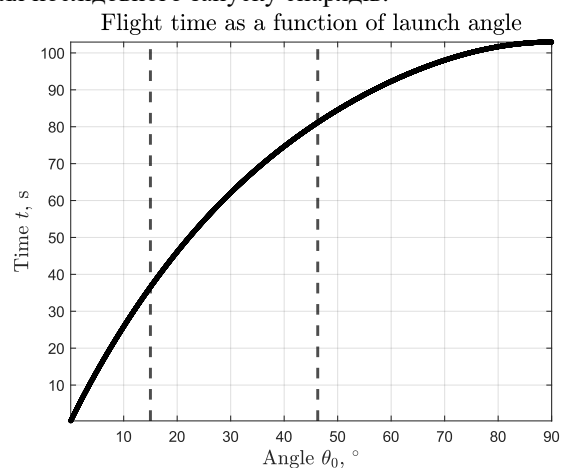


Рисунок 11 – Візуалізація часового інтервалу

Чисельний результат, отриманий в результаті роботи програми:

$$\Delta t \approx 44.575258 \text{ s}.$$

Отже, якщо запустити перший снаряд з точки A під кутом кидання $\theta_{\text{high}} = 46.274865^\circ$, а другий снаряд через проміжок часу Δt від моменту запуску першого снаряда під кутом кидання $\theta_{\text{low}} = 14.999118^\circ$, то обидва снаряди одночасно влучать у точку B по різних траєкторіях.

Основні результати роботи програми можна подати у вигляді таблиці:

Таблиця 2 – Основні характеристики для визначених траєкторій

	$\theta_0, ^\circ$	t_{\max}, s	$s_x(t_{\max}), m$	$ v_{\text{term}} , m/s$	$\theta_{\text{impact}}, ^\circ$
$\theta_{\text{low}} \text{ traj.}$	14.999118	36.574475	19027.51062	390.235709	24.724778
$\theta_{\text{high}} \text{ traj.}$	46.274865	81.149733	19027.51062	341.95548	72.902789
$\theta_{\text{max}} \text{ traj.}$	28.350135	59.71071	22397.53128	330.956108	50.986198

Висновки. На прикладі спрощеної математичної моделі було продемонстровано застосування обчислювальних методів до рівнянь аеробалістики.

Програмування у середовищі MATLAB дозволило отримати чисельні розв'язки всіх поставлених задач, а саме: визначення геодезичної відстані на несферичній моделі Землі; побудова балістичних траєкторій; визначення часу польоту снаряда, кутів кидання для спряжених траєкторій та кутів максимальної дальності; опис стратегії для інтервального запуску снарядів, що одночасно влучають у ціль по різних траєкторіях; визначення кінцевих швидкостей та кутів падіння.

У порівнянні зі звичайним перебором кутів кидання, що у загальному випадку може сягати розв'язку десятків тисяч систем диференціальних рівнянь тільки для визначення кута максимальної дальності, розробленому алгоритму на тестовій задачі знадобилось лише десятки, щоб визначити як і кут максимальної дальності, так і спряжені кути кидання.

Розроблена програма та використані методи продемонстрували свою ефективність і можуть бути застосовані надалі для розв'язку задач аеробалістики на складніших математичних моделях.

Список літератури

- Carlucci D. E., Jacobson S. S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press eBooks, 2018, 654 p. <https://doi.org/10.1201/b22201>
- McCoy R.L. *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Military History, Atglen, 2012. 328 p.
- Huzyk N. M., Sokulska N. B., Velychko L. D. *Mathematical model of external ballistics of projectiles*. Information Processing Systems, 2023, No. 1, pp. 20–28. <https://doi.org/10.30748/soi.2023.172.03>
- Lente, G., Ösz, K. *Barometric formulas: various derivations and comparisons to environmentally relevant observations*. ChemTexts, 2020, Vol. 6, No. 13. <https://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>
- International Civil Aviation Organization. *World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual*. ICAO, 2002. <https://www.icao.int/NACC/Documents/Meetings/2014/ECARAIM/REF08-Doc9674.pdf>
- Kamey, C.F.F. *Algorithms for geodesics*. J Geod, 2013, Vol. 87, pp. 43–55. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0578-z>
- Vincenty T. *Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations*, Survey Review, 1975, Vol. 23, No.176, pp. 88-93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>
- Татарінова О. А., Плаксії, Ю. А. *Методи оптимізації функцій: навч.- метод. посіб. : у 2-х ч. – Ч. 1 : Методи мінімізації функцій однієї змінної*. НТУ «ХПІ», Харків, 2017.
- Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 2016, 513 p. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>
- Іглін С. П. *Чисельні методи на базі MATLAB: навч. посіб. для студентів усіх спеціальностей усіх форм навчання вищих навчальних закладів*. "НТМТ", Харків, 2023.
- Brubeck P. D., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N. *Vandermonde with arnoldi*. Siam Review, 2021, Vol. 63, No. 2, pp. 405–15. <https://doi.org/10.1137/19m130100x>.
- Abdelwahab K., Guenther R. B. *An introduction to numerical methods: A MATLAB approach*. Chapman and Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series, 2019, 615 p. ISBN: 978-1-138-09307-2
- Berrut J.-P., Trefethen L. N. *Barycentric lagrange interpolation*. Siam Review, 2004, Vol. 46, No. 3, pp. 501–17. <https://doi.org/10.1137/s0036144502417715>
- The MathWorks, Inc. (2023). *MATLAB version: 9.14.0 (R2023a)*. Available: <https://www.mathworks.com>.
- Joint Program Executive Office Armaments and Ammunition. *Portfolio Book*. JPEO A&A, 2017. <https://jpeoaa.army.mil/>

References (transliterated)

- Carlucci D. E., Jacobson S. S. *Ballistics: Theory and Design of Guns and Ammunition*. CRC Press eBooks, 2018, 654 p. <https://doi.org/10.1201/b22201>
- McCoy R.L. *Modern Exterior Ballistics. The Launch and Flight Dynamics of Symmetric Projectiles*. Schiffer Military History, Atglen, 2012. 328 p.
- Huzyk N. M., Sokulska N. B., Velychko L. D. *Mathematical model of external ballistics of projectiles*. Information Processing Systems, 2023, No. 1, pp. 20–28. <https://doi.org/10.30748/soi.2023.172.03>
- Lente, G., Ösz, K. *Barometric formulas: various derivations and comparisons to environmentally relevant observations*. ChemTexts, 2020, Vol. 6, No. 13. <https://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>
- International Civil Aviation Organization. *World Geodetic System — 1984 (WGS-84) Manual*. ICAO, 2002. <https://www.icao.int/NACC/Documents/Meetings/2014/ECARAIM/REF08-Doc9674.pdf>
- Kamey, C.F.F. *Algorithms for geodesics*. J Geod, 2013, Vol. 87, pp. 43–55. <https://doi.org/10.1007/s00190-012-0578-z>
- Vincenty T. *Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with application of nested equations*, Survey Review, 1975, Vol. 23, No.176, pp. 88-93. <https://doi.org/10.1179/sre.1975.23.176.88>
- Tatarinova O. A., Plakcii, Yu. A. *Metody optimizatsii funktsii: navch.- metod. posib. : u 2-kh ch. – Ch. 1 : Metody minimizatsii funktsii odniiei zminnoi*. NTU «KhPI», Kharkiv, 2017.
- Butcher J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley and Sons, 2016, 513 p. <https://doi.org/10.1002/9781119121534>
- Ihlin S. P. *Chyselni metody na bazi MATLAB: navch. posib. dlia studentiv usikh spetsialnostei usikh form navchannia vyshchikh navchalnykh zakladiv*. «NTMT», Kharkiv, 2023.
- Brubeck P. D., Nakatsukasa Y., Trefethen L. N. *Vandermonde with arnoldi*. Siam Review, 2021, Vol. 63, No. 2, pp. 405–15. <https://doi.org/10.1137/19m130100x>
- Abdelwahab K., Guenther R. B. *An introduction to numerical methods: A MATLAB approach*. Chapman and Hall/CRC Numerical Analysis and Scientific Computing Series, 2019, 615 p. ISBN: 978-1-138-09307-2
- Berrut J.-P., Trefethen L. N. *Barycentric lagrange interpolation*. Siam Review, 2004, Vol. 46, No. 3, pp. 501–17. <https://doi.org/10.1137/s0036144502417715>
- The MathWorks, Inc. (2023). *MATLAB version: 9.14.0 (R2023a)*. Available: <https://www.mathworks.com>.
- Joint Program Executive Office Armaments and Ammunition. *Portfolio Book*. JPEO A&A, 2017. <https://jpeoaa.army.mil/>

Відомості про авторів / About the Authors

Федотов Денис Сергійович (Fedotov Denys Serhiiovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», бакалавр з прикладної математики; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Denys.Fedotov@infiz.khpi.edu.ua.

Овчаренко Віталій Володимирович (Ovcharenko Vitalii Volodymyrovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Vitalii.Ovcharenko@khpi.edu.ua; ORCID: 0009-0008-1464-3425.

Федоров Віктор Олександрович (Fedorov Viktor Oleksandrovych) – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії; тел.: (057) 707-68-79; e-mail: Victor.Fedorov@khpi.edu.ua; ORCID: 0000-0002-4814-6768.