

*Л.В. КУРПА, Т.В. ШМАТКО, Г.Б. ЛІННИК, І.О. МОРАЧКОВСЬКА, Г.М. ТИМЧЕНКО*

## ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПОРИСТИХ СИГМОВИДНИХ СЕНДВИЧ ПЛАСТИН

В роботі розглянуто проблему дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних (ФГ) пористих сигмовидних пластин типу сендвіч, які можуть мати складну геометричну форму та різні типи закріплення. Для розв'язання поставленої задачі використано варіаційно-структурний метод (RFM), який поєднує теорію R-функцій та варіаційний метод Релея-Рітца. Математичну постановку задачі виконано в рамках деформаційної теорії пластин першого порядку (FSDT). Розглянуто пластини, зовнішні шари яких вироблено із функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ), а заповнювач є ізотропним. Для різних моделей розподілення пор (сигмовидне рівномірне та нерівномірне) виведені формули для обчислення ефективних властивостей ФГМ. Числові результати для прямокутних пластин порівняно з відомими результатами, отриманими за допомогою інших методів. Досліджено власні коливання пластин зі складною формою плану. Отримані результати представлені у вигляді таблиць та графіків. Проаналізовано вплив об'ємної долі кераміки, різних видів ФГМ та коефіцієнту пористості на власні частоти коливань пластини.

**Ключові слова:** функціонально-градієнтні матеріали, пластини, коефіцієнт пористості, коефіцієнт об'ємної долі кераміки, теорія R-функцій, метод Релея-Рітца, власні частоти.

Analysis of free vibrations of functionally graded (FG) porous sigmoid sandwich plates, is considered in this paper. The plate can have a complex geometric shape and various types of fastening. To solve the problem, we used the variational-structural method (RFM), which combines the theory of R-functions and variational method of Rayleigh-Ritz. The mathematical statement of the problem is carried out within the framework of the deformation theory of plates of the first order (FSDT). Plates are considered, the outer layers of which are made of functionally graded materials (FGM), and the core is isotropic. For different models of porosity distribution (sigmoid uniform and nonuniform), analytical expressions were obtained to calculate the effective properties of FGM. For rectangular plates, a comparison of the obtained results with known results obtained using other approaches is shown. Calculations for plates with a complex shape are presented in the form of tables and graphs. The influence of the volume fraction of ceramics, the different types of FGM and the coefficient of porosity on the natural frequencies of the plate is analyzed.

**Keywords:** functionally graded materials, plates, porosity, volume fraction coefficient of ceramics, theory of R-functions, Rayleigh-Ritz method, natural frequencies.

**Вступ.** Динамічний аналіз пластин різної геометричної форми, що вироблені із сучасних функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) представляє актуальну проблему механіки. Особливо це стосується пластин типу сендвіч, обмежених зовнішніми ФГ шарами та мають ізотропний заповнювач, або навпаки із ізотропними зовнішніми шарами та ФГ заповнювачем. Зауважимо, що при виготовленні ФГМ можуть утворюватися пори, які впливають на механічні характеристики ФГМ. Тому бажано враховувати наявність пористості в елементах сучасних конструкцій. В останні роки вченими приділяється велика увага розробці методів моделювання ФГ пористих пластин з різними законами розподілення пористості в матеріалі [1-12]. Та, на жаль, нові досить ефективні теорії ілюструються на прикладах тільки прямокутних пластин і в більшості для степеневого розподілення пористості.

Моделювання ФГ пористих пластин за сигмовидним законом розглянуто в [12].

В даній роботі пропонується підхід, який використовує теорію R-функцій та варіаційні методи [13-18]. Новиною даної роботи є те, що вперше теорію R-функцій використано для дослідження коливань пористих ФГ пластин типу сендвіч із сигмовидним законом розподілення пористості. Для даного випадку одержано аналітичні вирази для обчислення ефективних властивостей ФГМ, розроблено програмне забезпечення, яке було перевірено на ряді тестових задач, та застосовано для аналізу пластини зі складною формою. Вивчено вплив коефіцієнту пористості, видів ФГМ та об'ємної долі кераміки на поведінку власних частот пластини.

Постановка задачі. Розглянемо пористу ФГ сендвіч пластину довільної геометричної форми.

Припускається, що зовнішні шари виготовлено із ФГМ, а саме із суміші металу та кераміки, а внутрішній шар (заповнювач) є керамічним. Розглянемо два типи розподілення пористості: рівномірний (рис.1) та нерівномірний (рис.2).

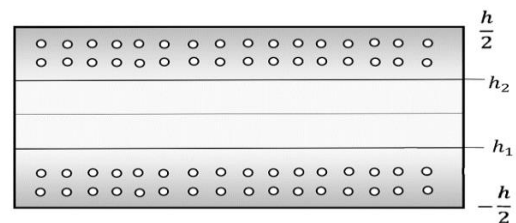


Рис.1

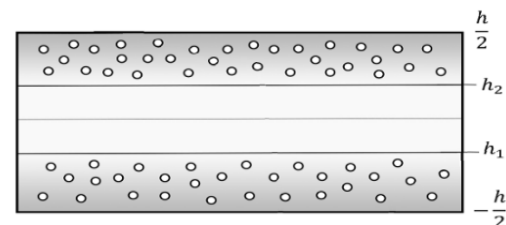


Рис.2

Ефективні фізичні характеристики ФГМ (модуль пружності  $E$  та густина матеріалу  $\rho$ ) у разі рівномірного розподілення пористості визначаються за формулами (1) [4]:

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m). \end{cases} \quad (1)$$

Для нерівномірного розподілення наступними виразами (2)

$$\begin{cases} P^{(1)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(1)}(z) - \\ - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \left( 1 + \frac{z - h_1}{\frac{h}{2} + h_1} \right), \\ P^{(2)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(2)}(z), \\ P^{(3)}(z) = P_m + (P_c - P_m)V^{(3)}(z) - \\ - \frac{\alpha}{2}(P_c + P_m) \left( \frac{z - \frac{h}{2}}{h_2 - \frac{h}{2}} \right). \end{cases} \quad (2)$$

де  $\alpha$  це коефіцієнт пористості, а  $V^{(1)}$ ,  $V^{(2)}$ ,  $V^{(3)}$  – часткові долі кераміки для шарів, які визначаються за степеневим законом:

$$\begin{cases} V^{(1)}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z + \frac{h}{2}}{h_r + \frac{h}{2}} \right)^p, & -\frac{h}{2} \leq z \leq h_r, \\ V^{(1)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z - h_1}{h_r + h_1} \right)^p, & h_s \leq z \leq h_1, \\ V^{(2)}(z) = 1, & h_1 \leq z \leq h_2, \\ V^{(3)}(z) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z - h_2}{h_s + h_2} \right)^p, & h_2 \leq z \leq h_s, \\ V^{(3)}(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{z - \frac{h}{2}}{h_s - \frac{h}{2}} \right)^p, & h_s \leq z \leq \frac{h}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

Величини  $h_r$  та  $h_s$  визначають середину нижнього та верхнього шарів відповідно, а саме

$$h_r = \frac{1}{2} \left( h_1 - \frac{h}{2} \right), \quad h_s = \frac{1}{2} \left( h_2 + \frac{h}{2} \right). \quad (4)$$

Зауважимо, що коефіцієнт Пуассона обрано однаковим і постійним для складових матеріалу.

Показник степеня  $p$ , ( $0 \leq p \leq \infty$ ) позначає показник об'ємної частки кераміки,  $z$  – відстань між поточною точкою і серединною площиною. Індеси  $m$  та  $s$  у формулах (1), (2) відповідають позначенням властивостей металу та кераміки відповідно.

Для аналізу коливань пластини використовується деформаційна теорія першого порядку [17,18]. Переміщення  $u, v, w$  в будь-якій точці пластини виражаються як функції переміщень серединної поверхні  $u_0, v_0$  і  $w$  в напрямках осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$  та незалежних кутів повороту  $\psi_x, \psi_y$  поперечної нормалі до серединної поверхні навколо осей  $Oy$  і  $Ox$  відповідно:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\psi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\psi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t). \end{cases} \quad (5)$$

Зусилля  $N = (N_{11}, N_{22}, N_{12})^T$ , моменти  $M = (M_{11}, M_{22}, M_{12})^T$  та перерізуючі сили  $Q = (Q_x, Q_y)^T$  обчислюються як

$$\begin{cases} \{N\} = [A]\{\varepsilon\} + [B]\{\chi\}, \\ \{M\} = [B]\{\varepsilon\} + [D]\{\chi\}, \\ \{Q\} = K_s^2 A_{66} \{\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T, \end{cases} \quad (6)$$

де  $K_s^2$  визначає коефіцієнт зсуву. В даній роботі він приймається рівним  $K_s^2 = 5/6$ .

Зауважимо, що елементи  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  матриць  $[A]$ ,  $[B]$  і  $[D]$  у виразах (6) обчислюються за формулами:

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} dz, \\ B_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z dz, \\ D_{ij} = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} Q_{ij}^{(r)} z^2 dz, \end{cases} \quad (7)$$

де

$$z_1 = -h/2, \quad z_2 = h_1, \quad z_3 = h_2, \quad z_4 = h/2.$$

Величини  $Q_{ij}^{(r)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються як:

$$\begin{cases} Q_{11}^{(r)} = Q_{22}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{1 - (\nu^{(r)})^2}, \\ Q_{12}^{(r)} = \frac{\nu^{(r)} E^{(r)}}{1 - (\nu^{(r)})^2}, \\ Q_{66}^{(r)} = \frac{E^{(r)}}{2(1 + \nu^{(r)})}, \end{cases} \quad (8)$$

Де  $E^{(r)}$  – модулі Юнга відповідних шарів які визначаються за формулами (1), (2).

**Метод розв'язання.** Для знаходження власних частот будемо застосовувати метод Релея-Рітца. Згідно цього методу поставлена проблема зводиться до варіаційної задачі про знаходження мінімуму наступного функціоналу

$$\Pi = U - T, \quad (9)$$

де енергія деформації  $U$ , і кінетична енергія  $T$  в даному випадку визначаються виразами

$$\begin{aligned} U &= \int_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11}^{(0)} + N_{22}\varepsilon_{22}^{(0)} + N_{12}\gamma_{12}^{(0)} + M_{11}\chi_{11} + \\ &+ M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12} + Q_{11}\gamma_{13} + Q_{21}\gamma_{23}) d\Omega \\ T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( I_0 \left( \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 \right) + \right. \\ &+ 2I_1 \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial t} \right) + \\ &\left. + I_2 \left( \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right) \right) d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

величини  $I_0, I_1, I_2$  обчислюються за формулами

$$(I_0, I_1, I_2) = \sum_{r=1}^3 \int_{z_r}^{z_{r+1}} (\rho^{(r)})(1, z, z^2) dz, \quad (11)$$

а густина  $\rho^{(r)}$  за формулами (1), (2).

Для побудови системи координатних функцій будемо використовувати теорію R-функцій [13].

**Числові результати.** Для перевірки запропонованого підходу та створеного програмного забезпечення розв'яжемо тестову задачу про вільні

коливання пористої сендвіч пластини, вільно опертої на границі, при умові, що зовнішні шари виготовлено із суміші  $Al/Al_2O_3$ , а заповнювач – з кераміки. Товщини шарів, та показник об’ємної долі кераміки (градієнтний індекс) змінюються. Механічні властивості ФГМ  $Al/Al_2O_3$  прийняті наступними [4]:  
 $Al: E_m = 70GPa, \nu_m = 0.3, \rho_m = 2707kg/m^3,$   
 $Al_2O_3: E_c = 380GPa, \nu_c = 0.3,$  (12)  
 $\rho_c = 3800kg/m^3.$

Загальна товщина пластини дорівнює  $h/(2a) = 0.1$ , де  $2a$  – довжина сторони квадратної пластинки.

Ця проблема була розв’язана раніше в [4] в рамках спрощеної деформаційної теорії пластин вищого порядку. В таблиці 1 наведено порівняння значень безрозмірних власних частот, отриманих за допомогою RFM, та аналогічних значень, представлених у роботі [4]. Порівняння виконано для двох типів сигмовидного розподілення пористості та для різного відношення товщин шарів. Власні частоти визначаються за формулою

$$\Lambda = \frac{\lambda(2a)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}, \quad (13)$$

де  $E_0 = 1 GPa, \rho_0 = 1 kg/m^3$ .

Таблиця 1 – Порівняння безрозмірних власних частот для вільно опертої S-ФГМ пористої квадратної пластини з відомими результатами [4]

$\alpha$	метод	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
S-ФГМ –I (Рис. 1)					
0	[4]	1.1617	1.3119	1.4155	1.2427
	RFM	1.1588	1.3096	1.4137	1.2401
0.1	[4]	1.1039	1.2595	1.3718	1.1862
	RFM	1.1105	1.2676	1.3792	1.1942
0.2	[4]	1.0315	1.2011	1.3256	1.1208
	RFM	1.0467	1.2173	1.3399	1.1371
S-ФГМ –II (Рис. 2)					
0.1	[4]	1.1615	1.2992	1.4001	1.2340
	RFM	1.1641	1.3029	1.4046	1.2374
0.2	[4]	1.1620	1.2864	1.3859	1.2255
	RFM	1.1699	1.2957	1.3948	1.2343

З таблиці 1 видно добре узгодження отриманих результатів з відомими.

Для ілюстрації запропонованого підходу розглянемо задачу про вільні коливання пористої пластини зі складною геометричною формою, представленою на рис.3.

Геометричні параметри прийнято наступними:

$$\frac{h}{2b} = 0.1; \quad \frac{a}{b} = 2; \quad \frac{a_1}{2b} = 0.4;$$

$$\frac{b_1}{2b} = 0.35; \quad \frac{L}{2b} = 0.15;$$

Будемо розглядати різні види ФГМ, а саме  $Al/Al_2O_3; Si_3N_4/SUS304; ZrO_2/Ti-6Al-4V$ .

Механічні властивості матеріалів визначаються формулою (12) та (14), [19].

$$SUS304: E_m = 207.78 GPa, \rho_m = 8166 kg/m^3,$$

$$Si_3N_4: E_c = 322.27GPa, \rho_c = 2370kg/m^3, \quad (14)$$

$$ZrO_2: E_c = 168.06 GPa, \rho_c = 3000 kg/m^3,$$

$$Ti-6Al-4V: E_m = 105.69 GPa, \rho_c = 4427 kg/m^3.$$

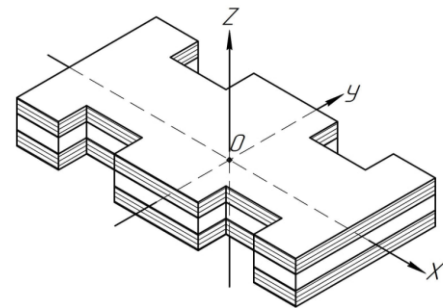
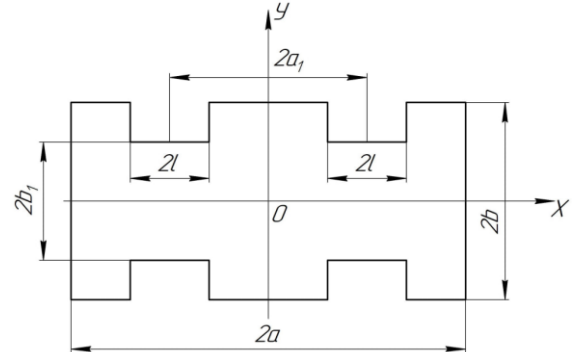


Рис.3

Нехай пластина жорстко закріплена по всьому контуру. Крайові умови в цьому випадку будуть такими:

$$w(x, y) = 0, \quad u(x, y) = 0, \quad v(x, y) = 0,$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \quad \psi_y(x, y) = 0. \quad (15)$$

Згідно теорії R-функцій для побудови системи координатних функцій для функціоналу (9), треба спочатку побудувати структуру розв’язку [13, 17], яка у даному випадку має вигляд

$$w = \omega\Phi_1, \quad u = \omega\Phi_2, \quad v = \omega\Phi_3,$$

$$\psi_x = \omega\Phi_4, \quad \psi_y = \omega\Phi_5. \quad (16)$$

В наведених структурних формулах (16)  $\Phi_i (i = 1,2,3,4,5)$  це невизначені компоненти, які розкладаються в ряд за деякою повною системою функцій (в даній роботі використано степеневі поліноми), функція

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 ((f_3 \wedge_0 f_4) \vee_0 f_5) \quad (18)$$

описує рівняння всієї межі області, та побудована за допомогою теорії R- функцій.

Функції  $f_i(x, y), (i = \overline{1,5})$  визначаються як:

$$f_1 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0, \quad f_2 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \geq 0$$

$$f_3 = \frac{((x - a_1)^2 - l^2)}{2l} \geq 0,$$

$$f_4 = \frac{((x + a_1)^2 - l^2)}{2l} \geq 0,$$

$$f_5 = \frac{(b_1^2 - y^2)}{2b_1} \geq 0.$$

Символи  $\Lambda_0$ , та  $V_0$  відповідають  $R$ -операціям:  $R$ - кон'юнкції та  $R$ -диз'юнкції відповідно [13].

В таблиці 2 представлено значення безрозмірних величин власних частот для сигмовидних сендвіч пластин для різних схем відношення товщини шарів ( $h_f:h_c:h_f$ ), але без наявності пористості в матеріалі ( $\alpha = 0$ ).

Таблиця 2 – Вплив градієнтного індексу  $p$  на значення власних частот ФГ пластини ( $Al/Al_2O_3$ )

$p$	1-0-1	1-1-1	1-2-1	2-1-2
0	2.6765	2.6975	2.7505	2.6809
0.5	2.4112	2.5470	2.6605	2.4806
1	2.2787	2.4772	2.6202	2.3849
2	2.1569	2.4162	2.5857	2.2995
5	2.0621	2.3710	2.5606	2.2351
10	2.0345	2.3584	2.5536	2.2117
20	2.0234	2.3542	2.5513	2.2108

Безрозмірні значення власних частот визначаються за формулою

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1(2b)^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$$

Як видно з таблиці 2, із збільшенням градієнтного індексу  $p$ , значення власних частот зменшуються для розглянутих відношень ( $h_f:h_c:h_f$ ). При цьому найбільші значення частот ми маємо для відношення (1-2-1), коли товщина керамічного заповнювача перебільшує товщини зовнішніх шарів вдвічі.

В таблиці 3 наведені значення власних частот для ФГ ( $Al/Al_2O_3$ ) пористої сендвіч (1-2-1) пластини для двох законів розподілення пористості: рівномірного (S-I) та нерівномірного (S-II). Значення коефіцієнта пористості прийнято рівним:  $\alpha = 0.1$  та  $\alpha = 0.2$ .

Таблиця 3 – Вплив градієнтного індексу  $p$  та коефіцієнту пористості  $\alpha$  на власні значення основної частоти для різних законів розподілення пористості (S-I, S-II, 1-2-1,  $Al_2O_3/Al$ )

$p$	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.1$		$\alpha = 0.2$	
		S-I	S-II	S-I	S-II
0	2.7505	2.7156	2.7438	2.6759	2.7366
0.5	2.6605	2.6184	2.6509	2.5700	2.6407
1	2.6202	2.5746	2.6092	2.5222	2.5975
2	2.5857	2.5371	2.5735	2.4811	2.5606
5	2.5606	2.5097	2.5475	2.4510	2.5336
10	2.5536	2.5022	2.5403	2.4427	2.5261
20	2.5513	2.4996	2.5379	2.4399	2.5237

З таблиці 3 випливає, що наявність пористості зменшує частоти, та при збільшенні коефіцієнта пористості частоти зменшуються, особливо для закону S-I.

На рис.4 показано вплив градієнтного індексу  $p$  на власні частоти для різних ФГМ при фіксованій схемі розташування шарів (1-2-1) та коефіцієнту пористості ( $\alpha = 0.2$ ). Проаналізовано рівномірне (S-I) та нерівномірне (S-II) розподілення пористості. Для всіх матеріалів частоти більш суттєво зменшуються на проміжку  $0 \leq p \leq 5$ . Для  $p > 5$  частоти майже не змінюються. Найбільш суттєво на проміжку  $0 \leq p \leq 5$  частоти змінюються для ФГМ  $Al/Al_2O_3$ .

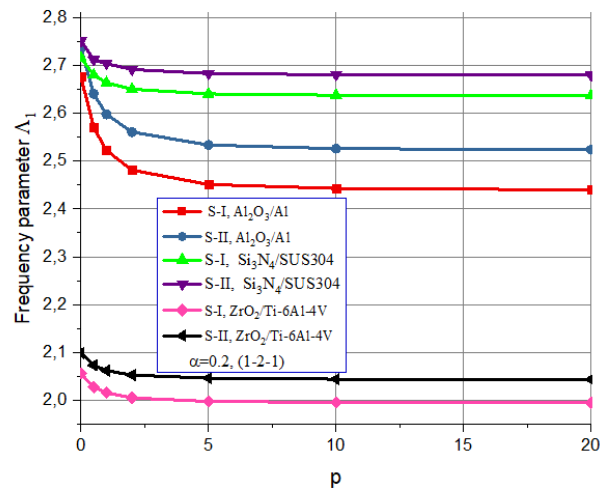


Рис. 4 – Вплив градієнтного індексу на власні частоти ФГ пористих сендвіч пластин.

Дослідження впливу коефіцієнта пористості на поведінку власних частот представлено на рис. 5 (схема відношення товщини шарів (1-2-1)) та рис. 6 (схема відношення товщини шарів (2-1-2)). Треба відзначити, що в обох випадках при збільшенні коефіцієнту пористості для рівномірного розподілення пористості (S-I) частоти зменшуються, причому для випадку (2-1-2) це зменшення більш суттєве.

Поведінка частот при нерівномірному розподіленні пористості (S-II) є різною в залежності від типу ФГМ. Загальним є те, що збільшення коефіцієнту пористості практично не впливає на значення частот, а для матеріалів  $Si_3N_4/SUS304$ ;  $ZrO_2/Ti-6Al-4V$  та схеми (2-1-2) частоти несуттєво, але збільшуються.

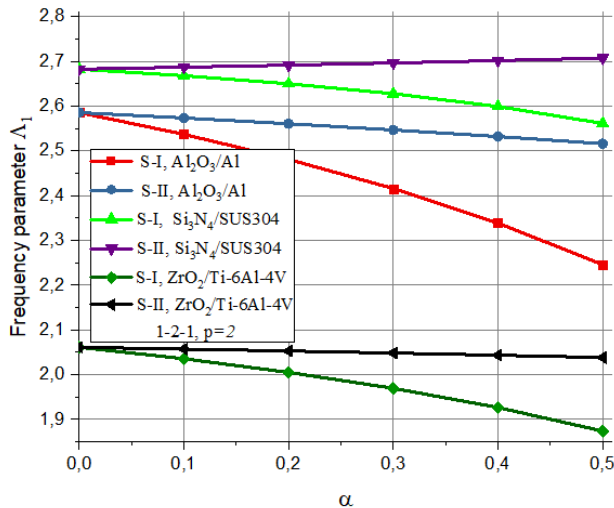


Рис.5 – Вплив коефіцієнту пористості на власні частоти ФГ сендвіч пластин (1-2-1,  $p=2$ )

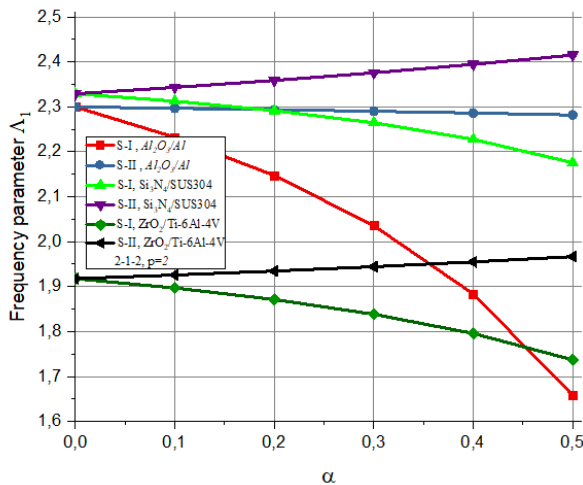


Рис.6 – Вплив коефіцієнту пористості на власні частоти ФГ сендвіч пластин (2-1-2,  $p=2$ )

**Висновки.** В роботі вперше розглянуто застосування теорії R-функцій для дослідження вільних коливань функціонально-градієнтних сендвіч пористих пластин для сигмовидного рівномірного та нерівномірного розподілення пористості. Власні частоти знаходяться за допомогою методу Рейля-Рітца. Використання теорії R-функцій дозволяє досліджувати пластини довільної геометричної форми.

Створене програмне забезпечення реалізує розроблений підхід в рамках деформаційної зсувної теорії першого порядку. Наведені тестові приклади підтверджують вірогідність запропонованого методу та створеного програмного забезпечення.

Детально вивчено динамічну поведінку прямокутної пластини з двома вирізами на паралельних сторонах. Досліджено вплив градієнтного індексу та коефіцієнту пористості на поведінку власних частот. Показано, що при збільшенні градієнтного індексу для різних схем розташування шарів, частоти зменшуються. Відносно впливу коефіцієнта пористості було встановлено, що при

рівномірному розподіленні пористості, власні частоти також зменшуються. При нерівномірному розподіленні пористості загального висновку зробити не можна, оскільки для різних ФГМ поведінка може бути різною.

Створене програмне забезпечення, яке суттєво використовує теорію R-функцій та варіаційні методи, дозволяє проводити широкий обчислювальний експеримент для даного, досить складного, класу задач. В якості подальшого розвитку представленої теми є розробка підходу, який базується на математичних теоріях вищого порядку, які враховують коефіцієнт зсуву та поведінку напружень на поверхнях пластини.

#### Список літератури

1. Vinh P.V. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via new hyperbolic shear deformation theory / P.V. Vinh, L.Q. Huy // Defence Technology. – 2022. – №18. P. 490-508.
2. Shahsavari D. A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation / D. Shahsavari, M. Shahsavari, L. Li [at all] // Aero. Sci. Technol. – 2018. – V.72. P. 134-149.
3. Zenkor A.M. A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities / A.M. Zenkor // Compos. Struct. – 2018. – V. 201. P. 38-48.
4. Daikh A.A. Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory / A.A. Daikh, A.M. Zenkour // Mater. Res. Express. – 2019. – V.6, №11, 115707.
5. Xiang S. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core / S. Xiang, G.-W. Kang, M.-S. Yang [at all] // Compos. Struct. – 2013. – V. 96. P. 226-231.
6. Gupta A. Influence of porosity on the flexural and free vibration responses of functionally graded plates in thermal environment / A. Gupta, M. Talha // Int. J. Struct. Stab. Dyn. – 2017. – V. 18(01), 1850013. <http://dx.doi.org/10.1142/S021945541850013X>.
7. Akbaş, Ş.D. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates / Ş.D. Akbaş // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2017. – V. 3(3). P. 199-207.
8. Wu D. Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis / D. Wu, A. Liu, Y. Huang [at all] // Engineering Structures. – 2018. – V. 165. P. 287-301.
9. Chen D. Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev-Ritz method / D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2019. – V. 19(1). P. 157-170.
10. Rahmani M. Vibration analysis of different types of porous FG circular sandwich plates / M. Rahmani, Y. Mohammadi, F. Kakavand // ADMT Journal. – 2019. – Vol. 12(3) P. 63-75.
11. Zhang Y. Free vibration and damping analysis of porous functionally graded sandwich plates with a viscoelastic core / Y. Zhang, G. Jin, M. Chen [at all] // Composite Structures. – 2020. – Vol. 244, 112298.
12. Hadji L. Free vibration analysis of FG porous sandwich plates under various boundary conditions / L. Hadji, M. Avcar // J. of Appl. and Comp. Mech. – 2021. – Vol.7, №2. P. 505-519.
13. Rvachev V.L. The R-functions theory and its applications / V.L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p. (in Russian).
14. Kurpa L.V. The R-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L.V. Kurpa. – Kharkov: NTU "KhPI", 2009. – 408p. (in Russian).
15. Shmatko T. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations / T. Shmatko, L. Kurpa, J. Awrejcewicz // Acta Mechanica. – 2022. – Vol. 233. P. 1895-1910.
16. Kurpa L. Nonlinear vibration of functionally graded shallow shells resting on elastic foundations / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz // In: Lacarbonara W., Balachandran B., Leamy M.J., Ma J., Tenreiro Machado J.A., Stepan G. (eds) Advances in Nonlinear

Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series. Springer, Cham. Advances in Nonlinear Dynamics. – 2022. P. 385-394.

17. Kurpa L.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the *R*-functions theory and variational methods / L.V. Kurpa, T.V. Shmatko // J. Math. Sci. – 2020. – Vol. 249 (3). P. 496-520.

18. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the *R*-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133-147.

19. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.

#### References (transliterated)

1. Vinh P.V. Finite element analysis of functionally graded sandwich plates with porosity via new hyperbolic shear deformation theory / P.V. Vinh, L.Q. Huy // Defence Technology. – 2022. – №18. P. 490-508.

2. Shahsavari D. A novel quasi-3D hyperbolic theory for free vibration of FG plates with porosities resting on Winkler/Pasternak/Kerr foundation / D. Shahsavari, M. Shahsavari, L. Li [at all] // Aero. Sci. Technol. – 2018. – V.72. P. 134-149.

3. Zenkor A.M. A quasi-3D refined theory for functionally graded single-layered and sandwich plates with porosities / A.M. Zenkor // Compos. Struct. – 2018. – V. 201. P. 38-48.

4. Daikh A.A. Free vibration and buckling of porous power-law and sigmoid functionally graded sandwich plates using a simple higher-order shear deformation theory / A.A. Daikh, A.M. Zenkor // Mater. Res. Express. – 2019. – V.6, №11, 115707.

5. Xiang S. Natural frequencies of sandwich plate with functionally graded face and homogeneous core / S. Xiang, G.-W. Kang, M.-S. Yang [at all] // Compos. Struct. – 2013. – V. 96. P. 226-231.

6. Gupta A. Influence of porosity on the flexural and free vibration responses of functionally graded plates in thermal environment / A. Gupta, M. Talha // Int. J. Struct. Stab. Dyn. – 2017. – V. 18(01), 1850013. <http://dx.doi.org/10.1142/S021945541850013X>.

7. Akbaş, Ş.D. Vibration and static analysis of functionally graded porous plates / Ş.D. Akbaş // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2017. – V. 3(3). P. 199-207.

8. Wu D. Dynamic analysis of functionally graded porous structures through finite element analysis / D. Wu, A. Liu, Y. Huang [at all] // Engineering Structures. – 2018. – V. 165. P. 287-301.

9. Chen D. Buckling and bending analyses of a novel functionally graded porous plate using Chebyshev-Ritz method / D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai // Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2019. – V. 19(1). P. 157-170.

10. Rahmani M. Vibration analysis of different types of porous FG circular sandwich plates / M. Rahmani, Y. Mohammadi, F. Kakavand // ADMT Journal. – 2019. – Vol. 12(3) P. 63-75.

11. Zhang Y. Free vibration and damping analysis of porous functionally graded sandwich plates with a viscoelastic core / Y. Zhang, G. Jin, M. Chen [at all] // Composite Structures. – 2020. – Vol. 244, 112298.

12. Hadji L. Free vibration analysis of FG porous sandwich plates under various boundary conditions / L. Hadji, M. Avcar // J. of Appl. and Comp. Mech. – 2021. – Vol.7, №2. P. 505-519.

13. Rvachev V.L. The *R*-functions theory and its applications / V.L. Rvachev. – Kiev: Nauk.Dumka, 1982. – 552 p. (in Russian).

14. Kurpa L.V. The *R*-functions method for solving linear bending and vibration problems of the shallow shells / L.V. Kurpa. – Kharkov: NTU "KhPI", 2009. – 408p. (in Russian).

15. Shmatko T. Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations / T. Shmatko, L. Kurpa, J. Awrejcewicz // Acta Mechanica. – 2022. – Vol. 233. P. 1895-1910.

16. Kurpa L. Nonlinear vibration of functionally graded shallow shells resting on elastic foundations / L. Kurpa, T. Shmatko, J. Awrejcewicz // In: Lacarbonara W., Balachandran B., Leamy M.J., Ma J., Tenreiro Machado J.A., Stepan G. (eds) Advances in Nonlinear Dynamics. NODYCON Conference Proceedings Series. Springer, Cham. Advances in Nonlinear Dynamics. – 2022. P. 385-394.

17. Kurpa L.V. Investigation of free vibrations and stability of functionally graded three-layer plates by using the *R*-functions theory and variational methods / L.V. Kurpa, T.V. Shmatko // J. Math. Sci. – 2020. – Vol. 249 (3). P. 496-520.

18. Kurpa L. Nonlinear vibration analysis of laminated shallow shells with clamped cutouts by the *R*-functions method / L. Kurpa, G. Timchenko, A. Osetrov [at all] // Journal of Nonlinear Dynamics. – 2018. – Vol. 93(1). P. 133-147.

19. Shen H.-S. Functionally graded materials. Nonlinear analysis of plates and shells / H.-S. Shen. – CRC Press, Florida, 2019. – 280 p.

Надійшла (received) 06.06.2023.

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Курпа Лідія Василівна (Kurpa Lidiya)** – доктор технічних наук, професор каф. прикладної математики НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: [kurpalidia@gmail.com](mailto:kurpalidia@gmail.com). ORCID: 0000-0001-8380-1521.

**Шматко Тетяна Валентинівна (Shmatko Tetyana)** – кандидат технічних наук, доцент каф. вищої математики, НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: [ktv\\_ua@yahoo.com](mailto:ktv_ua@yahoo.com). ORCID: 0000-0003-3386-8343.

**Лінник Ганна Борисівна (Linnik Anna)** – кандидат технічних наук, професор каф. прикладної математики НТУ «ХПІ», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: [linnik2105@gmail.com](mailto:linnik2105@gmail.com). ORCID: 0000-0003-4227-3210

**Морачковська Ірина Олегівна (Morachkovska Iryna)** – кандидат технічних наук, доцент каф. прикладної математики НТУ «ХПІ»; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: [i.morachkovska@gmail.com](mailto:i.morachkovska@gmail.com). ORCID: 0000-0002-4164-4780.

**Тимченко Галина Миколаївна (Timchenko Galina)** – кандидат технічних наук, доцент каф. прикладної математики НТУ «ХПІ»; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: [gntimchenko2000@gmail.com](mailto:gntimchenko2000@gmail.com). ORCID: 0000-0002-7279-7173.