

Ю. А. ПЛАКСІЙ, Ю. О. КУЗНЕЦОВ

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОРІЄНТАЦІЇ ТВЕРДОГО ТІЛА В КВАТЕРНІОНАХ ЧЕРЕЗ ПОСЛІДОВНІСТЬ ЕЙЛЕРОВИХ КУТІВ ДЛЯ ТОЧНОСНОГО АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ В БІНС

Розглянуті дві концепції побудовання аналітичних тестових кутових рухів твердого тіла для опрацювання алгоритмів орієнтації при проектуванні безплатформених систем орієнтування. Перша концепція оснований на представленні кватерніона орієнтації в послідовності трьох ейлерових кутів. Друга концепція базується на формалізованому представленні кватерніона у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних аргументів і не має чіткої наочної інтерпретації через кути елементарних поворотів. Аналітичні вирази для модельної кутової швидкості при цьому можуть бути отримані з оберненого кінематичного рівняння в кватерніонах. Розглянутий загальний випадок лінійних кутів Крилова і Ейлера, а також випадок, коли один з кутів не змінюється з плином часу. Проведено аналітично-чисельне моделювання кутового руху твердого тіла і оцінювання точності алгоритма визначення кватерніона на основі розкладень четвертого і п'ятого порядків з попереднім застосуванням алгоритма Міллера. Для цього модель тестового руху доповнюється моделюванням ідеальної інформації з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат з використанням аналітичних формул для вектора позірної повороту. Показано, що формули п'ятого порядку забезпечують покращення оцінки накопиченого обчислювального дрейфу в порівнянні з формулами четвертого порядку.

Ключові слова: ейлерові кути, вектор орієнтації, кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, алгоритм орієнтації Міллера, чисельно-аналітичне моделювання, накопичений дрейф.

Two concepts for constructing analytical angular test motions of a rigid body for testing orientation algorithms when designing strapdown orientation systems are considered. The first concept is based on representing the orientation quaternion in a sequence of three Euler angles. The second concept is based on a formalized representation of the quaternion as a superposition of trigonometric functions of linear arguments and does not have a clear visual interpretation through the angles of elementary rotations. Analytical expressions for the model angular velocity can be obtained from the inverted kinematic equation in quaternions. The general case of linear Krylov and Euler angles is considered, as well as the case when one of the angles does not change over time. Analytical-numerical modeling of the angular motion of a rigid body and an assessment of the accuracy of the algorithm for determining the quaternion based on fourth- and fifth-order expansions with preliminary application of the Miller algorithm were carried out. For this purpose, the test movement model is supplemented by modeling ideal information from the outputs of angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates using analytical formulas for the apparent rotation vector. It is shown that fifth-order formulas provide an improved estimate of the accumulated computational drift compared to fourth-order formulas.

Keywords: Euler angles, orientation vector, quaternion, reference model, test motion, quasi-coordinates, Miller orientation algorithm, numerical-analytical modeling, accumulated drift.

Вступ. Розглядається задача точного аналізу і опрацювання алгоритмів визначення орієнтації [1] в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС), яка має місце на етапі проектування системи орієнтації рухомого об'єкта. Зусиллями багатьох дослідників на теперішній час розроблено значну кількість алгоритмів визначення параметрів орієнтації по ідеальній інформації з тріади датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат [2-6]:

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

де $\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ – проєкції вектора абсолютної кутової швидкості $\vec{\omega}$ на осі зв'язаної з рухомим об'єктом системи координат. Роботи з розробки і удосконалення відомих алгоритмів орієнтації тривають і досі [7, 8].

Для більшості прикладних задач в якості параметрів орієнтації застосовуються кватерніони, оскільки кватерніонне кінематичне рівняння є лінійним, має перший інтеграл, і операції перетворення векторів легко виконуються за допомогою кватерніонів. Однак, розкладення кватерніонного кінематичного рівняння в ряд в термінах квазікоординат (1) призводить до низки однокрокових алгоритмів, які практично обмежуються четвертим порядком. При цьому алгоритми третього і четвертого порядку вимагають спеціальної «розгонки». Ці обставини призвели до використання вектора орієнтації в якості «проміжного» параметру при

обчисленні кватерніона орієнтації [2,4,10,11]. Значний доробок в розробку алгоритмів визначення вектора орієнтації різного порядку в Україні вніс А.Панов [11,12]. Ним була розроблена низка алгоритмів, що використовують первинну інформацію (1) з різних тактів знімання.

В умовах високої швидкодії сучасних автономних обчислювачів виникає можливість підвищення точності орієнтації за рахунок використання інформації про квазікоординати (1) всередині такту обчислень, що є особливо важливим для високодинамічних об'єктів. Більшість таких алгоритмів заснована на поліноміальній апроксимації вектора кутової швидкості всередині кроку обчислень з використанням наближеного рівняння Борца [2].

В відомому алгоритмі Міллера [4] приріст вектора орієнтації $\vec{\theta}_n = (\theta_{n1}, \theta_{n2}, \theta_{n3})$ на такті обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ обчислюється за формулою:

$$\vec{\theta}_n = \vec{\theta}_n^* + \alpha(\vec{\theta}_n^1 \times \vec{\theta}_n^3) + \beta\vec{\theta}_n^2 \times (\vec{\theta}_n^3 - \vec{\theta}_n^1), \quad (2)$$

а вихідні сигнали гіроскопів $\vec{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$, $\vec{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$, $\vec{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \vec{\omega}(t) dt$ формуються всередині такту обчислень в точках знімання первинної інформації (1) $t_{n-1} + 1/3 \Delta T$,

$t_{n-1} + 2/3 \Delta T, t_{n-1} + \Delta T$, де ΔT – величина такту обчислень. Міллером на основі оптимізації під кіничний рух отримано, що $\alpha = 33/80, \beta = 57/80$.

Для коректного оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації зазвичай використовують спеціальні тестові рухи твердого тіла у вигляді еталонних моделей, для яких кватерніон орієнтації і квазікоординати (1) представляються аналітичними залежностями від часу [13]. Такі тестові рухи можуть бути також застосовані для оптимізації алгоритмів орієнтації на основі мінімізації відповідних методичних похибок. Так, наприклад, коефіцієнти алгоритму (2) були отримані Міллером на основі оптимізації аналітичного виразу похибки орієнтації у вигляді степеневого ряду. Ця методика отримала подальший розвиток в роботах [9,14-16]. Характерно, що в якості тестового руху розглядався кіничний (прецесійний) рух твердого тіла, для якого відомі аналітичні розв'язки в елементарних функціях сукупності кінематичних і динамічних рівнянь обертання твердого тіла.

Інший підхід до побудови тестових рухів запропоновано в роботах [17-24]. Відповідно до цього підходу в основу побудови еталонної моделі обертального руху, яка включає в собі аналітичні залежності від часу для кватерніону орієнтації $\Lambda(t)$, проєкцій вектора кутової швидкості $\vec{\omega}(t)$ і вектора позірного повороту

$$\vec{\theta}(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t)) = \int_0^t \vec{\omega}(t) dt, \quad (3)$$

покладається кватерніонна кінематична модель у вигляді певної конструкції з тригонометричних функцій від лінійних аргументів. Це дозволяє знайти аналітичні залежності від часу для проєкцій вектора кутової швидкості на основі оберненого кінематичного рівняння

$$\vec{\omega}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t),$$

де $\tilde{\Lambda}(t)$ – спряжений кватерніон до $\Lambda(t)$, і для вектора позірного повороту (3). Представлення кватерніона орієнтації у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних кутів забезпечує автоматичне його нормування $\|\Lambda\| = 1$. При цьому *формалізованому підході* модельний кватерніон в загальному випадку неможливо представити через послідовність елементарних поворотів на ейлерові кути. Окремим також вбачається питання реалізованості модельного руху на основі аналізу оберненої задачі динаміки.

В роботі [8] наведена аналітична модель кутового руху твердого тіла на основі представлення кватерніона в послідовності чотирьох поворотів на лінійні кути і знайдені оптимізовані коефіцієнти алгоритму Міллера для цієї моделі.

В даній роботі розглядаються методологічні аспекти застосування опису кінематики обертального руху на основі ейлерових кутів для моделювання тестових рухів твердого тіла.

Аналітичні моделі кутового руху твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації через послідовність кутів. Як відомо [25], послідовність трьох обертань навколо різних

неспівпадаючих осей задає довільне перетворення обертання на ейлерові кути. При обертанні навколо координатних осей звичайно розрізняють дві послідовності обертань: повороти на кути Ейлера і повороти на кути Крилова.

Кватерніон результуючого повороту у випадку кутів Крилова має вигляд:

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 \circ \Lambda_3, \quad (4)$$

де $\Lambda_1 = (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}), \Lambda_2 = (\cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_2 \sin \frac{\psi}{2}),$

$\Lambda_3 = (\cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\vartheta}{2}), \varphi, \psi, \vartheta$ - кути курсу, крену і тангажу.

У випадку кутів Крилова кватерніони елементарних поворотів в формулі (4) мають вигляд:

$$\Lambda_1 = (\cos \frac{\varphi}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\varphi}{2}), \Lambda_2 = (\cos \frac{\psi}{2} + \vec{i}_1 \sin \frac{\psi}{2}),$$

$\Lambda_3 = (\cos \frac{\vartheta}{2} + \vec{i}_3 \sin \frac{\vartheta}{2}),$ де кути φ, ψ, ϑ - відповідно кути прецесії, нутації і власного обертання.

У випадку послідовності кутів Крилова маємо наступні кінематичні рівняння, розв'язані відносно проєкцій вектора кутової швидкості:

$$\omega_1(t) = \dot{\vartheta} - \dot{\varphi} \cdot \sin \psi;$$

$$\omega_2(t) = \dot{\varphi} \cdot \cos \psi \cdot \sin \vartheta + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta;$$

$$\omega_3(t) = \dot{\varphi} \cdot \cos \psi \cdot \cos \vartheta - \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta, \quad (5)$$

де $\varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t), \vartheta = \vartheta(t), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t), \dot{\psi} = \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t).$

Відповідне перетворення для кватерніона орієнтації через кути Крилова в загальному випадку має вигляд:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2};$$

$$\lambda_1 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2};$$

$$\lambda_2 = \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2};$$

$$\lambda_3 = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (6)$$

Очевидно, що початкове значення кватерніона (6) $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0).$

У загальному випадку кутів Ейлера $\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t)$ кінематичні рівняння мають вигляд:

$$\omega_1(t) = \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi;$$

$$\omega_2(t) = -\dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi;$$

$$\omega_3(t) = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta, \quad (7)$$

де $\varphi = \varphi(t), \psi = \psi(t), \vartheta = \vartheta(t), \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t), \dot{\psi} = \dot{\psi}(t), \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}(t).$

Кватерніон орієнтації в цьому випадку можна обчислити за формулами:

$$\lambda_0 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos(\frac{\psi+\varphi}{2}); \lambda_1 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos(\frac{\psi-\varphi}{2});$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right); \quad \lambda_3 = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \sin \left(\frac{\psi + \varphi}{2} \right); \quad (8)$$

Для представлення (8) початковий кватерніон $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$. Якщо задати належним чином закон змінення кутів за часом $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, то моделі обертання (5), (6) і (7), (8) можна інтерпретувати як аналітичні розв'язки сукупності кватерніонного кінематичного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0.5\Lambda(t) \circ \vec{\omega}(t)$$

і динамічного рівняння Ейлера

$$J \cdot \vec{\omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times J \times \vec{\omega}(t) = \vec{M},$$

де J - тензор інерції, \vec{M} - вектор моменту зовнішніх сил. Аналіз показав, що це має місце тільки тоді, коли закон змінення кутів є лінійним за часом

$$\varphi = k_1 t, \psi = k_2 t, \vartheta = k_3 t. \quad (9)$$

В цьому випадку розв'язки системи динамічних і кінематичних рівнянь і результат інтегрування (3) можуть бути представлені через елементарні функції, а відповідні моделі обертання можна вважати *еталонними* для відпрацювання алгоритмів визначення параметрів орієнтації.

Для кутів Крилова в умовах їх лінійності (9) маємо наступні залежності для проєкцій вектора кутової швидкості на зв'язані осі:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 - k_1 \cdot \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3 t) + k_2 \cdot \cos(k_3 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3 t) - k_2 \cdot \sin(k_3 t), \end{aligned} \quad (10)$$

Окремо розглянемо випадок, коли початковий кут тангажу $\vartheta = k_3$ не змінюється з часом. Тоді з (10) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= -k_1 \cdot \sin(k_2 t); \\ \omega_2(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \sin(k_3) + k_2 \cdot \cos(k_3); \\ \omega_3(t) &= k_1 \cdot \cos(k_2 t) \cdot \cos(k_3) - k_2 \cdot \sin(k_3). \end{aligned} \quad (11)$$

Зазначимо, що для цього випадку кутового руху твердого тіла $\|\vec{\omega}(t)\|^2 = k_1^2 + k_2^2 = const$, але умови вільного обертання не виконуються, оскільки кінетична енергія $T = \frac{1}{2} I_1 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2 \neq const$ і для кінетичного моменту \vec{L} маємо:

$$L^2 = I_1^2 \cdot \omega_1^2 + I_2^2 \cdot \omega_2^2 + I_3^2 \cdot \omega_3^2 \neq const.$$

Початкові умови кутового руху з постійним кутом тангажу: $\Lambda(0) = (\cos(0.5 \cdot k_3), \sin(0.5 \cdot k_3), 0, 0)$, $\vec{\omega}(0) = (0, k_1 \cdot \sin(k_3) + k_2 \cdot \cos(k_3), k_1 \cdot \cos(k_3) - k_2 \cdot \sin(k_3))$.

Проекції вектора кутової швидкості на зв'язані осі у випадку моделювання кутового руху на основі лінійних кутів Ейлера в умовах (9) мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_3 \cdot \cos(k_1 t) + k_2 \cdot \sin(k_3 t) \cdot \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= -k_3 \cdot \sin(k_1 t) + k_2 \cdot \sin(k_3 t) \cdot \cos(k_1 t); \end{aligned}$$

$$\omega_3(t) = k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3 t).$$

(12)

Моделі обертання (6), (10) і (7), (12) в умовах, коли кути елементарних поворотів змінюються за лінійним законом (9), можна інтерпретувати як *трьохчастотні* моделі кутового руху.

Коли кут нутації є постійним, а кути прецесії і власного обертання є лінійними, маємо відомий випадок кінцевого руху твердого тіла, для якого з (12) маємо:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k_2 \cdot \sin(k_3) \cdot \sin(k_1 t); \\ \omega_2(t) &= k_2 \cdot \sin(k_3) \cdot \cos(k_1 t); \\ \omega_3(t) &= k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Кінематична модель кінцевого руху має вигляд:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{k_3}{2} \cdot \cos \left(\frac{k_2 + k_1}{2} \cdot t \right); \quad \lambda_1 = \sin \frac{k_3}{2} \cdot \cos \left(\frac{k_2 - k_3}{2} \cdot t \right); \\ \lambda_2 &= \sin \frac{k_3}{2} \cdot \sin \left(\frac{k_2 - k_3}{2} \cdot t \right); \\ \lambda_3 &= \cos \frac{k_3}{2} \cdot \sin \left(\frac{k_2 + k_3}{2} \cdot t \right); \end{aligned} \quad (14)$$

Початкові умови для кінцевого руху (13), (14):

$$\Lambda(0) = (\cos(0.5 \cdot k_3), \sin(0.5 \cdot k_3), 0, 0),$$

$$\vec{\omega}(0) = (0, k_2 \cdot \sin(k_3), k_1 + k_2 \cdot \cos(k_3)).$$

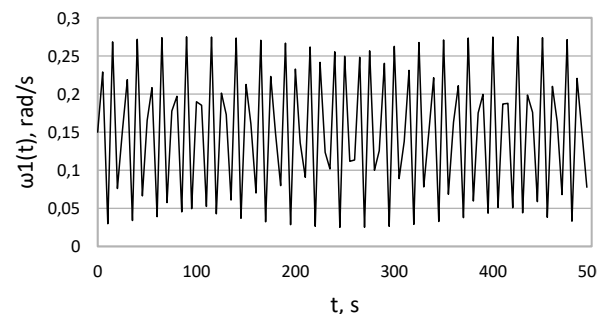
Для кінцевого руху маємо:

$$\|\vec{\omega}(t)\|^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 \cdot k_2 \cdot \cos(k_3) = const.$$

Якщо при цьому $\vec{M} = \vec{0}$ і два моменти інерції твердого тіла однакові ($I_1 = I_2$), то такий випадок кутового руху є вільною регулярною прецесією.

Очевидно, що модель кінцевого руху (13), (14) є *двочастотною* моделлю. Представлена модель кінцевого руху отримала широке застосування в аналізі і оптимізації алгоритмів орієнтації.

Програмно-чисельне моделювання кутового руху твердого тіла на основі послідовності кутів Крилова і Ейлера. *Еталонні моделі в кутах Крилова.* Проведена програмно-чисельна реалізація представленої узагальненої моделі обертального руху (6), (10) з тактом $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$, $k_3 = 0.35$. На рис. 1 наведені графіки проєкцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі в залежності від часу.



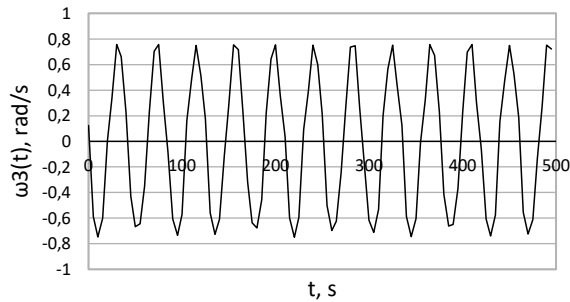
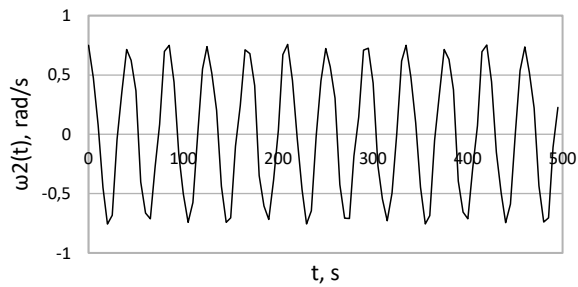


Рисунок 1 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Крилова (загальний випадок) на зв'язані осі

Проведена також програмно-чисельна реалізація двохчастотної моделі обертального руху (6), (11) з тактом $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$ в умовах постійного кута тангажу $\vartheta = 0.35$ рад. Отримані при цьому графіки залежностей від часу проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі представлені на рис.2.

Еталонні моделі в кутах Ейлера. Програмно-чисельне моделювання обертального руху (7), (11) проведено з тактом обчислень $\Delta t = 0.1$ с на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$, $k_3 = 0.35$. На рис. 3 представлені графіки проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі в залежності від часу.

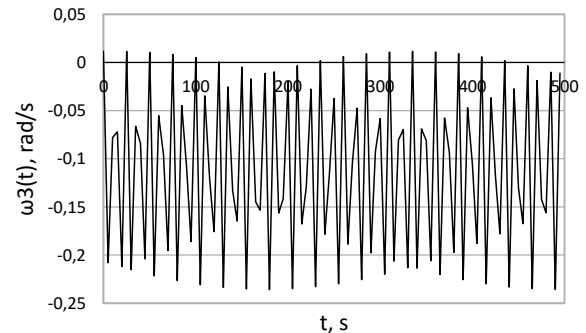
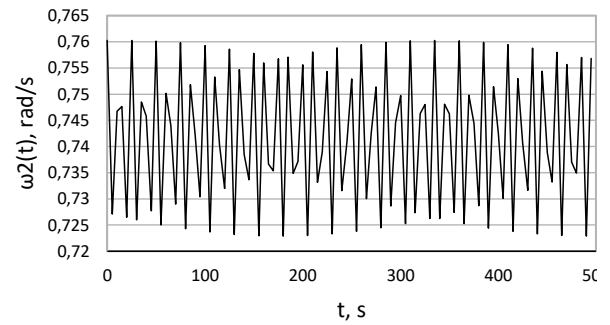
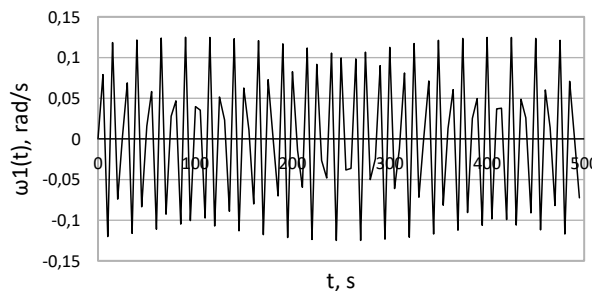
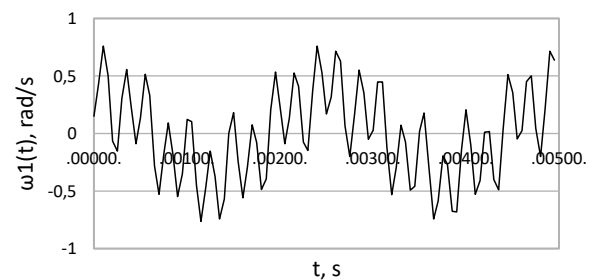


Рисунок 2 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Крилова (кут тангажу не змінюється з часом) на зв'язані осі

Чисельно-аналітичне моделювання кінцевого руху (7), (12) проведено на інтервалі часу $t \in [0; 500]$ с для значень частот $k_1 = 0.25$, $k_2 = 1.55$ в умовах постійного кута нутації $\vartheta = 0.35$ рад. Графіки залежностей від часу проекцій вектора модельної кутової швидкості на зв'язані осі представлені на рис.4.



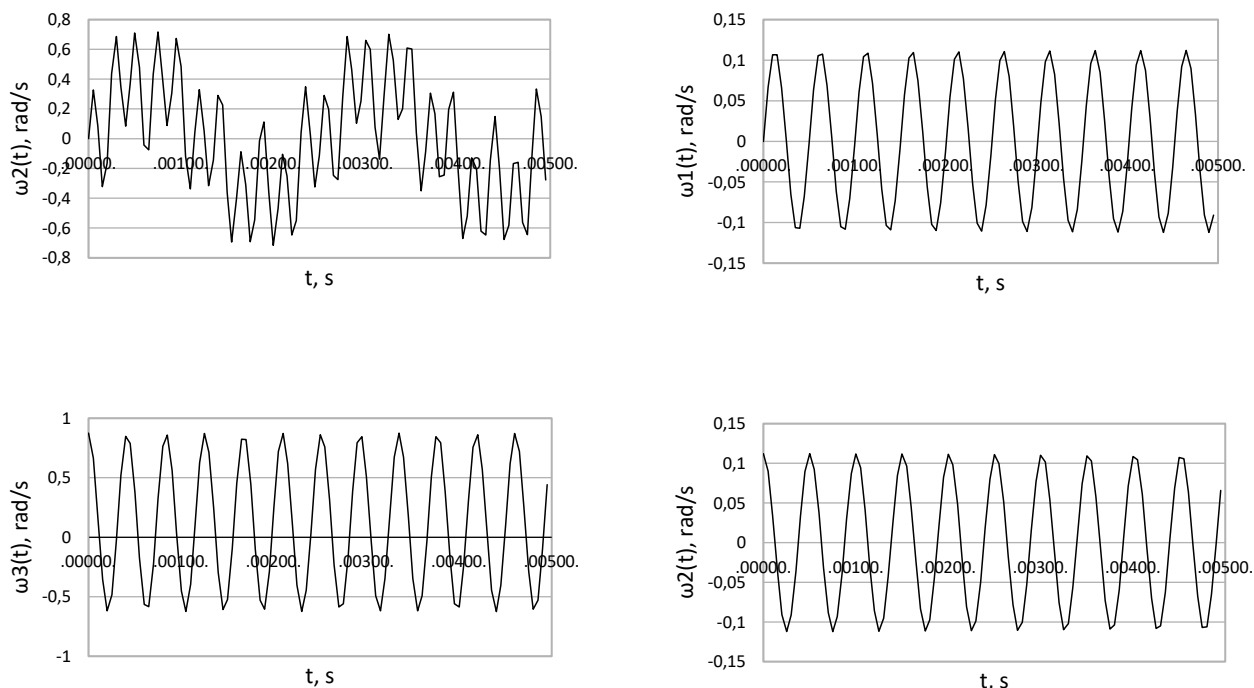


Рисунок 3 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі в кутах Ейлера (загальний випадок) на зв'язані осі

Точносний аналіз алгоритму Міллера на еталонних моделях. Щоб визначити кватерніон повороту $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_n^*, \Delta\lambda_n^*, \Delta\lambda_n^*)$ на такі обчислень $[t_{n-1}, t_n]$ на основі приросту вектора орієнтації за алгоритмом Міллера (2), можна використати дві схеми. За першою схемою, яка має четвертий порядок, маємо:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_n^* &= 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4, \\ \Delta\lambda_i^* &= (1/2)\theta_{ni}(1 - \theta_n^2/24), \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\theta_n^2 = \theta_{n1}^2 + \theta_{n2}^2 + \theta_{n3}^2$.

Друга схема має п'ятий порядок за рахунок збільшення кількості членів розкладання для векторної частини кватерніона повороту:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_n^* &= 1 - (1/8)\theta_n^2 + (1/384)\theta_n^4, \\ \Delta\lambda_i^* &= (1/2)\theta_{ni}(1 - \theta_n^2/24 + \theta_n^4/1920), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Поточний кватерніон орієнтації при цьому може бути обчислений на основі застосування формули додавання кватерніонів.

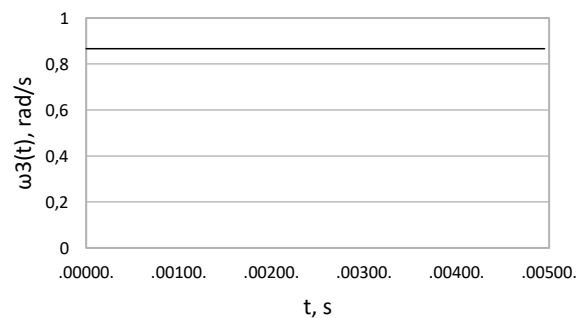


Рисунок 4 – Проекції вектора кутової швидкості для еталонної моделі кінчного руху на зв'язані осі

Для оцінювання точності алгоритма орієнтації була застосована неусувна оцінка накопиченого обчислювального дрейфу в інтерпретації [8]. Експериментально показано, що для всіх наведених моделей оцінки накопиченого обчислювального дрейфу алгоритму обчислення кватерніона мають зростаючий характер. В таблиці 1 наведені отримані фінальні оцінки накопиченого дрейфу для низки моделей кутового руху, що розглядалися. Отримано, що алгоритм визначення кватерніонів на основі розкладень *п'ятого порядку* забезпечує кращу точність визначення кватерніонів за оцінкою накопиченого обчислювального дрейфу у зрівнянні з формулою *четвертого порядку* для всіх представлених моделей.

Таблиця 1. - Значення похибки накопиченого дрейфу від часу

Еталонна модель обертання	Похибка накопиченого дрейфу, рад	
	формули 4-го порядку	формули 5-го порядку
Кути Крилова (загальний випадок лінійних кутів)	6.528E-06	5.278E-06
Кути Крилова (кут тангажу не змінюється з часом)	6.062E-06	4.986E-06
Кути Ейлера (загальний випадок лінійних кутів)	5.944E-06	1.657E-06
Кути Ейлера (кут нутації не змінюється з часом)	1.310E-05	1.618E-08

Висновки. Представлені дві концепції побудовання аналітичних тестових рухів твердого тіла для опрацювання алгоритмів орієнтації. Перша концепція основана на представленні кватерніона орієнтації в послідовності трьох ейлерових кутів і має наочну інтерпретацію. Друга концепція базується на формалізованому представленні кватерніона у вигляді суперпозиції тригонометричних функцій лінійних аргументів і не має чіткої наочної інтерпретації через кути елементарних поворотів. При цьому для отримання аналітичних формул для модельної кутової швидкості застосовується обернене кватерніонне кінематичне рівняння.

Розроблена розрахункова програма мовою C++, яка дозволяє отримувати з заданим тактом еталонну кінематичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритма орієнтації і отримувати оцінку накопиченого дрейфу. Проведено оцінювання двох схем обчислення кватерніонів на основі використання алгоритма Міллера на тестових рухах і показано, що схема з використанням формул п'ятого порядку має більшу точність обчислення кватерніону у зрівнянні з формулою четвертого порядку.

В подальшому концепція побудовання еталонних моделей кутового руху може бути розповсюджена на випадок поворотів навколо некоординатних осей.

Список літератури

1. *Savage P.G.* Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.
2. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.7, No.1, 1971, PP.61-66.
3. *Musoff H., Murphy J.H.* Study of Strapdown Navigation Attitude Algorithms, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 2, 287-290 (1995).
4. *Miller R.B.* A new strapdown attitude algorithm. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287-291.
5. *Плаксій Ю.А.* Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП». – 2013. – №58 (1031). – С.168-177.
6. *Панов А.П.* Математические основы теории инерциальной навигации. – К.: Наук. думка, 1995. – 280 с.
7. *Huang I., Liu J., Zeng Q., Xiong Z.* A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm // International Journal of Innovative Computing, Information and Control, Vol. 9, No 8, 2013, PP. 3449-3462.

8. *Плаксій Ю.А. Гомозкова І.О.* Аналіз точності алгоритма орієнтації Р. Міллера на чотирьохчастотній еталонній моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХП». – Х.: НТУ «ХП». – 2019. – №22 (1347). – С.81-88.

9. *Ignagni M.B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms. // Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.13, No 2, 1990. P.363-369.

10. *Mark J.G., Tazartes D.A.*, Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics, Journal of Guidance, Control, and Dynamics 4, 641-647 (2001).

11. *Панов А.П.* Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Космич. исслед. на Украине.– К.: Наук. думка, 1974.– Вып. 5.– С.76-82.

12. *Панов А.П.* Асимптотические оценки погрешностей методов вычисления параметров ориентации твердого тела // Кибернетика и вычисл. техника. – 1980. – Вып. 47. – С. 59-71.

13. *Savage P.G.* Strapdown Analytics, Strapdown Associates, Inc., Maple Plain, MN, 2000.

14. *Панов А.П.* Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Мех. гироск. систем. – К., 1984.– Вып. 3.– С. 105-112.

15. *Панов А.П.* Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1987.– Вып. 73.– С. 3-9.

16. *Панов А.П.* Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // Кибернет. и вычисл. техн. – К., 1988.– Вып. 77.– С.47-52.

17. *Плаксій Ю.А.* Узгальнення трьохчастотної тригонометричної кватерніонної моделі обертання твердого тіла. Другий тип моделі / Ю.А.Плаксій / Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, №6(1178), 2016. С.96-104.

18. *Плаксій Ю.А.* Нові аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла: двочастотні мультиплікативні параметричні кватерніонні моделі / Ю.А.Плаксій / Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, №16(1188), 2017. С.117-122.

19. *Плаксій Ю.А.* Нові двочастотні еталонні моделі обертання твердого тіла для точного аналізу алгоритмів орієнтації БНС/ Ю.А.Плаксій, І.О.Гомозкова / Вісник НТУ «ХП». Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків, №27(1303), 2018. С.93-99.

20. *Plaksiy Yu. A.* Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation // The 7-th world Congress "AVIATION IN THE XXI CENTURY" Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.

21. *Plaksiy Yu.A.* New reference model of rotation for orientation algorithms analysis/ Yu.A.Plaksiy, I.A.Homozkova // Proceedings The 9-th world Congress "AVIATION IN THE XXI-st CENTURY" Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2020, Kyiv.-8 p. <http://congress.nau.edu.ua/>

22. *Kuznetsov, Yu.A., Plaksiy, Yu.A.* Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation // 21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings.– 2014. -P. 357-360.

23. *Plaksiy Yu.* Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems/ D.Breslavsky, I.Homozkova, K.Naumenko/ Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2021, 33(4). С. 1141-1160.

24. *Кузнецов Ю.А., Деменков В.А.* Оценка точности алгоритмов определения ориентации с учетом погрешности измерителей угловой скорости // Автоматика/Automatics - 2011, 28-30 вересня 2011 року, Львів, Україна. С.261-262.

25. *Goldstein, H.* "The Euler Angles" and "Euler Angles in Alternate Conventions. §4-4 and Appendix B in Classical Mechanics, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 143-148 and 606-610, 1980.

References (transliterated)

1. *Savage P.G.* Strapdown System Performance Analysis. – RTQ-LS-232 (2004) Pre-Prints.
2. *Bortz J. E.* A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol.7, No.1, 1971, PP.61-66.

3. *Musoff H., Murphy J.H.* Study of Strapdown Navigation Attitude Algorithms, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 2, 287-290 (1995).
4. *Miller R.B.* A new strapdown attitude algorithm. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287–291.
5. *Plaksiy Yu.A.* Stepenevi alhorytmy vyznachennia kvaternioniv oriantatsii ta yikh interpoliatsiini modyfikatsii [Degree algorithms for determining quaternions olaksyf orientation and their interpolation modifications]. // *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn [Bulletin of the NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines], – Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2013, no 58 (1031), pp.168–177.
6. *Panov A.P.* Matematicheskie osnovy teorii inertsiyalnoy navigatsii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation] – K.: Nauk. dumka, 1995. – 280 s.
7. *Huang L., Liu J., Zeng Q., Xiong Z.* A New Second-Order Strapdown Attitude Algorithm//*International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 9, No 8, 2013, PP. 3449-3462.
8. *Plaksiy Yu.A. Homozkova I.O.* Analiz tochnosti alhorytma oriantatsii R. Millera na chotyrokchastotnii etalonnii modeli obertannia tverdogo tela [Analysis of the accuracy of R. Miller's orientation algorithm on the four-frequency reference model of rotation of a rigid body]//*Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of NTU "KhPI". - Kh.: NTU "KhPI"]. – Kharkiv: NTU «KhPI». – 2019.– №22 (1347).– S.81–88.
9. *Ignagni M.B.* Optimal strapdown attitude integration algorithms. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.13, No 2, 1990. P.363–369.
10. *Mark J.G., Tzartas D.A.*, Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 4, 641-647 (2001).
11. *Panov A.P.* Dvushagovyie algoritmyi vyichisleniy parametrov oriantatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]// *Kosmich. issled. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no 5, pp.76–82.
12. *Panov A.P.* Asimptoticheskie otsenki pogreshnostey metodov vyichisleniya parametrov oriantatsii tverdogo tela [Asymptotic error estimates for methods for calculating the orientation parameters of a rigid body]// *Kibernetika i vyichisl. Tehnika* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1980, vol. 47, pp. 59-71.
13. *Savage P.G.* Strapdown Analytics, Strapdown Associates, Inc., Maple Plain, MN, 2000.
14. *Panov A.P.* Optimizatsiya metodov vyichisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyah tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions with conic vibrations of a rigid body]// *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
15. *Panov A.P.* Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vyichisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vyichislitel'naya tekhnika*. K. 1987. Vyp. 73, pp. 3-9.
16. *Panov A.P.* Adaptivnyie pretsessionnyie algoritmyi vyichisleniy kvaternionov vrascheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]// *Kibernet. i vyichisl. tehn* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, PP. 47–52.
17. *Plaksiy Yu.A.* Uzahalnennia trokchastotnoi tryhonometrychnoi kvaternionnoi modeli obertannia tverdogo tela. Druhyi typ modeli [Generalization of the three-frequency trigonometric quaternion model of solid body rotation. The second type of model] // *Visnyk NTU «KhPI» Matematychno modeliuвання v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh* [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №6(1178), 2016. PP.96-104.
18. *Plaksiy Yu.A.* Novi analitychni rozviazky rivnian obertannia tverdogo tela: dvochastotni multiplykatyvnii parametrychni kvaternionni modeli [New analytical solutions of the equations of rotation of a rigid body: two-frequency multiplicative parametric quaternion models]//*Visnyk NTU «KhPI»*. Matematychno modeliuвання v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №16(1188), 2017. PP.117-122.
19. *Plaksiy Yu.A.* Novi dvochastotni etalonnii modeli obertannia tverdogo tela dlia tochnosnoho analizu alhorytmiv oriantatsii BINS/ Yu.A.Plaksiy, I.O.Homozkova /*Visnyk NTU «KhPI»*. Matematychno modeliuвання v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh [Bulletin of NTU "Khpi" Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, №27(1303), 2018. PP.93-99.
20. *Plaksiy Yu. A.* Multiplicative three-frequency models of a rigid body rotation in error analysis for algorithms of determination of orientation //The 7-th world Congress “AVIATION IN THE XXI CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies, September 19-21, 2016, Kyiv – Proceedings –2016.
21. *Plaksiy Yu.A.* New reference model of rotation for orientation algorithms analysis/ Yu.A.Plaksiy, I.A.Homozkova// *Proceedings The 9-th world Congress “AVIATION IN THE XXI-st CENTURY” Safety in Aviation And Space Technologies*, September 19-21, 2020, Kyiv.-8 p. <http://congress.nau.edu.ua/>
22. *Kuznetsov, Yu.A., Plaksiy, Yu.A.* Algorithms for strapdown inertial orientation systems of moving objects: Practical aspects of the development, error analysis and implementation //21st Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2014 - Proceedings.– 2014. -P. 357-360.
23. *Plaksiy Yu., Breslavsky D., Homozkova I., Naumenko K.* Closed-form quaternion representations for rigid body rotation: Application to error assessment in orientation algorithms of strapdown inertial navigation systems //*Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2021, 33(4). C. 1141–1160.
24. *Kuznetsov Yu.A., Demenkov V.A.* Otsenka tochnosti alhorytmov opredeleniya oryentatsyy s uchetoм pohreshnosty yzmyrtelei uhlovoi skorosty [Estimation of the accuracy of orientation determination algorithms taking into account the error of angular velocity meters // *Automatics/Automatics*, 2011, 28-30 September 2011 Lviv, Ukraine. PP.261-262.
25. *Goldstein, H.* The Euler Angles" and "Euler Angles in Alternate Conventions. §4-4 and Appendix B in *Classical Mechanics*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 143-148 and 606-610, 1980.

Надійшла (received) 17.12.2023

Відомості про авторів / About the Authors

Плаксій Юрій Андрійович (Plaksiy Yuriy) – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ “ХПІ”, Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

Кузнєцов Юрій Олексійович (Kuznyetsov Yuriy) – кандидат технічних наук, доцент, начальник лабораторії НВП ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, Науково-виробниче підприємство ХАРТРОН-АРКОС ЛТД, м. Харків; тел.: (050) 231-55-37; e-mail: kuznyetsov@gmail.com.