

*Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, П. І. ПАЛАМАРЧУК*

### КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЗУЧОСТІ ЦИЛІНДРА ПРИ ЙОГО КОНТАКТІ ЗІ СТРИЖНЯМИ НАПІВЦИЛІНДРИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Статтю присвячено опису постановки задачі, підходу до моделювання та отриманим результатам з повзучості товстої труби при її контакті зі стрижнями напівциліндричного перерізу, які розташовані симетрично її центру. Представлено огляд наукових публікацій, виконаних у напрямку моделювання контакту при повзучості, в тому числі з використанням МСЕ. Постановку задачі викладено з урахуванням скінченних деформацій та переміщень. Описано умови контакту, представлено варіаційний функціонал, який використовується для скінченноелементного формулювання задачі. Завдяки наявній симетрії геометричних параметрів та крайових умов задачу розв'язано з використанням постановки плоскої деформації. Область дискретизації в МСЕ є четверта частина перерізу труби, що контактує з перерізом стрижня у вигляді половини кола. Представлено результати верифікаційних досліджень, виконаних з метою оцінювання достовірності розв'язання задачі повзучості циліндру, навантаженого внутрішнім тиском. Обговорюються різні моделі для опису контактної взаємодії, що є можливим використовувати у програмному комплексі ANSYS. Показано переваги використання Normal Lagrange Method. Проаналізовано деформування при повзучості труби з її контактом зі стрижнем протягом 10000 годин. Наведено отримані шляхом комп'ютерного моделювання розподіли компонентів напружено-деформованого стану за перерізами контактуючих елементів та графік перерозподілу інтенсивності напружень у місці контакту. Обговорюються отримані за допомогою розрахунків характеристики деформованого стану поверхні циліндричної труби, який виникає завдяки впливу контактуючого стрижня. Проведено апроксимацію та представлено аналітичні вирази залежності інтенсивності напружень та довжини лінії контакту від часу. Отримані результати розв'язання задачі повзучості свідчать, що протягом приблизно 1.25 року завдяки контакту труби зі стрижнями на її поверхні утворюються дефекти типу вм'ятин.

**Ключові слова:** комп'ютерне моделювання, повзучість, контакт, циліндр, стрижень, напружено-деформований стан, МСЕ.

The paper is devoted to the description of the problem statement, the modeling approach, and the obtained results on the creep of a thick tube when it is in contact with rods of semi-cylindrical cross-section, which are located symmetrically to its center. An overview of research papers made in the direction of creep contact modeling, including the FEM use, is presented. The formulation of the problem is presented taking into account finite strains and displacements. The contact conditions are described, the variational functional used for the finite element formulation of the problem is presented. Due to the existing symmetry of the geometric parameters and boundary conditions of the problem, it was solved using the plane strain statement. The area of FEM discretization is the fourth part of the tube cross-section, which is in contact with the cross-section of the rod in the form of a half circle. The results of verification studies performed to assess the reliability of solving the creep problem for the cylinder loaded with internal pressure are presented. Different models are discussed for describing the contact interaction, which can be used in the ANSYS software. The advantages of using the Normal Lagrange Method are shown. The tube contact deformation during creep for 10,000 hours was analyzed. The distributions of the components of the stress-strain state obtained by computer modeling along the sections of the contacting elements and the plot of the redistribution of von Mises equivalent stress at the point of contact are presented. The characteristics obtained by calculations of the deformed state of the surface of the cylindrical tube, which arises due to the influence of the contacting rod, are discussed. An approximation was made and analytical expressions of the dependence of the von Mises stress and the length of the contact line on time were presented. The obtained results of solving the creep problem indicate that within approximately 1.25 years due to the contact of the tube with the rods, dent-type defects are formed on its surface.

**Key words:** computer simulation, creep, contact, cylinder, bar, stress-strain state, FEM.

**Вступ.** Контактні задачі, тобто задачі деформівної взаємодії твердих деформівних тіл, є поширеними у механіці. Вони виникають при аналізі технологічних процесів формування конструктивних елементів, зношування деталей тощо. Математичні формулювання задач та теоретичні основи методів їхнього розв'язання є достатньо добре розробленими [1-4]. Але у більшості випадків в них мова йде про пружно-пластичне деформування.

Високотемпературне деформування елементів конструкцій призводить до виникнення незворотних деформацій повзучості [5]. Часто такі елементи працюють в умовах з наявністю зовнішніх обмежень та перешкод, взаємодія з якими з точки зору механіки деформівного твердого тіла описується теорією контактних задач [6, 7].

На теперішній час задачі контактної взаємодії розв'язуються як в аналітичній, замкненій формі, так й з використанням наближених методів, варіаційних нерівностей, чисельного методу скінченних елементів (МСЕ). Порівнювальний аналіз алгоритмів розв'язання контактних задач механіки твердого деформівного тіла виконано авторами огляду [8]. В роботі [9] описано методику розв'язання контактних задач, в яких дія зовнішніх сил залежить від

деформації тіла. Наведено приклади чисельного аналізу задач про дію важких штампів на неоднорідну основу.

Завдяки практичним потребам існує певна зацікавленість задачами високотемпературної контактної взаємодії, в тому числі й з урахуванням повзучості матеріалу металевих елементів конструкцій.

Авторами роботи [10] запропоновано аналітичну постановку задачі оцінювання розвитку контактного тиску в з'єднаннях з натягом, що працюють у високотемпературному режимі. Відзначається, що незважаючи на дослідження, виконані у даному напрямі, зниження контактного тиску внаслідок релаксації повзучості зазвичай не розглядається. Запропонований аналітичний розв'язок корелює з отриманим чисельно значенням контактного тиску з урахуванням властивостей повзучості матеріалу. Проведено порівняння отриманих результатів з даними скінченноелементного аналізу, отримані результати корелюються для випадків плоскої деформації та осесиметричного напруженого стану.

Результати аналізу напружено-деформованого стану у термоусадочному з'єднанні втулка-вал для різних форм посадки, виконаного за допомогою МСЕ,

наводяться у [11]. Проведено аналіз геометричних параметрів з'єднання, аналізується можливість виникнення незворотних деформацій.

Ф. Аламсом зі співавторами [12] відзначається, що нагальною проблемою надпластичного формування є можливість кількісного моделювання для ефективного проектування інструменту та оцінки життєздатності процесу. Вони відзначають, що моделювання з використанням МСЕ зазвичай не включає еволюційну природу тертя в умовах повзучості, наявність якої може призводити до зростання області з'єднання. Тобто моделі тертя, які ігнорують деформації повзучості, будуть неповними. Авторами запропоновано нову модель мікроконтакту поверхонь для передбачення сплюснення нерівностей під час повзучості.

В роботі [13] аналізується процес вдавлювання твердих тіл при повзучості. Методика розв'язання призводить до плоскої задачі. Додаткова задача для неї, в якій визначаються необхідні параметри, розв'язується у тривимірній постановці. Наведено отримані результати щодо розташування та форми контактної області.

Одним з важливих практичних застосувань аналізу контакту при повзучості є моделювання взаємодії поверхонь трубчатих елементів з поверхнями внутрішньокорпусних пристроїв ядерних реакторів, в тому числі й у місцях їхньої фіксації [14, 15]. Авторами [14] відзначається, що на АЕС типу CANDU-6 при високих температурі та тиску напірна трубка паливного каналу може роздуватися, при цьому виникає контакт з іншим трубчатим елементом. У роботі представлено комп'ютерну програму, яка моделює перехідну термомеханічну поведінку паливного каналу до та після контакту. Враховується повзучість сплаву, передача тепла, критерії руйнування каналу. Представлено результати моделювання напружено-деформованого стану, розраховані при різних швидкостях підвищення температури. В роботі [15] розроблено модель термічної повзучості для прогнозування напружено-деформованого стану у каналі внутрішньокорпусного пристрою реактору. Проведені експериментальні дослідження показали, що час контакту, передбачений моделлю, задовільно збігається з отриманими даними.

В даній роботі досліджується повзучість при контакті поверхні товстостінного циліндру, який може розглядатись як модель оболонки твєлу ядерного реактору, з елементом його фіксації.

**Постановка задачі та метод розв'язання.** В цій статті розглядатиметься задача повзучості довгої товстої циліндричної труби, на чотирьох радіусах якої вздовж твірної розташовані однакові довгі практично жорсткі стрижні з перерізом напівциліндричної форми (рис. 1). Практична абсолютна жорсткість тут буде означати відсутність або мізерність повзучості матеріалу стрижня. У початковий момент часу ( $t = 0$ ) тіла стикаються в одній точці зовнішньої поверхні труби.



Рис. 1. Довга товста труба, обмежена напівсферичними стрижнями

Наведемо постановку задачі. Розглядаємо деформівне тіло  $V$ , на частині поверхні якого  $S_1$  задано переміщення, на іншій частині  $S_2$  – поверхневе навантаження  $p$ . Вважаємо об'ємні сили відсутні. Внаслідок того, що розглядаються довгі тіла та навантаження у напрямку за твірною труби є незмінним, скористаємось постановкою задачі за підходом плоскої деформації (рис. 2).

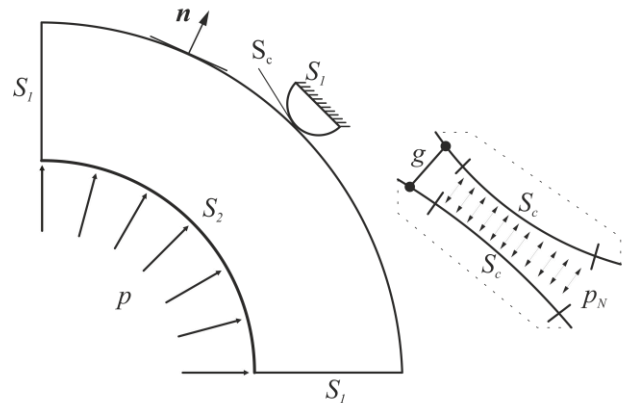


Рис. 2. Розрахункова схема задачі з урахуванням симетрії

Розглядаємо помірні деформації та переміщення. Вважаємо матеріали тіл ізотропними. Всі компоненти є функціями координат та часу  $t$ . Основна система рівнянь у циліндричній системі координат  $(r, \theta, z)$  матиме наступний вигляд [1, 6]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{r} = 0, \quad r, \theta \in V; \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta); \quad (1)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \alpha}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial \beta}{r \partial \theta} + \frac{\alpha}{r}; \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha}{r \partial \theta} + \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{\alpha}{r}; \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + c_{ij};$$

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} B(\sigma_v)^{n-1} S_{ij};$$

$$\sigma_r|_{S_2} = p; \quad u|_{S_1} = \bar{u}_i, \quad u(r, \theta, 0) = c(r, \theta, 0) = 0;$$

$$u_N - g \leq 0; \quad p_N|_{S_c} \leq 0; \quad (u_N - g)p_N = 0.$$

Тут  $n(n_r, n_\theta)$  – вектор нормалі до поверхні тіла  $V$  (труби),  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$  – радіальна, окружна та осьова нормальна компонента тензору напружень  $\sigma$  з компонентами  $\sigma_{ij}(i, j = r, \theta)$  та компонентами його дівіатору  $S_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненти тензору повних деформацій  $\varepsilon, e_{ij}$  – компоненти пружної складової деформації,  $c_{ij}$  – деформацій повзучості,  $u$  – вектор переміщень,  $u(a, \beta)$ .  $B$  та  $n$  – константи, що визначаються експериментально за точками другої ділянки кривої повзучості (використовується закон Нортону [16]),  $\sigma_V$  – інтенсивність напружень;  $S_C$  – частина поверхні, на якій має місце контакт між тілами,  $u_N$  – нормальний компонент вектору переміщень,  $p_N$  – контактний тиск між тілами,  $g$  – поточне значення зазору між тілами [1].

Як відомо, для розв'язання задачі, що описано системою (1), за допомогою використання МСЕ необхідно перейти до варіаційного формулювання задачі Сіньоріні [1]. Вважається, що функція віртуального переміщення  $v$  виконує умову  $v = 0$  на  $S_1$  та умови контакту  $v_N - g \leq 0, \forall v \in V$  з  $v_N = v \cdot n$ . Якщо  $u$  є розв'язком задачі Сіньоріні, тоді можливо використати слабку форму рівняння рівноваги з (1). Записуємо еквівалентну віртуальну потужність, що виникає за роботою напружень  $\sigma$  на віртуальних деформаціях  $\varepsilon \cdot (u - v)$ , зумовлених віртуальними переміщеннями  $u - v$ , а також віртуальну потужність, обумовлену дією зовнішнього поверхневого навантаження. Остаточо маємо [1, 17]:

$$\int_V \frac{\partial(\sigma \cdot \varepsilon(u-v))}{\partial t} dV \geq \int_{S_2} \frac{\partial(p \cdot (u-v))}{\partial t} dS \quad (2)$$

Далі використовуємо МСЕ у реалізації інженерного програмного забезпечення ANSYS [18]. Програмний код ANSYS для розв'язання такої задачі забезпечує сумісність контактної області (contact compatibility), тобто встановлюється взаємозв'язок між двома поверхнями, щоб запобігти їх проходження одну крізь іншу під час розрахункового аналізу.

ANSYS надає декілька формулювань для формулювання контактної задачі - *Pure Penalty, Augmented Lagrange, Normal Lagrange, MPC, Lagrange & Penalty*. Кожен метод має свої переваги та недоліки, що базуються на балансі між швидкістю збіжності розв'язання, точністю, залежністю від жорсткості контактних елементів та інших специфічних характеристик. У технічній документації [18] описано ідеї реалізації методів, їх порівняння за різними параметрами. У [19] наведено повний опис різних типів контакту (node-to-node, surface-to-surface, ...), розглянуто типові задачі, показано вплив різних параметрів на результат розв'язання.

**Оцінювання достовірності розрахункової схеми.** Спочатку, для верифікації розрахункових схем проведемо аналіз їхньої достовірності. Використаємо відомий класичний розв'язок задачі повзучості товстої труби, навантаженої внутрішнім тиском [16, 20] та порівняємо результати з отриманими чисельно.

Розглянемо довгу трубу з зовнішнім радіусом 1 м та внутрішнім 0.5 м. Матеріал труби – хромонікелевольфрамова сталь 45X14H14B2M [20]. Трубу рівномірно прогріто до температури 600°C. Матеріальні константи: модуль пружності  $E=1.57 \cdot 10^5$  МПа, коефіцієнт Пуассону  $\nu=0.3$ , константи до закону Нортону  $B=2 \cdot 10^{-10}$  МПа<sup>-3</sup>/год,  $n=3$ .

Внаслідок симетрії задачі розглядаємо одну четверту частину перерізу. Використовуємо восьмивузловий чотирикутний скінченний елемент PLANE183 з 2 степенями свободи у вузлі. Після досліджень збіжності результатів задач пружності [21] та повзучості труби [16, 21] до моделювання прийнято скінченноелементну модель з 5000 елементів (рис. 3).

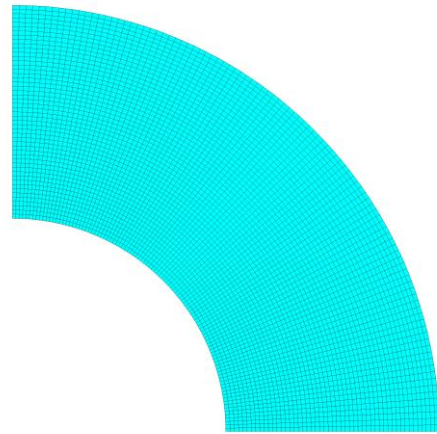


Рис. 3. Скінченноелементна схема перерізу труби

На рис. 4 наведено результати порівняння. Суцільними лініями надано результати аналітичних розв'язків задач Ляме (криві 2, 3) та усталеної повзучості труби (криві 1, 4). Точками надано результати чисельного розв'язку з використанням МСЕ. Розбіжності за радіальними напруженнями в задачі пружності (крива 3) не перевершують 0.024%, в задачі повзучості (крива 4) – 0.76%. За окружними напруженнями: в задачі пружності (крива 2) не перевершують 0.01%, в задачі повзучості (крива 1) – 0.31%. Отримані при моделюванні цілком задовільні результати дозволяють перейти до чисельного розв'язання задачі контакту труби зі стрижнем.

**Аналіз результатів чисельного моделювання в задачі контактної взаємодії при повзучості.** Розглянемо результати чисельного моделювання повзучості труби при її контакті зі стрижнем, який практично не має властивостей повзучості. Для матеріалу стрижня задамо наступні значення констант у законі Нортону:  $B=1 \cdot 10^{-200}$  МПа<sup>-1</sup>/год,  $n=1.1$ . Прийнемо радіус частини контактуючого півкола стрижня рівним 0.1 м.

Дослідження збіжності чисельних результатів привели до необхідності збільшення розмірності скінченноелементної моделі до 2 мільйонів елементів. Час розрахунку повзучості обрано 10 000 годин.

Слід зазначити, що одним із головних параметрів оцінки точності розв'язання контактної задачі є величина взаємопроникнення тіл. Ця величина має бути значно меншою, ніж локальні переміщення та параметри геометрії моделі. Після проведеного дослідження було обрано Normal Lagrange Method. Цей метод давав найменше значення контактної проникнення, тоді як менш ресурсозатратні методи (Augmented, Penalty) видавали значення, що не дуже сильно відрізнялись від локальних переміщень. До того ж, виконувався контроль збіжності розв'язків за часом. Порівняння результатів для різних моделей контактної взаємодії наведено в таблиці 1. Через дефіс показано значення для  $t = 0$  та  $t = 10\ 000$  год.

Результати розрахунків наведено на рис 5-8. Розподіл значень сумарних переміщень за перерізами при  $t=10000$  год наведено на рис. 5, на рис. 6 – розподіл інтенсивностей деформацій у місці контакту. На рис. 7 та 8 представлено залежності від часу значень інтенсивності напружень у місці першої точки контакту (рис. 7) та довжини лінії контакту (рис. 8). На цих рисунках точками позначено розрахункові дані, кривими – дані аналітичного розв'язку.

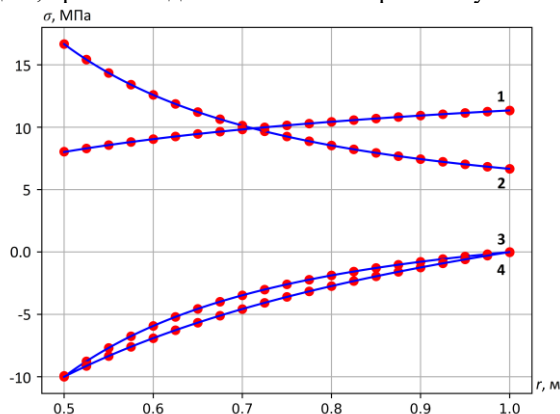


Рис. 4. Порівняння аналітичних та чисельних результатів. Перерозподіл напружень у товстій трубці при повзучості

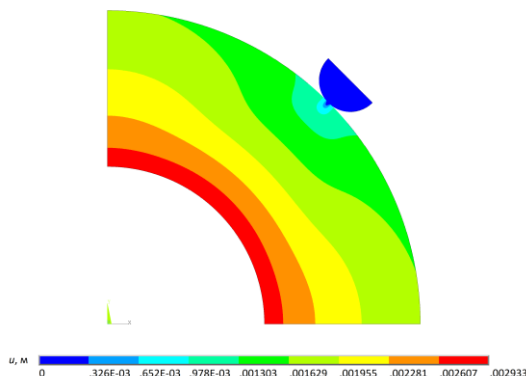


Рис. 5. Розподіл сумарних переміщень,  $t=10000$  год.

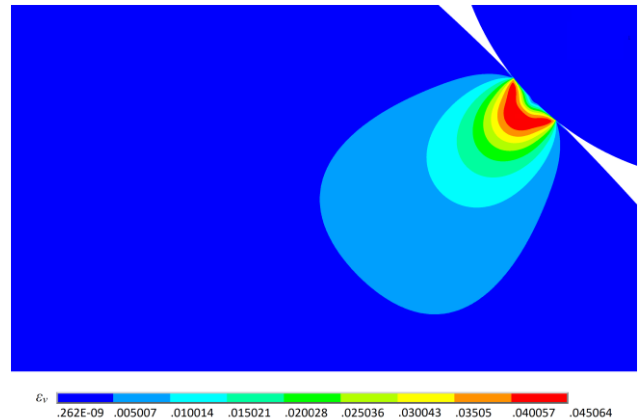


Рис.6. Розподіл інтенсивностей деформацій,  $t=10000$  год.

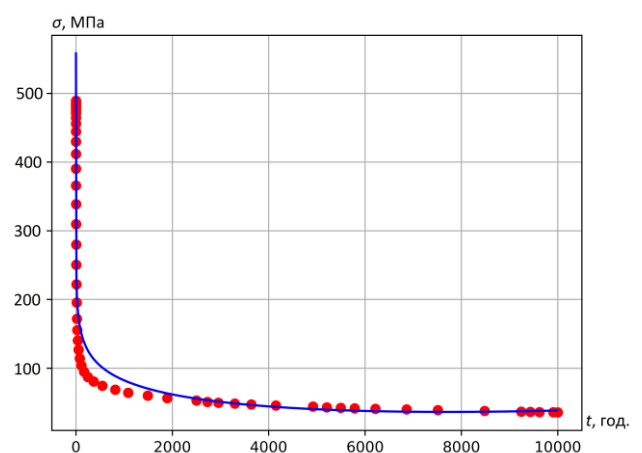


Рис. 7. Залежність значень інтенсивності напружень у місці першої точки контакту від часу

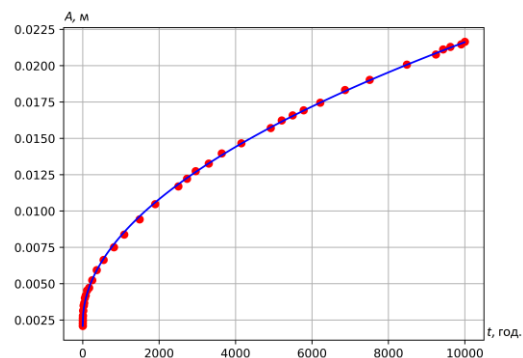


Рис. 8. Залежність довжини лінії контакту на перерізі від часу

Аналізуючи результати чисельного моделювання, доходимо висновку щодо досить значного вдавлювання стрижня на зовнішній поверхні труби. При місцевій деформації порядку 4.5%, глибина вм'ятини сягає 0.65 мм при її довжині 2.1 мм. Відмітимо також істотну релаксацію напружень у місці первісного контакту.

Для апроксимації кривих, представлених на рис. 7-8, було залучено нелінійний метод найменших

Таблиця 1 – Порівняння результатів в залежності від контактної моделі.

	Augmented	Penalty	Normal Lagrange	Lagrange & Penalty
Максимальне проникнення (max penetration)	$0.193 \cdot 10^{-6} - 0.469 \cdot 10^{-7}$	$0.193 \cdot 10^{-6} - 0.567 \cdot 10^{-7}$	$0.825 \cdot 10^{-16} - 0.325 \cdot 10^{-7}$	$0.667 \cdot 10^{-11} - 0.942 \cdot 10^{-7}$
Локальні переміщення, м (local sum displacement)	$0.153 \cdot 10^{-4} - 0.103 \cdot 10^{-4}$	$0.153 \cdot 10^{-4} - 0.103 \cdot 10^{-4}$	$0.152 \cdot 10^{-4} - 0.103 \cdot 10^{-4}$	$0.152 \cdot 10^{-4} - 0.103 \cdot 10^{-4}$
Локальна максимальна інтенсивність напружень, Па (local max Mises stress)	$0.272 \cdot 10^9 - 0.613 \cdot 10^8$	$0.272 \cdot 10^9 - 0.607 \cdot 10^8$	$0.275 \cdot 10^9 - 0.640 \cdot 10^8$	$0.275 \cdot 10^9 - 0.619 \cdot 10^8$
Локальна максимальна інтенсивність деформацій (local max total strain)	$0.001732 - 0.045171$	$0.001732 - 0.045097$	$0.001752 - 0.045064$	$0.001754 - 0.044788$
Локальна максимальна інтенсивність деформацій повзучості (local max creep strain)	$0.0 - 0.045025$	$0.0 - 0.044952$	$0.0 - 0.044919$	$0.0 - 0.04464$

квадратів (Non-linear least squares, NLLS). Цей чисельний метод оптимізації є розширенням традиційного методу найменших квадратів, який використовується для апроксимації лінійних моделей. Метою NLLS є знаходження такого набору параметрів нелінійної функції, який мінімізує суму квадратів різниць між передбаченими значеннями функції та спостережуваними точками даних. Передбачені значення отримуються шляхом обчислення значень нелінійної функції з використанням заданого набору параметрів.

Загальна формула задачі NLLS може бути записана наступним чином: дано набір точок  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  та нелінійну функцію  $f(x, \Psi)$ , де  $x$  - незалежна змінна, а  $\Psi$  - вектор параметрів, які потрібно оцінити. Метою є знаходження вектору параметрів  $\hat{\Psi}$ , який мінімізує суму квадратів відхилів  $\sum (y_i - f(x_i, \hat{\Psi}))^2 \rightarrow \min$ . У більшості випадків немає аналітичного розв'язку для оптимального вектору параметрів  $\hat{\Psi}$ . Тому для цієї задачі використовуються чисельні алгоритми оптимізації, які за ітераційною процедурою оновлюють оцінки параметрів до досягнення збіжності до мінімуму. Найбільш поширеним алгоритмом оптимізації для NLLS є алгоритм Левенберга-Марквардта [22], що поєднує переваги алгоритму Гаусса-Ньютона та методу градієнтного спуску.

Отримано наступні апроксимації: залежність значень інтенсивності напружень у місці першої точки контакту від часу  $\sigma_v = a_1 + b_1 \cdot \ln(c_1 \cdot t) + d_1 \cdot t^{e_1}$ , де  $a_1 = 6.961 \cdot 10^8$  Па,  $b_1 = -3.157 \cdot 10^7$  Па,  $c_1 = 78.485$  1/с,  $d_1 = 1.13 \cdot 10^{-5}$  Па/с<sup>1.643</sup>,  $e_1 = 1.643$ ; залежність довжини лінії контакту на перерізі від часу  $A = a_2 + b_2 \cdot \ln(c_2 \cdot t) + d_2 \cdot t^{e_2}$ , де  $a_2 = 1.868 \cdot 10^{-3}$  м,  $b_2 = 2.493 \cdot 10^{-5}$  м,  $c_2 = 8.327 \cdot 10^3$  1/с,  $d_2 = 2.44 \cdot 10^{-6}$  м/с<sup>0.515</sup>,  $e_2 = 0.515$ . Таке аналітичне представлення

залежностей може бути необхідним для аналізу стану поверхонь труб, аналізу зношування поверхонь тощо.

**Висновки.** В даній статті розглянуто постановку задачі та підхід до моделювання повзучості товстої труби при її контакті зі стрижнями напівциліндричного перерізу. До моделювання залучено метод скінченних елементів. Викладено результати аналізу достовірності розв'язків та вибору алгоритму для моделювання контакту при повзучості. Отримані результати розв'язання задачі повзучості свідчать, що протягом приблизно 1.25 року завдяки контакту труби зі стрижнями на її поверхні утворюються дефекти типу вм'ятин. Проведена чисельна апроксимація розміру зони контакту може бути використана при аналізі поточного стану поверхонь, наприклад при визначенні можливих корозійних впливів або зношування.

**Подяка.** Ця робота була частково підтримана (Д.В.Бреславський) Фондом Фольксваген "Visiting research program for refugee Ukrainian scientists" (Az. 9C184).

#### Список літератури

1. Wriggers P. Computational contact mechanics (2nd ed.). Springer, Berlin, Heidelberg, 2006, 518 p.
2. Barber J.R. Contact mechanics. Springer, 2018, 581 p.
3. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. Київ: Вища школа, 1995, 304 с.
4. Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Київ: Наук. думка, 1989, 232 с.
5. Penny R.K., Marriott D.L. Design for creep. London: Chapman and Hall, 1995, 430 p.
6. Ползучесть элементов машиностроительных конструкций / А.Н. Подгорный та ін. Київ: Наук. думка, 1984, 262 с.
7. Сироткин О.С., Львов Г.И., Боголюбов В.С. Нелинейные контактные задачи для тонкостенных элементов конструкций в машиностроении. М.: Добі енд Ко, 2008, 312 с.
8. Гоменюк С.І., Толок В.О. Порівнювальний аналіз алгоритмів розв'язання контактних задач механіки твердого тіла, що деформується // Вісник Запорізького державного університету. 1998, № 1, С. 1-4.
9. Vlasenko Y.E., Kuzmenko V.I., Shumelchuk K.I. Зв'язані контактні задачі механіки деформівного тіла //

*Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. 2012, № 19, С. 41-47.

10. Esposito L., Bruno M., Bertocco A. Analytical formulation of the contact pressure evolution for interference joints under creep regime // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2020, v. 185, 104126.

11. Özel A., Temiz S., Aydin M.D., Şen S. Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method // *Materials & Design*. 2005, v. 26, issue 4, p. 281-289.

12. Alamos F. J. et al. Rough surface contact under creep conditions // *Tribology International*. 2022, v. 176, 107916.

13. Larsson J., Storåkers B. On oblique contact of creeping solids // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2002, v. 50, issue 10, p. 2029-2055.

14. Mihalache M., Radu V., Pavelescu M. The simulation of mechanical and thermal behaviour of CANDU fuel channel in thermal transient conditions. // *Conference: ENC 2005, European Nuclear Conference. Nuclear power for the 21. century: from basic research to high-tech industry. Versailles (France), 11-14 Dec 2005*. 2006, 20764751.

15. Nandan G. et al. Study of ballooning of a completely voided pressure tube of Indian PHWR under heat up condition // *Nuclear Engineering and Design*. 2012, v. 243, p. 301-310.

16. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960, 456 с.

17. Lemaitre J., Chaboche J.L. Mechanics of solid materials. Cambridge: University press, 1994, 556 p.

18. ANSYS® Academic Research, Release 12.2, ANSYS Workbench - Simulation Structural Nonlinearities Training Manual, ANSYS, Inc.

19. ANSYS® Academic Research, Release 18.2, Help System, ANSYS Mechanical APDL Contact Technology Guide, ANSYS, Inc.

20. Малинин Н.Н. Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1981, 221 с.

21. Timoshenko S. Theory of elasticity. Oxford, 1951, 560p.

22. Madsen K., Nielsen H.B., Tingleff O. Methods for Non-Linear Least Squares Problems (2nd ed.). IMM, Lyngby, 2004, 58 p.

#### References (transliterated)

1. Wriggers, Peter. *Computational contact mechanics*. 2nd ed. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006. Print.

2. Barber, James. *Contact mechanics*. Springer, 2018. Print.

3. 3 Guz', Oleksandr, Babich Stepan, and Rudnic'kij V'jacheslav. *Kontaktna vzaemodija pruzhnih til z pochatkovimi napruzhenjiami*. Kiiiv: Vishha shkola, 1995. Print.

4. Podgornyj, Anatolij, Gontarovskij Pavel, and Kirkach Boris. *Zadachi kontaktного vzaimodejstviya jelementov konstrukcij*. Kiiiv: Nauk. dumka, 1989. Print.

5. Penny, Royston, and Marriott Douglas. *Design for creep*. London: Chapman and Hall, 1995. Print.

6. Podgornyj, Anatolij, et al. *Polzuchest' jelementov mashinostroitel'nyh konstrukcij*. Kiiiv: Nauk. dumka, 1984. Print.

7. Sirotkin, Oleg, L'vov Gennadij, and Bogoljubov V. *Nelinejnye kontaktnye zadachi dlja tonkostennyh elementov konstrukcij v mashinostroenii*. M.: Dobi end Ko, 2008, Print.

8. Gomenjuk, Sergij, and Tolok V'jacheslav. "Porivnjuval'nyj analiz aljorytmiv rozv'jazannja kontaktnyh zadach mehaniky tverdogo tila, shho deformujet'sja." *Visnik Zaporiz'kogo derzhavnogo universitetu* 1 (1998): 1-4. Print.

9. Vlasenko, Jurij, Kuzmenko Vasy', and Shumelchuk K. "Zv'jazani kontaktni zadachi mehaniky deformivnogo tila." *Problemy obchysljuval'noi' mehaniky i micnosti konstrukcij* 19 (2012): 41-47. Print.

10. Esposito, Luca, Bruno Matteo, and Bertocco Alcide. "Analytical formulation of the contact pressure evolution for interference joints under creep regime." *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 185 (2020): 104126. Print.

11. Özel, Adnan, et al. "Stress analysis of shrink-fitted joints for various fit forms via finite element method." *Materials & Design* 26.4 (2005): 281-289. Print.

12. Alamos, Fernando J., et al. "Rough surface contact under creep conditions." *Tribology International* 176 (2022): 107916. Print.

13. Larsson, Joachim, and Storåkers Bertil. "On oblique contact of creeping solids." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 50.10 (2002): 2029-2055. Print.

14. Mihalache, Maria, Radu Vasile, and Pavelescu Margarit. "The simulation of mechanical and thermal behaviour of CANDU fuel channel in thermal transient conditions" *Conference: ENC 2005, European Nuclear Conference. Nuclear power for the 21. century: from basic research to high-tech industry. Versailles (France), 11-14 Dec 2005*. (2006): 20764751.

15. Nandan, Gopal, et al. "Study of ballooning of a completely voided pressure tube of Indian PHWR under heat up condition." *Nuclear Engineering and Design*. 243 (2012): 301-310. Print.

16. Качанов, Lazar' M. *Teoriya polzuchesti*. M.: Fizmatgiz, 1960. Print.

17. Lemaitre, Jean, and Chaboche Jean-Louis. *Mechanics of solid materials*. Cambridge: University press, 1994. Print.

18. ANSYS® Academic Research, Release 12.2. ANSYS Workbench - Simulation Structural Nonlinearities Training Manual. ANSYS, Inc, 2009. Print.

19. ANSYS® Academic Research, Release 18.2. *Help System, ANSYS Mechanical APDL Contact Technology Guide*. ANSYS, Inc, 2017. Print.

20. Malinin, Nikolaj N. *Raschety na polzuchest' jelementov mashinostroitel'nyh konstrukcij*. M.: Mashinostroenie, 1981. Print.

21. Timoshenko, Stepan P. *Theory of elasticity*. Oxford, 1951. Print.

22. Madsen, Kaj, Nielsen Hans B., and Tingleff Ole. *Methods for Non-Linear Least Squares Problems*. 2nd ed. IMM, Lyngby, 2004. Print.

Надійшло (received) 22.08.2023



*Відомості про авторів/ About the Authors*

**Бреславський Дмитро Васильович (Breslavsky Dmytro)** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: [Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua](mailto:Dmytro.Breslavsky@khpi.edu.ua).

**Паламарчук Павло Ігорович (Palamarchuk Pavlo)** – аспірант кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; [Pavlo.Palamarchuk@infiz.khpi.edu.ua](mailto:Pavlo.Palamarchuk@infiz.khpi.edu.ua)