

Ю. А. ПЛАКСІЙ

## КОРЕКЦІЯ НОРМИ КВАТЕРНІОНА ОРІЄНТАЦІЇ В АЛГОРИТМАХ БІНС: РОЗРАХУНКОВІ СХЕМИ НОРМУВАННЯ І ЇХ ЕФЕКТИВНІСТЬ

Розглядається задача корекції норми обчисленого кватерніона орієнтації в алгоритмах функціонування безплатформених інерціальних навігаційних систем. Розглянуто два існуючих підходи до процесу корекції, перший підхід полягає в нормуванні кватерніона повороту на такті обчислень, другий підхід полягає в нормуванні результуючого кватерніона. Приведено 5 відомих розрахункових схем корекції норми. Для моделювання тестового руху в роботі застосовано аналітичну кватерніонну кінематичну модель обертання, основу на послідовності трьох поворотів, що відповідають кутам Крилова. Розглянуто випадок лінійної залежності кутів елементарних поворотів від часу. Модель забезпечує отримання в аналітичному вигляді проєкцій вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі і відповідних квазікоординат на такті обчислень. Результати чисельного моделювання еталонного руху для заданого набору частот представлені у вигляді залежностей проєкцій вектора кутової швидкості твердого тіла від часу і побудованих траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації.

Для визначення кватерніона повороту на такті використано алгоритм Міллера, який дозволяє отримати приріст вектора орієнтації на основі ідеальної інформації з датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат. Перетворення до кватерніона повороту відбувається за допомогою відповідних розкладень тригонометричних функцій кута істинного повороту (модуля вектора орієнтації) в ряд.

На основі програмно-чисельного експерименту показано, що найкращий результат корекції норми обчисленого кватерніона в сенсі мінімальної похибки норми дає одна із схем фінітного нормування, для якої відсутня операція ділення і яка забезпечує стійкість в часі процесу корекції норми. Приводяться результати чисельного моделювання модельного обертового руху твердого тіла і відпрацювання схем корекції норми обчисленого кватерніона орієнтації.

**Ключові слова:** кватерніон орієнтації, алгоритм орієнтації Міллера, БІНС, похибка норми, обчислювальний дрейф, аналітична еталонна модель, квазікоординати, чисельне моделювання.

The problem of correcting the norm of the computed orientation quaternion in the algorithms for the operation of strapdown inertial navigation systems is considered. Two existing approaches to the correction process are considered, the first approach is to normalize the rotation quaternion at the computation cycle, the second approach is to normalize the resulting quaternion. 5 well-known calculation schemes for norm correction are given. To simulate the test motion, we used an analytical quaternion kinematic rotation model based on a sequence of three rotations corresponding to the Krylov angles. The case of linear dependence of elementary rotation angles on time is considered. The model provides analytical representation of the projections of the angular velocity vector of the rigid body on the associated axes and the corresponding quasi-coordinates on the calculation cycle. The results of numerical simulation of the reference motion for a given set of frequencies are presented as dependences of the projections of the angular velocity vector of the rigid body on time and the constructed trajectories in the configuration space of the orientation parameters.

To determine the rotation quaternion on a cycle, the Miller algorithm was used, which makes it possible to obtain an increase in the orientation vector based on ideal information from the angular velocity sensors in the form of quasi-coordinates. The transformation into a rotation quaternion occurs with the help of the corresponding expansions of the trigonometric functions of the true rotation angle (modulus of the orientation vector) in a series.

Based on a numerical experiment, it is shown that the best result of correcting the norm of the calculated quaternion in the sense of the minimum error of the norm is given by one of the finite normalization schemes, for which there is no division operation and ensures the stability of the norm correction in time. The results of numerical simulation of the model rotational motion of a rigid body and the development of schemes for correcting the norm of the calculated orientation quaternion are presented.

**Keywords:** orientation quaternion, Miller's orientation algorithm, SINS, norm error, computational drift, analytical reference model, quasi-coordinates, numerical simulation.

**Вступ.** Задача необхідності періодичної корекції норми обчисленого кватерніона орієнтації в безплатформених інерціальних навігаційних системах (БІНС) розглядалася з самого початку виникнення таких систем і розробки їх алгоритмічного забезпечення [1-8]. Актуальність її обумовлена тим, що відхилення норми обчисленого кватерніона, який є наближеним розв'язком кінематичного рівняння, від одиниці хоча і не призводить до похибки побудови системи координат, але є зовсім небажаним, бо може привести до переповнення розрядної сітки автономного обчислювача або до виродження кватерніона орієнтації в нуль. Якщо кватерніон використовується в операціях ортогонального перетворення векторів або в формулі складання поворотів на такті обчислень, то для ненормованих кватерніонів ці операції мають більш складний вигляд у порівнянні з відповідними формулами для нормованих кватерніонів, і це є нераціональним з точки зору обсягу обчислень. Нормування кватерніона також є обов'язковим при формуванні на його основі матриці направляючих косинусів, а також в задачах побудовання різноманітних схем фільтра Калмана [9-12]. Всі ці обставини зумовлюють необхідність обмежувати відхилення норми обчисленого

кватерніона від одиниці.

## Схеми корекції кватерніона орієнтації і оцінювання похибки норми на еталонній моделі.

Поточне значення кватерніона орієнтації  $\Lambda_n^*$  в момент часу  $t_n$  визначається за формулою складання поворотів

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^*, \quad (1)$$

де  $\Lambda_{n-1}^*$  - кватерніон, що задає орієнтацію зв'язаних осей відносно осей опорного тригранника в момент часу  $t_{n-1} = t_n - \Delta T$ ,  $\Delta\Lambda_n^*$  - кватерніон повороту, обчислений за інформацією тріади датчиків кутової швидкості (ДКШ) на такті  $[t_{n-1}, t_n]$ . Зазвичай кватерніон повороту  $\Delta\Lambda_n^*$  - це алгоритмізований наближений частинний розв'язок кінематичного рівняння на інтервалі  $[t_{n-1}, t_n]$  з початковою умовою  $\Delta\Lambda_{n-1}^* = (1, 0, 0, 0)$ , отриманий в термінах вихідної інформації з ДКШ.

Існуючі схеми нормування можна умовно поділити на схеми, що пов'язані з нормуванням частинного кватерніона  $\Delta\Lambda_n^*$ , і схеми фінітного

нормування, коли нормується результуючий на такті кватерніон  $\Delta\Lambda_n^*$ .

*Схема 1 (фінітне нормування).* Нормований кватерніон  $\Lambda_n^{**}$  отримується на основі класичної формули [7,12,13]:

$$\Lambda_n^{**} = \frac{\Lambda_n^*}{\|\Lambda_n^*\|}, \quad (2)$$

$$\text{де } \|\Lambda_n^*\| = \sqrt{\lambda_{n0}^{*2} + \lambda_{n1}^{*2} + \lambda_{n2}^{*2} + \lambda_{n3}^{*2}}.$$

Недоліки цієї схеми пов'язані з виконанням витратних з точки зору машинних обчислень операцій визначення кореня і ділення.

*Схема 2 (нормування частинного кватерніона).* За цією схемою маємо [1]:

$$\Delta\Lambda_n^{**} = \frac{\Delta\Lambda_n^*}{\|\Delta\Lambda_n^*\|}, \quad (3)$$

$$\text{де } \|\Delta\Lambda_n^*\| = \sqrt{\Delta\lambda_{n0}^{*2} + \Delta\lambda_{n1}^{*2} + \Delta\lambda_{n2}^{*2} + \Delta\lambda_{n3}^{*2}}.$$

Формула складання поворотів в цьому випадку має вигляд:

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^{**}.$$

*Схема 3 (нормування частинного кватерніона).* Схема була запропонована в [14] при проектуванні алгоритмічного забезпечення функціонування системи орієнтації і навігації малогабаритного космічного апарату. Відповідно до цієї схеми нормування кватерніона  $\Delta\Lambda_n^*$  відбувається шляхом помноження всіх його компонент на скаляр

$$\Delta\Lambda_n^{**} = \Delta\Lambda_n^* (1.5 - 0.5 \|\Delta\Lambda_n^*\|^2). \quad (4)$$

*Схема 4 (нормування частинного кватерніона).* Схема наведена в [15]. За цією схемою корекції підлягає тільки скалярна складова обчисленого частинного кватерніона  $\Delta\Lambda_n^*$ , при цьому векторна частина залишається незмінною:

$$\Delta\Lambda_n^{**} = \Delta\Lambda_n^* - 0.5 (\|\Delta\Lambda_{n-1}^*\|^2 - 1), \quad (5)$$

$$\text{де } \|\Delta\Lambda_{n-1}^*\| = \sqrt{\Delta\lambda_{n-1,0}^{*2} + \Delta\lambda_{n-1,1}^{*2} + \Delta\lambda_{n-1,2}^{*2} + \Delta\lambda_{n-1,3}^{*2}}.$$

Показано, що нормування кватерніона за цією схемою забезпечує стійкість процесу корекції норми результуючого кватерніона  $\Lambda_n^{**}$ .

*Схема 5 (фінітне нормування).* Вперше була запропонована Savage в роботі [3] і відтворена незалежно в [16]. Формула нормування за цією схемою має вигляд:

$$\Lambda_n^{**} = \Lambda_n^* (1 - 0.5 (\|\Lambda_n^*\|^2 - 1)). \quad (6)$$

В [16] показана ефективність такої корекції норми в реверсивних схемах алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації.

*Оцінки похибок орієнтації. Накопичений дрейф і похибка норми.* Для аналізу точності алгоритма орієнтації застосуємо мультиплікативну оцінку обчисленого накопиченого дрейфу [17,18], яка має просту фізичну інтерпретацію: це малий кут  $\delta\theta_n$  плоского повороту, що забезпечує співпадання обчисленого положення твердого тіла з його еталонним положенням, яке відповідає точній орієнтації. Кватерніон цього малого повороту обчислюється, як

$$\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \Lambda_n^{-1}, \quad (7)$$

$$\text{де } \Lambda_n^{-1} = \frac{\tilde{\Lambda}_n}{\|\Lambda_n^*\|} - \text{зворотній кватерніон до}$$

еталонного (модельного) кватерніона  $\Lambda_n = (\lambda_{n0}, \vec{\lambda}_n)$ ,  $\tilde{\Lambda}_n$  - спряжений кватерніон до  $\Lambda_n$ , отже  $\tilde{\Lambda}_n = (\lambda_{n0}, -\vec{\lambda}_n)$ . Якщо модельний кватерніон  $\Lambda_n$  є нормованим, то  $\Lambda_n^{-1} = \tilde{\Lambda}_n$ . Тоді з (7) маємо:

$$\delta\Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n. \quad (8)$$

Оскільки кватерніон  $\delta\Lambda_n$  можна представити у вигляді  $\delta\Lambda_n = \cos(\frac{\delta\theta_n}{2}) + \vec{\xi} \sin(\frac{\delta\theta_n}{2})$ , то оцінку похибки дрейфу отримаємо у вигляді [17]:

$$\delta\theta_n = 2 \arctg \left( \frac{|\delta\vec{\lambda}_n|}{\delta\lambda_{n0}} \right), \quad (9)$$

$$\text{де } |\delta\vec{\lambda}_n| = \sqrt{\delta\lambda_{n1}^2 + \delta\lambda_{n2}^2 + \delta\lambda_{n3}^2}.$$

Зауважимо, що дрейф - це неусувна похибка орієнтації, притаманна конкретному алгоритму, що розглядається.

Для оцінювання похибки норми кватерніона використаємо адитивну оцінку у вигляді [15]:

$$\chi = \|\Lambda_n^*\|^2 - 1, \quad (10)$$

яка показує відхилення норми обчисленого кватерніона від одиниці. Зауважимо, що на відміну від оцінки накопиченої похибки дрейфу обчислення оцінки похибки норми не вимагає знання еталонного кватерніона.

*Еталонна модель орієнтації.* Для реалізації тестового обертового руху твердого тіла використаємо аналітичну кінематичну модель, основу на трьох послідовних поворотах на кути  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  за схемою Крилова. Кватерніон такого обертання має вигляд [19]:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \cos(\varphi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \cos(\theta(t)) + \\ &+ \sin(\varphi(t)) \cdot \sin(\psi(t)) \cdot \sin(\theta(t)); \\ \lambda_1(t) &= \cos(\varphi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \sin(\theta(t)) - \\ &- \sin(\varphi(t)) \cdot \sin(\psi(t)) \cdot \cos(\theta(t)); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\lambda_2(t) &= \cos(\varphi(t)) \cdot \sin(\psi(t)) \cdot \cos(\theta(t)) + \\ &+ \sin(\varphi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \sin(\theta(t)); \\ \lambda_3(t) &= \sin(\varphi(t)) \cdot \cos(\psi(t)) \cdot \cos(\theta(t)) - \\ &- \cos(\varphi(t)) \cdot \sin(\psi(t)) \cdot \sin(\theta(t));\end{aligned}$$

Представлення кватерніона орієнтації у вигляді (11) дозволяє знайти проєкції вектора кутової швидкості на зв'язані осі в аналітичному вигляді на основі оберненого кінематичного рівняння:

$$\begin{aligned}\omega_1(t) &= -2\dot{\varphi}(t) \cdot \sin 2\psi(t) + 2\dot{\theta}(t); \\ \omega_2(t) &= \dot{\varphi}(t) \cdot \sin(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\psi}(t) \cdot \sin(2\theta(t)) - \\ &- 2\dot{\psi}(t) + 2\dot{\psi}(t) \cdot \cos 2\theta(t); \\ \omega_3(t) &= \dot{\varphi}(t) \cdot \cos(2\theta(t) + 2\psi(t)) + \dot{\psi}(t) \cdot \cos(2\theta(t)) - \\ &- 2\dot{\psi}(t) - 2\dot{\psi}(t) \cdot \sin 2\theta(t).\end{aligned}\quad (12)$$

На відміну від відомих аналітичних розв'язків рівнянь обертання твердого тіла у випадках регулярної прецесії і кінчного руху [17,20,21], які застосовуються як тестові для відпрацювання алгоритмів БНС, модель (11), (12) описує більш складний рух твердого тіла.

*Алгоритм орієнтації Міллера.* В алгоритмі Міллера [22] в якості кінематичних параметрів використовується вектор орієнтації. В результаті обчислюється приріст вектора орієнтації  $\bar{\theta}_n^*$  на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  за формулою:

$$\bar{\theta}_n = \bar{\theta}_n^* + \frac{33}{80} \cdot (\bar{\theta}_n^1 \times \bar{\theta}_n^3) + \frac{57}{80} \cdot \bar{\theta}_n^2 \times (\bar{\theta}_n^3 - \bar{\theta}_n^1), \quad (13)$$

де  $\bar{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)$ , а вихідні сигнали

гіроскопів (квазікоординати [23])  $\bar{\theta}_n^1 = \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+1/3\Delta T} \bar{\omega}(t) dt$ ,

$\bar{\theta}_n^2 = \int_{t_{n-1}+1/3\Delta T}^{t_{n-1}+2/3\Delta T} \bar{\omega}(t) dt$ ,  $\bar{\theta}_n^3 = \int_{t_{n-1}+2/3\Delta T}^{t_{n-1}+\Delta T} \bar{\omega}(t) dt$  формуються

в середині такту обчислень в точках знімання первинної інформації  $t_{n-1}+1/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+2/3\Delta T$ ,  $t_{n-1}+\Delta T$ ,  $\Delta T$  – тривалість такту обчислень. Для моделі (11), (12) значення квазікоординат можуть бути отримані також в аналітичному вигляді.

Подальше визначення кватерніона повороту засноване на розкладенні в ряд тригонометричних функцій кута істинного повороту (модуля вектора орієнтації  $\theta_n = |\bar{\theta}_n|$ ). Для алгоритма 4 порядку маємо:

$$\Delta\Lambda_n^* = \left(1 - \frac{\theta_n^2}{8} + \frac{\theta_n^4}{384}, \frac{1}{2} \bar{\theta}_n \left(1 - \frac{\theta_n^2}{24}\right)\right). \quad (14)$$

**Чисельний експеримент.** Програмно-чисельна реалізація еталонної моделі кутового руху. Для чисельного моделювання алгоритма Міллера і отримання результатів нормування кватерніона орієнтації реалізуємо програмно-чисельно модель обертального руху (11), (12) з тактом  $\Delta t = 0,1$  с на інтервалі часу  $t \in [0, 200]$  с. Розглянемо випадок, коли кути  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  змінюються лінійно з часом, тобто  $\varphi(t) = k_1 t$ ,  $\psi(t) = k_2 t$ ,  $\theta(t) = k_3 t$ . Задамо

значення частот кінематичної моделі  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.25$ ,  $k_3 = 0.05$ . Початкові умови руху:  $\Lambda_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\bar{\omega}(0) = (0.1, 0.5, 0.3)$  рад/с. На рис.1 представлені залежності проєкцій вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі. На рис.2 наведені побудовані траєкторії  $\lambda_i(\lambda_0)$ , ( $i=1,2,3$ ) в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для кінематичної моделі (11).

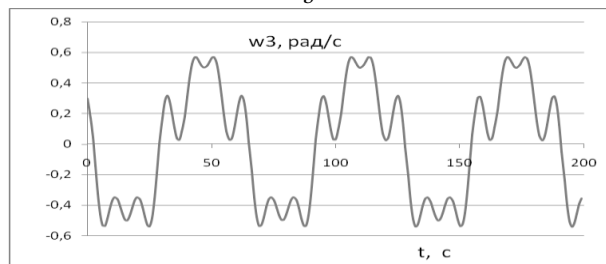
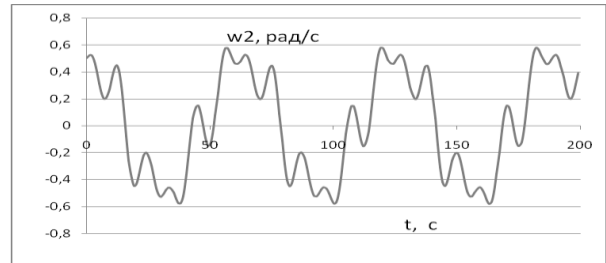
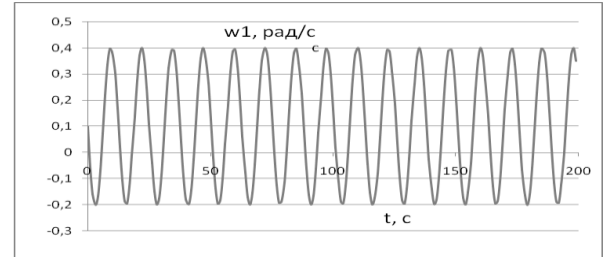


Рисунок 1 – Проекції вектора кутової швидкості модельного руху  
а – на першу вісь; б – на другу вісь; в – на третю вісь

*Програмно-чисельна реалізація алгоритма Міллера і схем нормування кватерніона орієнтації.* Орієнтація визначалась алгоритмом Міллера за ідеальною інформацією з виходів датчиків кутової швидкості у вигляді квазікоординат  $\bar{\theta}_n^1$ ,  $\bar{\theta}_n^2$ ,  $\bar{\theta}_n^3$ . Такт обчислень кватерніона орієнтації алгоритмом  $\Delta T = 0.1$  с. Залежність накопиченої похибки дрейфу від часу для алгоритма Міллера представлена на рис.3. Чисельний експеримент підтвердив, що нормування не впливає на накопичену похибку дрейфу.

На рис.4 показана оцінка похибки норми обчисленого кватерніона  $\Delta\Lambda_n^*$ , коли процедура нормування відсутня. Похибка норми має лінійно-зростаючий характер.

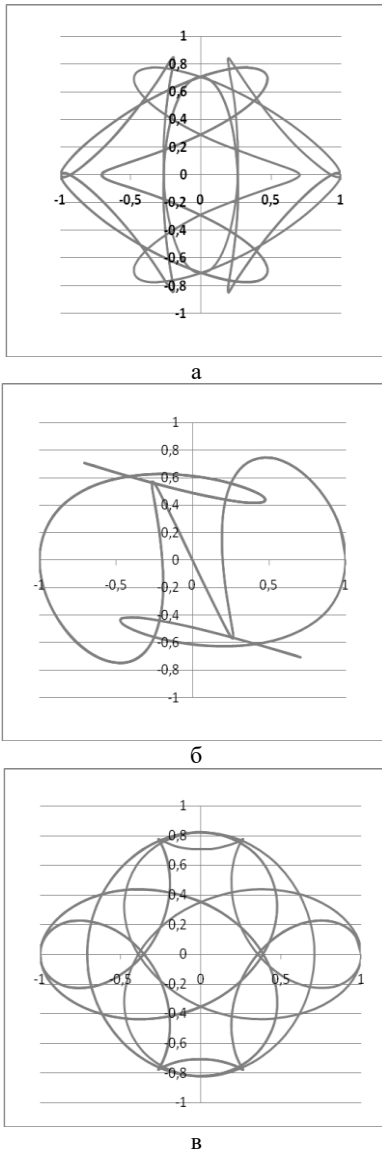


Рисунок 2 – Траскторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації еталонної моделі  
 а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; с –  $\lambda_3(\lambda_0)$

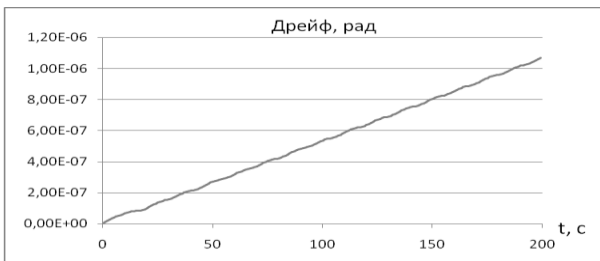


Рисунок 3 – Залежність накопиченої похибки дрейфу від часу

На рис.5-9 наведені графіки залежності похибки норми обчисленого кватерніона  $\Lambda_n^*$  від часу, коли застосовується процедура корекції норми. У випадку фінітного нормування за класичною формулою (2) максимальне значення модуля похибки норми не перевищує значення  $2.0 \cdot 10^{-16}$  (рис.5).

При застосуванні схем 2 і 3 для нормування

частинного кватерніона  $\Delta \Lambda_n^*$  (рис.6,7) стійкість процесу корекції норми не спостерігається на відміну від випадку нормування за схемою 4, коли стійкість процесу корекції норми забезпечується (рис.8).

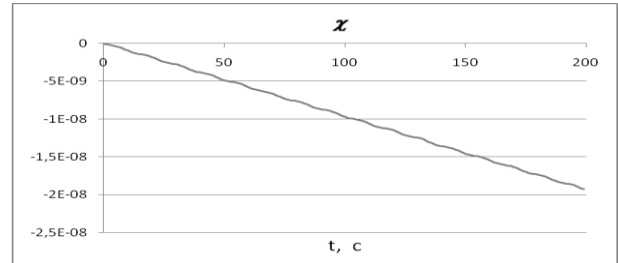


Рисунок 4 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона від часу. Нормування відсутнє

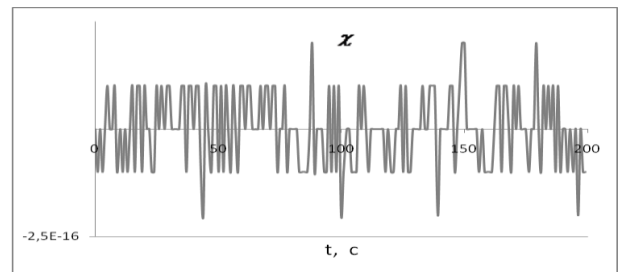


Рисунок 5 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона від часу. Нормування за схемою 1.

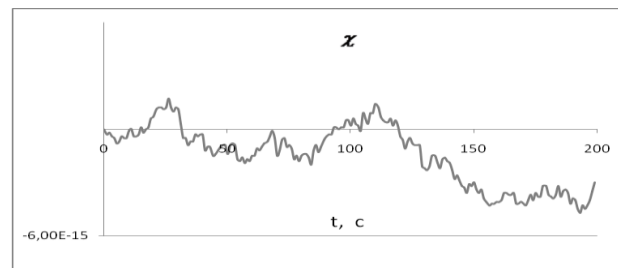


Рисунок 6 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона. Корекція за схемою 2.

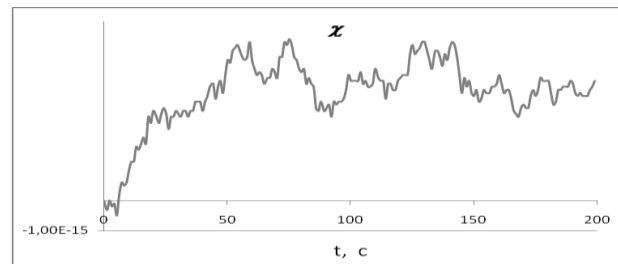


Рисунок 7 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона від часу. Корекція за схемою 3.

На рис.9 приведений графік залежності похибки норми обчисленого кватерніона при застосуванні схеми фінітного нормування за формулою (6). Відмічається стійкість процесу корекції, максимальне значення модуля похибки на інтервалі спостереження не перевищує  $2.0 \cdot 10^{-16}$ .

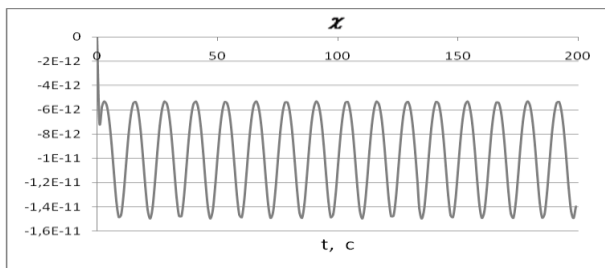


Рисунок 8 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона від часу. Корекція за схемою 4.

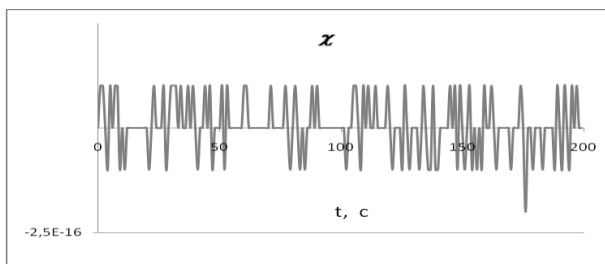


Рисунок 9 – Залежність похибки норми обчисленого кватерніона від часу. Корекція за схемою 5.

**Висновки.** Розглянуто 5 схем корекції норми обчисленого кватерніона орієнтації, що засновані на двох відомих підходах. Перший передбачає корекцію норми обчисленого кватерніона повороту  $\Delta\Lambda_n^*$ , другий - корекцію норми кватерніона  $\Lambda_n^*$ . Для отримання результатів дослідження застосована аналітична модель обертого руху твердого тіла, відмінна від відомих випадків (регулярної прецесії і кіничного руху) інтегрування в квадратурах рівнянь обертого руху твердого тіла. Для обчислення кватерніона орієнтації використано відомий алгоритм Міллера, що обчислює приріст вектора орієнтації на такті за інформацією про квазікоординати. На основі проведеного чисельного експерименту підтверджено, що процес корекції норми не впливає на точність визначення орієнтації, яка оцінюється мультиплікативною накопиченою похибкою дрейфу. Показано, що найкращий результат корекції норми обчисленого кватерніона забезпечується схемою 5 фінітного нормування. При цьому процес корекції є стійким за часом.

Результати чисельного експерименту отримані за допомогою розробленої розрахункової програми на мові C++, яка дозволяє отримувати з заданим тактом еталонну кінематичну модель кутового руху, чисельно реалізувати математичну модель датчиків кутової швидкості, математичну модель алгоритма орієнтації, корекцію норми кватерніона і отримувати оцінку накопиченого обчислювального дрейфу і оцінку похибки норми.

#### Список літератури

1. Bar-Itzhack I.Y. Optimum normalization of a computed quaternion of rotation/IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-7. Pp. 401-402, 1971. DOI: 10.1109/TAES.1971.310384.
2. Giardina C.R. Comments on 'Optimum Normalization of a Computed Quaternion of Rotation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.AES-10, no.3.Pp.392-393, 1974.

3. Savage, P. G. Strapdown System Algorithms, *Advances In Strapdown Inertial Systems*, NATO AGARD Lecture Series No. 133, May 1984, Section 3.

4. Savage, P. G. A New Second-Order Solution for Strapped-Down Attitude Computation/AIAA/JACC Guidance & Control Conference, Seattle, Washington, August 15-17, 1966.

5. Savage, P. G. Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1 - Attitude Algorithms, *AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*, Vol. 21, No. 1, January-February 1998, pp. 19-28.

6. Bortz J. E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume AES-7, No. 1, January 1971, pp. 61-66.

7. Bar-Itzhack I.Y., Oshman Y. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.AES-21, no.1, pp.128-136, 1985.

8. Ignagni, M. B. Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms/ AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics, Vol. 13, No. 2, March-April 1990, pp. 363-369.

9. Roberson R.E. Correction of numerical error when two direction cosine columns are used as kinematical variables/ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.46, no.2, pp.151, 1984.

10. Zanetti R., Bishop R. Quaternion Estimation and Norm Constrained Kalman Filtering/ AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, 2006.

11. Deutschmann J.K., Bar-Itzhack I.Y., Markley F.L. Quaternion Normalization in Additive EKF for Spacecraft Attitude Determination/ AIAA Guidance Navigation, and Control Conf., New Orleans, LA, August 1991.

12. Wu, J., Zhou, Z., Gao, B., Li, R., Cheng, Y., & Fourati, H. (2018). Fast Linear Quaternion Attitude Estimator Using Vector Observations/ IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 15(1), 307-319. doi.org/10.1109/TASE.2017.2699221.

13. Lourakis M., Terzakis G. Efficient Absolute Orientation Revisited, 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Madrid, Spain, 2018, pp. 5813-5818, doi: 10.1109/IROS.2018.8594296.

14. Lobusov, E., Fomichev A., Parisi M. Kinematic approach implementation in developing of attitude control system for small-sized spacecraft. *Intelligent Sys-tems: Proceedings of the Tenth International Symposium. Moscow: RUSAKI*, 2012, p. 361-363.

15. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973.-320 с.

16. Плаксий Ю. А. Підвищення точності реверсивних схем алгоритмів визначення кватерніонів орієнтації / Ю. А. Плаксий // Вісник НТУ «ХП», №37. –2013. – 130-140.

17. Bortz J. E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume AES-7, No. 1, January 1971, pp. 61-66.

18. Панов А.П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // *Мех. гироскоп. систем.* – К., 1984.– Вып. 3.– С. 105-112.

19. Плаксий Ю. А. Еталонна модель обертання твердого тіла на основі представлення кватерніона орієнтації в функціях кутів Крилова, що змінюються у часі. *Вісник НТУ «ХП», №18 (1127).* 2015. С.120-130.

20. Панов А.П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // *Кибернет. и вычисл. техн.* – К., 1987.– Вып. 73.– С. 3-9.

21. Панов А.П. Адаптивные прецессионные алгоритмы вычисления кватернионов вращения твердого тела // *Кибернет. и вычисл. техн.* – К., 1988.– Вып. 77.– С.47-52.

22. Miller R.B. A new strapdown attitude algorithm. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287-291.

23. Панов А.П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К.: Наук. думка, 1995. – 280 с.

#### References (transliterated)

1. Bar-Itzhack I.Y. Optimum normalization of a computed quaternion of rotation/IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. AES-7. Pp. 401-402, 1971. DOI: 10.1109/TAES.1971.310384.
2. Giardina C.R. Comments on 'Optimum Normalization of a Computed Quaternion of Rotation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.AES-10, no.3.Pp.392-393, 1974.

3. Savage, P. G. Strapdown System Algorithms, *Advances In Strapdown Inertial Systems*, NATO AGARD Lecture Series No. 133, May 1984, Section 3.
4. Savage, P. G. A New Second-Order Solution for Strapped-Down Attitude Computation/AIAA/JACC Guidance & Control Conference, Seattle, Washington, August 15-17, 1966.
5. Savage, P. G. Strapdown Inertial Navigation System Integration Algorithm Design Part 1 - Attitude Algorithms, *AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*, Vol. 21, No. 1, January-February 1998, pp. 19-28.
6. Bortz J. E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume AES-7, No. 1, January 1971, pp. 61-66.
7. Bar-Itzhack I.Y., Oshman Y. Attitude Determination from Vector Observations: Quaternion Estimation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol.AES-21, no.1, pp.128-136, 1985.
8. Ignagni, M. B. Optimal Strapdown Attitude Integration Algorithms/ AIAA Journal Of Guidance, Control, And Dynamics, Vol. 13, No. 2, March-April 1990, pp. 363-369.
9. Roberson R.E. Correction of numerical error when two direction cosine columns are used as kinematical variables/ *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.46, no.2, pp.151, 1984.
10. Zanetti R., Bishop R. Quaternion Estimation and Norm Constrained Kalman Filtering/ *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 2006.
11. Deutschmann J.K., Bar-Itzhack I.Y., Markley F.L. Quaternion Normalization in Additive EKF for Spacecraft Attitude Determination/ *AIAA Guidance Navigation, and Control Conf.*, New Orleans, LA, August 1991.
12. Wu, J., Zhou, Z., Gao, B., Li, R., Cheng, Y., & Fourati, H. (2018). Fast Linear Quaternion Attitude Estimator Using Vector Observations/ *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 15(1), 307–319. doi.org/10.1109/TASE.2017.2699221
13. Lourakis M., Terzakis G. Efficient Absolute Orientation Revisited, 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), Madrid, Spain, 2018, pp. 5813-5818, doi: 10.1109/IROS.2018.8594296.
14. Lobusov, E., Fomichev A., Parisi M. Kinematic approach implementation in developing of attitude control system for small-sized spacecraft. *Intelligent Systems: Proceedings of the Tenth International Symposium*. Moscow: RUSAKI, 2012, p. 361–363.
15. Branets V.N., Shmyiglevskiy I.P. Primenenie kvaternionov v zadachah orientatsii tverdogo tela [The use quaternions in problems of a rigid body orientation]. M.: Nauka. 1973. 320 p.
16. Plaksy Yu. A. Pidvishennja tochnosti reversivnih shem algoritmiv viznachennja kvaternioniv orientacii [Increasing the Accuracy of Reverse Schemes of Algorithms for Determining Orientation Quaternions]. – *Visnik NTU «HPI»*, [Bulletin of the NTU "KhPI"]. No37. 2013. 130–140.
17. Bortz J. E. A New Mathematical Formulation for Strapdown Inertial Navigation/ IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Volume AES-7, No. 1, January 1971, pp. 61-66.
18. Panov A.P. Adaptivnyie pretsessionnyie algoritmyi vyichisleniy kvaternionov vrascheniya tverdogo tela [Adaptive precession algorithms for computing quaternions of rotation of a rigid body]// *Kibernet. i vyichisl. tehn* [Cybernetics and Computing]. Kyiv, 1988, vol. 77, pp. 47–52.
19. Plaksy Yu. A. Etalonna model obertannia tverdoho tila na osnovi predstavlennia kvaterniona oriantatsii v funktsiiakh kutiv Krylova, shcho zminiuiutsia u chasi [Reference model of rotation of a rigid body based on the representation of the orientation quaternion as a function of Krylov angles that change in time]. *Visnyk NTU «KhPI»* [Bulletin of the NTU "KhPI"], №18 (1127). 2015. S.120–130.
20. Panov A.P. Optimizacija vysokotochnyh algoritmov vyichislenija kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of a precession of a rigid body]. *Kibernetika i vyichislitel'naya tehnika*. K. 1987. Vyp. 73, pp. 3–9.
21. Panov A.P. Optimizatsiya metodov vyichisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyah tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions with conic vibrations of a rigid body]// *Mekh. girosk. sistem*. [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
22. Miller R.B. A new strapdown attitude algorithm. // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 6, No 4, 1983. PP.287–291.
23. Panov A.P. Matematicheskie osnovy teorii inertzialnoy navigatsii. [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation] – K.: Nauk. dumka, 1995. – 280 s.

Надійшла (received) 18.07.2023

Відомості про автора / About the Author

Плаксію Юрій Андрійович (Plaksy Yuriy Andriyovich) – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ «ХПІ», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: [plaksy.yu@gmail.com](mailto:plaksy.yu@gmail.com).