УДК 681.5.033.2, 519.6

DOI: 10.20998/2078-9130.2023.1.277161

Ю. А. ПЛАКСІЙ

АЛГОРИТМІЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ РІВНОВАЖНОГО/УСТАЛЕНОГО ПОЛОЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ КІНЦЕВО-КРОКОВИМ МЕТОДОМ

Розглядається задача алгоритмічного оцінювання рівноважного/усталеного положення динамічної системи на основі мінімальної кількості вимірювань вихідної величини в рівновіддалених моментах часу. Для цього застосований кінцево-кроковий метод, який полягає в формуванні за певними правилами сум і різниць значень вихідної величини, що розташовані симетрично на осі часу відносно деякого моменту, який можна визначити апріорі. В результаті формуються перевизначені системи лінійних рівнянь відносно введених фіктивних невідомих і на основі необхідної умови існування розв'язку цих систем знаходяться формули для визначення рівноважного/усталеного положення динамічної системи. Наведені алгоритми визначення рівноважного/усталеного положення для наступних математичних моделей вихідної величини: у вигляді постійної складової і затухаючої експоненти, у вигляді постійної складової та затухаючої синусоїди, у вигляді постійної складової і двох незатухаючих синусоїд, у вигляді постійної складової, затухаючої складової і незатухаючої синусоїди. Показано, що в умовах відсутності похибок вимірювань вихідної величини похибка оцінювання рівноважного/усталеного положення перехідного процесу залежить тільки від похибки розв'язання системи лінійних рівнянь. Обговорюються шляхи використання надлишкової кількості вимірювань.

Ключові слова: рівноважне положення, усталене положення, динамічна система, математична модель, кінцево-кроковий метод, чисельний алгоритм.

The problem of algorithmic estimation of the equilibrium/stationary state of the dynamic system based on the minimum number of measurements of the output quantity at equidistant time points is considered. For this, a finite-step method was used, which consists in the formation, according to certain rules, of the sums and differences of the values of the output quantity, which are located symmetrically on the time axis relative to a certain moment that can be determined a priori. As a result, overdetermined systems of linear equations are formed with respect to the introduced fictitious unknowns, and based on the necessary condition for the existence of a solution to these systems, formulas are found to determine the equilibrium/stationary position of the dynamic system. Algorithms for determining the equilibrium /stationary state for the following mathematical models of the output value are given: in the form of a constant component and a damped exponent, in the form of a constant component and a damped sinusoid, in the form of a constant component and two undamped sinusoids, in the form of a constant component and a damped sinusoid. It is shown that in the absence of measurement errors of the output value, the error in estimating the equilibrium/stationary state of the transient process depends only on the error in solving the system of linear equations. Ways of using the redundant number of measurements are discussed.

Keywords: equilibrium position, stationary state, dynamic system, mathematical model, finite-step method, numerical algorithm.

Вступ. Задача ідентифікації рівноважного положення динамічних систем представляє значний практичний інтерес [1,2]. В рамках цієї задачі в системах автоматичного управління (САР), орієнтації і навігації рухомих об'єктів актуальним є прискорене визначення рівноважного або усталеного (що встановлюється з плином часу) положення чутливих елементів приладів на основі вимірювань їх вихідних сигналів [3-11] . В роботі [12] для ідентифікації рівноважного положення САР запропонований кінцево-кроковий метод, який оснований на рівновіддалених у часі вимірюваннях вихідного сигналу. В даній роботі розглядається задача прискореного оцінювання рівноважного/усталеного положення перехідного процесу на виході динамічної системи на основі мінімальної кількості вимірювань вихідного сигналу за умов відсутності похибок вимірювань і наводяться відповідні чисельні алгоритми.

1. Математична модель процесу на виході динамічної системи у вигляді постійної складової і затухаючої експоненти. Представимо вихідний процес у вигляді

$$\alpha(t) = R + Ae^{-ht}, \qquad (1)$$

де R, A, h - постійні (наразі невідомі) величини, $h > 0$ (рис.1). Очевидно, що для моделі (1) усталене положення R в загальному випадку встановлюється при $t_\infty \to \infty$. Розглянемо задачу визначення R за кінцевий час $t < t_\infty$ в умовах, коли відсутні похибки отримання значень $\alpha(t_k)$, які будемо називати *вимірюванням*. Введемо додаткові обмеження на моменти вимірювань $\alpha(t_k)$. Припустимо, що вимірювання відбуваються в рівновіддалені моменти часу, тобто $t_k = t_0 + k\Delta t$, $\Delta t = const$.

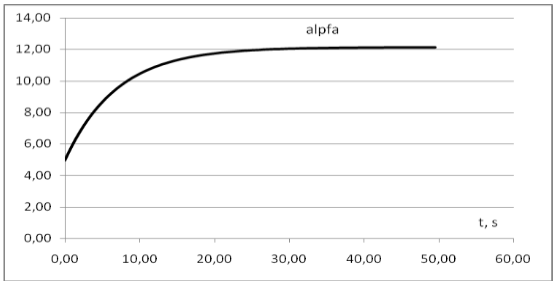

Рис. 1 – типова залежність $\alpha(t)$ для моделі (1)

Введемо такі позначення: $\alpha_{p+k} = \alpha(t_p + k\Delta t)$, $\alpha_{p-k} = \alpha(t_p - k\Delta t)$ і розглянемо суми і різниці вимірювань, які формуються за правилами

$$\delta_k = \alpha_{p+k} + \alpha_{p-k}, \; \eta_k = \alpha_{p+k+1} - \alpha_{p-k-1}, \qquad (2)$$

де t_p - деякий момент часу, $t_p > t_0$, t_0 - початок вимірювань. Не зменшуючи спільності, припустимо, що $t_0 = 0$. Тоді для різниць вимірювань з урахуванням моделі (1) маємо:

$$\eta_k = Ae^{-h(t_p+(k+1)\Delta t)} - Ae^{-h(t_p-(k+1)\Delta t)} =$$
$$Ae^{-ht_p}(e^{-h(k+1)\Delta t} - e^{h(k+1)\Delta t}) = C\sin((k+1)\Delta x, \qquad (3)$$

де $k = 0,1,2,...$ $\Delta x = ih\Delta t$, $i = \sqrt{-1}$, $C = -2Aie^{-ht_p}$.

Задаючи в (3) послідовно $k = 0,1$, отримаємо систему двох рівнянь з одним невідомим C :

$$\begin{cases} \eta_0 = C\sin(\Delta x) \\ \eta_1 = C\sin(2\Delta x) \end{cases},$$

розв’язок якої існує, коли друге рівняння є наслідком першого, тобто коли визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} \eta_0 & \sin(\Delta x) \\ \eta_1 & \sin(2\Delta x) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (4)$$

В умовах, коли $\sin(\Delta x) \neq 0$, шляхом нескладних перетворень приведемо визначник (4) до вигляду

$$D = \begin{vmatrix} 2\eta_0 & 1 \\ \eta_1 & \cos(\Delta x) \end{vmatrix} = 0 ,$$

звідки отримуємо, що

$$\cos(\Delta x) = \frac{\eta_1}{2\eta_0} . \qquad (5)$$

Для сум вимірювань маємо:

$$\delta_k = \alpha_{p+k} + \alpha_{p-k} = 2R + A(e^{-h(t_p + k\Delta t)} + e^{-h(t_p - k\Delta t)}) =$$
$$= 2R + Ae^{-ht_p}(e^{-kh\Delta t} + e^{kh\Delta t}) = 2R + B\cos(k\Delta x) , \qquad (6)$$

де позначено $B = 2Ae^{-ht_p}$. Задаючи в (6) послідовно $k = 0$ і $k = 1$, отримаємо систему двох рівнянь з одним невідомим B :

$$\begin{cases} \delta_0 = 2R + B \\ \delta_1 = 2R + B\cos(\Delta x) \end{cases},$$

розв’язок якої існує, коли визначник системи

$$D_1 = \begin{vmatrix} \delta_0 - 2R & 1 \\ \delta_1 - 2R & \cos(\Delta x) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (7)$$

Оскільки невідоме B використовується тільки для отримання умови (7) і не підлягає визначенню, будемо називати його фіктивним. Розкриємо визначник D_1 по елементах першого стовпчика з урахуванням позначення (5), отримаємо рівняння $(\delta_0 - 2R)\dfrac{\eta_1}{2\eta_0} - (\delta_1 - 2R) = 0$, звідки

$$R = \frac{2\eta_0\delta_1 - \eta_1\delta_0}{2(2\eta_0 - \eta_1)} . \qquad (8)$$

Таким чином для визначення R за формулою (8) попередньо треба обчислити суми і різниці $\delta_0 = 2\alpha_p$, $\delta_1 = \alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}$, $\eta_0 = \alpha_{p+1} - \alpha_{p-1}$, $\eta_1 = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}$. Припускаючи, що вимірювання α_{p-2}, індекс якого є найменшим, відбувається в початковий момент часу t_0, тобто $\alpha_{p-2} = \alpha_0$, отримаємо, що $p = 2$, отже в формулі (8) присутні всього 5 вимірювань вихідної величини $\alpha(t)$. Зауважимо, що формула (8) не містить величини Δt, це означає, що процес отримання оцінки усталеного положення може бути оптимізованим за часом.

2. Математична модель вихідного сигналу динамічної системи у вигляді постійної складової та затухаючої синусоїди. Нехай на виході динамічної системи спостерігається перехідний процес:

$$\alpha(t) = R + Ae^{-ht}\sin(\omega t + \psi) , \qquad (9)$$

де R, A, h, ω, ψ - постійні (невідомі) величини, $h > 0$ (рис.2).

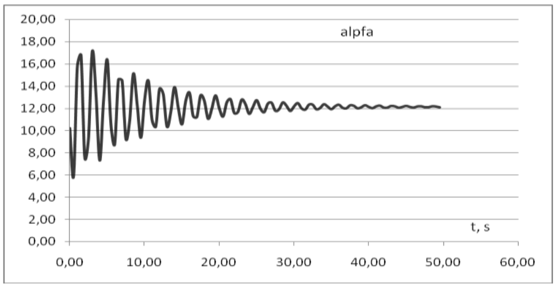

Рис. 2 – типовий вигляд залежності $\alpha(t)$ для моделі (9)

Необхідно визначити усталене положення системи R за мінімальну кількість вимірювань вихідної величини $\alpha(t)$ за умови відсутності похибок вимірювань.

Сформуємо з вимірювань $\alpha_k = \alpha(t_k)$, $k = 0,1,2,...$, $t_k = t_0 + k\Delta t$ суми і різниці за правилами:

$$\delta_{k0} = \alpha_{p+k} + \alpha_{p-k} , \ \eta_{k0} = \alpha_{p+k} - \alpha_{p-k} . \qquad (10)$$

Для різниць з урахуванням моделі вихідного сигналу (9) отримаємо:

$$\eta_{k0} = \alpha_{p+k} - \alpha_{p-k} = Ae^{-h(t_p + k\Delta t)}\sin(\omega(t_p + k\Delta t) + \psi) -$$
$$- Ae^{-h(t_p - k\Delta t)}\sin(\omega(t_p - k\Delta t) + \psi) . \qquad (11)$$

Представимо (11) у вигляді:

$$\eta_{k0} = \frac{A}{2i}e^{-ht_p}(e^{i(\omega t_p + \psi)}(e^{k\Delta t(-h+i\omega)} - e^{k\Delta t(h+i\omega)}) -$$
$$e^{-ht_p}(e^{i(\omega t_p + \psi)}(e^{k\Delta t(-h+i\omega)} - e^{k\Delta t(h+i\omega)})) =$$
$$= Ae^{-ht_p}(e^{i(\omega t_p + \psi)}\sin(k\Delta t(\omega + ih) -$$
$$e^{-i(\omega t_p + \psi)}\sin(k\Delta t(-\omega + ih)). \qquad (12)$$

Введемо позначення

$$C_1 = Ae^{-ht_p}e^{i(\omega t_p + \psi)} , \ C_2 = -Ae^{-ht_p}e^{-i(\omega t_p + \psi)} ,$$
$$\Delta x_1 = \Delta t(\omega + ih) , \ \Delta x_2 = \Delta t(-\omega + ih) .$$

Тоді (12) набуває вигляду:

$$\eta_{k0} = C_1\sin(k\Delta x_1) + C_2\sin(k\Delta x_2) . \qquad (13)$$

Запишемо на основі (13) для відшукання фіктивних невідомих C_1 і C_2 перевизначену систему рівнянь:

$$\begin{cases} \eta_{10} = C_1\sin(\Delta x_1) + C_2\sin(\Delta x_2) \\ \eta_{20} = C_1\sin(2\Delta x_1) + C_2\sin(2\Delta x_2) \\ \eta_{30} = C_1\sin(3\Delta x_1) + C_2\sin(3\Delta x_2). \end{cases}$$

Умовою існування єдиного розв’язку цієї системи є рівність її визначника D_1 нулю:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \eta_{10} & \sin(\Delta x_1) & \sin(\Delta x_2) \\ \eta_{20} & \sin(2\Delta x_1) & \sin(2\Delta x_2) \\ \eta_{30} & \sin(3\Delta x_1) & \sin(3\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0 . \qquad (14)$$

Після елементарних перетворень за умови $\sin(\Delta x_i) \neq 0$ приведемо визначник (14) до вигляду

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4\eta_{10} & 1 & 1 \\ 2\eta_{20} & \cos(\Delta x_1) & \cos(\Delta x_2) \\ \eta_{10}+\eta_{30} & \cos^2(\Delta x_1) & \cos^2(\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0 .$$

Введемо позначення

$$y_1 = \cos(\Delta x_1)\,,\ y_2 = \cos(\Delta x_2) \qquad (15)$$

і перепишемо визначник D_1 у вигляді:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4\eta_{10} & 1 & 1 \\ 2\eta_{20} & y_1 & y_2 \\ \eta_{10}+\eta_{30} & y_1^2 & y_2^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриємо цей визначник по елементам першого стовпчика, маємо в результаті:

$$4\eta_{10}y_1y_2 + 2\eta_{20}(y_1+y_2) + (\eta_{10}+\eta_{30}) = 0 .$$

Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$4\eta_{10}z_1 + 2\eta_{20}z_2 + (\eta_{10}+\eta_{30}) = 0\,, \qquad (16)$$

де позначено

$$z_1 = y_1y_2\,,\ z_2 = -(y_1+y_2)\,. \qquad (17)$$

Для знаходження ще одного рівняння відносно невідомих z_1 і z_2 розглянемо різниці вимірювань, які обчислюються за правилом

$$\eta_{k1} = \alpha_{p+k+1} - \alpha_{p-k-1}\,,\ k = 1,2,... \qquad (18)$$

Виконуючи операції, аналогічні проведеним вище у випадку різниць вимірювань η_{k0}, отримаємо ще одне рівняння відносно z_1 і z_2, що за структурою подібне до рівняння (18):

$$4\eta_{11}z_1 - 2\eta_{21}z_2 + (\eta_{11}+\eta_{31}) = 0\,. \qquad (19)$$

Отже, з системи рівнянь (16), (19) тепер можна визначити невідомі z_1 і z_2.

Розглянемо далі суми вимірювань δ_{k0} і представимо їх з урахуванням моделі (9) у вигляді:

$$\delta_{k0} = 2R + Ae^{-h(t_p+k\Delta t)}\sin(\omega(t_p+k\Delta t)+\psi) +$$
$$+ Ae^{-h(t_p-k\Delta t)}\sin(\omega(t_p-k\Delta t)+\psi)\,.$$

Після елементарних перетворень отримаємо:

$$\delta_{k0} = 2R + \frac{A}{i}e^{-ht_p}e^{i(\omega t_p+\psi)}\cos(k\Delta x_1) - ,$$
$$-\frac{A}{i}e^{-ht_p}e^{-i(\omega t_p+\psi)}\cos(k\Delta x_2)\,,\ k = 0,1,2,... \qquad (20)$$

Введемо позначення $B_1 = \frac{A}{i}e^{-ht_p}e^{i(\omega t_p+\psi)}$, $B_2 = -\frac{A}{i}e^{-ht_p}e^{-i(\omega t_p+\psi)}$ і представимо рівняння (20) у вигляді:

$$\delta_{k0} = 2R + \sum_{i=1}^{2} B_i\cos(k\Delta x_i)\,,\ k = 0,1,2,... \qquad (21)$$

Для визначення фіктивних невідомих B_1 і B_2 запишемо перевизначену систему, покладаючи в (21) послідовно $k = 0,1,2$:

$$\begin{cases} \delta_{00} = 2R + B_1 + B_2 \\ \delta_{10} = 2R + B_1\cos(\Delta x_1) + B_2\cos(\Delta x_2) \\ \delta_{20} = 2R + B_1\cos(2\Delta x_1) + B_2\cos(2\Delta x_2) \end{cases},$$

для якої умова існування єдиного розв'язку набуває вигляду:

$$D_2 = \begin{vmatrix} \delta_{00}-2R & 1 & 1 \\ \delta_{20}-2R & \cos(\Delta x_1) & \cos(\Delta x_2) \\ \delta_{30}-2R & \cos(2\Delta x_1) & \cos(2\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (22)$$

Шляхом елементарних перетворень отримаємо з урахуванням (15):

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\delta_{00}-4R & 1 & 1 \\ 2\delta_{10}-4R & y_1 & y_2 \\ \delta_{00}+\delta_{20}-4R & y_1^2 & y_2^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Розкриваючи цей визначник по елементам першого стовпчика і враховуючи позначення (17), будемо мати рівняння відносно невідомого R:

$$(2\delta_{00}-4R)z_1 + (2\delta_{10}-4R)z_2 + (\delta_{00}+\delta_{20}-4R) = 0\,, \qquad (23)$$

звідкіля остаточно отримаємо:

$$R = \frac{2\delta_{00}z_1 + 2\delta_{10}z_2 + (\delta_{00}+\delta_{20})}{4(1+z_1+z_2)}\,. \qquad (24)$$

Визначимо момент часу t_p в формулах (10), для цього запишемо суми і різниці вимірювань, які присутні в формулах (16), (19), (24). Маємо:

$\delta_{00} = 2\alpha_p$, $\delta_{10} = \alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}$, $\delta_{20} = \alpha_{p+2} + \alpha_{p-2}$,

$\eta_{10} = \alpha_{p+1} - \alpha_{p-1}$, $\eta_{20} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}$,

$\eta_{30} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}$, $\eta_{11} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}$,

$\eta_{21} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}$, $\eta_{31} = \alpha_{p+4} - \alpha_{p-4}$.

Враховуючи, що $\alpha_{p-4} = \alpha_0$, отримаємо, що $p = 4$. Оскільки тоді $\alpha_{p+4} = \alpha_8$, то для визначення R потрібно мінімум 9 вимірювань вихідної величини (9).

Алгоритм визначення усталеного положення для випадку моделі перехідного процесу (9) можна представити в наступній послідовності операцій:

1. Задати крок вимірювань Δt.
2. Отримати вимірювання α_k, $k = \overline{0,8}$.
3. Сформувати суми і різниці вимірювань
$\delta_{00} = 2\alpha_4$, $\delta_{10} = \alpha_5 + \alpha_3$, $\delta_{20} = \alpha_6 + \alpha_2$,
$\eta_{10} = \alpha_5 - \alpha_3$, $\eta_{20} = \alpha_6 - \alpha_2$, $\eta_{30} = \alpha_7 - \alpha_1$,
$\eta_{11} = \alpha_6 - \alpha_2$, $\eta_{21} = \alpha_7 - \alpha_1$, $\eta_{31} = \alpha_8 - \alpha_0$.
4. Розв'язати систему рівнянь (16), (19), знайти z_1, z_2.
5. Визначити R за формулою (24).

Формула (24) не містить величини Δt, отже процес отримання оцінки усталеного положення R для випадку моделі (9) також може бути оптимізованим за часом.

3. Математична модель процесу на виході динамічної системи у вигляді постійної і двох незатухаючих синусоїд. На виході динамічної системи спостерігається процес:

$$\alpha(t) = R + \sum_{i=1}^{2} A_i\sin(\omega_i t + \psi_i)\,, \qquad (25)$$

де R, A_i, ω_i, ψ_i, $(i = 1,2)$ - постійні (невідомі) величини (рис.3).

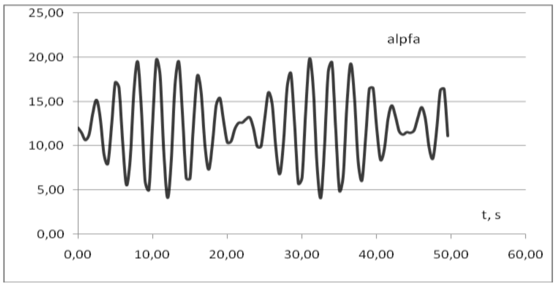

Рис. 3 – типова залежність $\alpha(t)$ для моделі (25)

Необхідно визначити рівноважне положення R на основі мінімальної кількості вимірювань вихідної величини $\alpha(t)$ в умовах, коли похибки вимірювань відсутні, а самі вимірювання відбуваються через однаковий проміжок часу Δt, починаючи з $t_0 = 0$. Для цього сформуємо з вимірів суми і різниці:

$$\delta_{k0} = \alpha_{p+k} + \alpha_{p-k}, \ \eta_{k0} = \alpha_{p+k+1} - \alpha_{p-k-1}. \quad (26)$$

Для різниць η_{k0} з урахуванням моделі (25) маємо:

$$\eta_{k0} = \sum_{i=1}^{2} A_i (\sin(\omega_i (t_p + (k+1)\Delta t) + \psi_i) -$$
$$-\sin(\omega_i (t_p - (k+1)\Delta t) + \psi_i) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{2} A_i \sin(\omega_i ((k+1)\Delta t) \cos(\omega_i t_p + \psi_i). \quad (27)$$

Введемо позначення:

$$C_{i0} = 2A_i \cos(\omega_i t_p + \psi_i), \ \Delta x_i = \omega_i \Delta t, \ i = 1,2. \quad (28)$$

Тоді з (27) маємо:

$$\eta_{k0} = \sum_{i=1}^{2} C_{i0} \sin((k+1)\Delta x_i), \quad k = 0,1,2,... \quad (29)$$

Як і раніше, запишемо для фіктивних невідомих C_{10}, C_{20} перевизначену систему:

$$\begin{cases} \eta_{00} = C_{10} \sin(\Delta x_1) + C_{20} \sin(\Delta x_2) \\ \eta_{10} = C_{10} \sin(2\Delta x_1) + C_{20} \sin(2\Delta x_2) \\ \eta_{20} = C_{10} \sin(3\Delta x_1) + C_{20} \sin(3\Delta x_2) \end{cases}.$$

Умова існування єдиного розв'язку цієї системи відносно невідомих C_{10}, C_{20} має вигляд:

$$D_3 = \begin{vmatrix} \eta_{00} & \sin(\Delta x_1) & \sin(\Delta x_2) \\ \eta_{10} & \sin(2\Delta x_1) & \sin(2\Delta x_2) \\ \eta_{20} & \sin(3\Delta x_1) & \sin(3\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0. \quad (30)$$

Після нескладних перетворень визначник D_3 можна представити у вигляді:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 4\eta_{00} & 1 & 1 \\ 2\eta_{10} & y_1 & y_2 \\ \eta_{00} + \eta_{20} & y_1^2 & y_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

де позначено $y_1 = \cos(\Delta x_1)$, $y_2 = \cos(\Delta x_2), (y_1 \neq y_2)$. Розкриваючи визначник D_3 по елементам першого стовпчика, отримаємо рівняння

$$4\eta_{00} z_1 + 2\eta_{10} z_2 + (\eta_{00} + \eta_{20}) = 0 \quad (31)$$

з невідомими $z_1 = y_1 y_2$, $z_2 = -(y_1 + y_2)$. Далі введемо в розгляд різниці вимірювань η_{k1}, що формуються за правилом

$$\eta_{k1} = \alpha_{p+k+2} - \alpha_{p-k-2}, \qquad k = 0,1,2,..., \quad (32)$$

і отримаємо друге рівняння для визначення z_1 і z_2:

$$4\eta_{01} z_1 + 2\eta_{11} z_2 + (\eta_{01} + \eta_{21}) = 0. \quad (33)$$

Таким чином для знаходження невідомих z_1 і z_2 маємо систему двох лінійних рівнянь (31), (33).

Для сум вимірювань δ_{k0} з урахуванням (26) і моделі (25) будемо мати:

$$\delta_{k0} = 2R + \sum_{i=1}^{2} A_i (\sin(\omega_i (t_p + k\Delta t) + \psi_i) +$$
$$+\sin(\omega_i (t_p - k\Delta t) + \psi_i)) =$$
$$= 2R + 2\sum_{i=1}^{2} A_i \sin(\omega_i t_p + \psi_i) \cos(\omega_i k\Delta t), \ (k = 0,1,2,...).$$

Позначимо $B_{i0} = 2A_i \sin(\omega_i t_p + \psi_i)$, $(i = 1,2)$, тоді з урахуванням (25) маємо:

$$\delta_{k0} = 2R + \sum_{i=1}^{2} B_{i0} \cos(k\Delta x_i), \ (k = 0,1,2,...). \quad (34)$$

Необхідна умова існування розв'язку системи (34) з фіктивними невідомими B_{10} і B_{20} має вигляд:

$$D_4 = \begin{vmatrix} \delta_{00} - 2R & 1 & 1 \\ \delta_{20} - 2R & \cos(\Delta x_1) & \cos(\Delta x_2) \\ \delta_{30} - 2R & \cos(2\Delta x_1) & \cos(2\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Після нескладних перетворень приведемо визначник D_4 до вигляду:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2\delta_{00} - 4R & 1 & 1 \\ 2\delta_{10} - 4R & y_1 & y_2 \\ \delta_{00} + \delta_{20} - 4R & y_1^2 & y_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

і отримаємо рівняння для визначення рівноважного положення R:

$$(2\delta_{00} - 4R) z_1 + (2\delta_{10} - 4R) z_2 + (\delta_{00} + \delta_{20} - 4R) = 0,$$

де позначено $z_1 = y_1 y_2$, $z_2 = -(y_1 + y_2)$. Остаточно для рівноважного положення R маємо:

$$R = \frac{2\delta_{00} z_1 + 2\delta_{10} z_2 + (\delta_{00} + \delta_{20})}{4(1 + z_1 + z_2)}. \quad (35)$$

Визначимо момент часу t_p для цього випадку математичної моделі, для цього запишемо суми і різниці вимірювань, які присутні в формулах (26), (32). Маємо:

$\delta_{00} = 2\alpha_p$, $\delta_{10} = \alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}$, $\delta_{20} = \alpha_{p+2} + \alpha_{p-2}$,

$\eta_{00} = \alpha_{p+1} - \alpha_{p-1}$, $\eta_{10} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}$,

$\eta_{20} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}$, $\eta_{01} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}$,

$\eta_{11} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}$, $\eta_{21} = \alpha_{p+4} - \alpha_{p-4}$.

Отже $\alpha_{p-4} = \alpha_0$, тобто $p = 4$. Оскільки $\alpha_{p+4} = \alpha_8$, то для визначення R потрібно мінімум 9 вимірювань вихідної величини (25).

Алгоритм визначення рівноважного положення системи для випадку моделі (25) можна представити в наступній послідовності операцій:

1. Задати крок вимірювань Δt.
2. Отримати вимірювання α_k, $k = \overline{0,8}$.
3. Сформувати суми і різниці вимірювань

$$\delta_{00} = 2\alpha_4\,,\ \ \delta_{10} = \alpha_5 + \alpha_3\,,\ \delta_{20} = \alpha_6 + \alpha_2\,,$$

$$\eta_{00} = \alpha_5 - \alpha_3\,,\ \eta_{10} = \alpha_6 - \alpha_2\,,\ \eta_{20} = \alpha_7 - \alpha_1\,,$$

$$\eta_{01} = \alpha_6 - \alpha_2\,,\ \ \eta_{11} = \alpha_7 - \alpha_1\,,\ \eta_{21} = \alpha_8 - \alpha_0\,.$$

4. Розв'язати систему рівнянь (31), (33), знайти z_1, z_2.

5. Визначити R за формулою (35).

4. Математична модель процесу на виході динамічної системи у вигляді постійної, затухаючого сигналу і синусоїди. На виході динамічної системи спостерігається процес:

$$\alpha(t) = R + A_1 e^{-ht} + A_2 \sin(\omega t + \psi)\,, \qquad (36)$$

де R, A_1, A_2, ω, ψ - постійні (невідомі) величини (рис.4). Необхідно визначити рівноважне положення R, яке встановлюється з часом, використовуючи мінімальну кількість вимірювань $\alpha_k = \alpha(t_k)$, $k = 0,1,2,...$, $t_k = t_0 + k\Delta t$, де $t_0 = 0$, $\Delta t = const$.

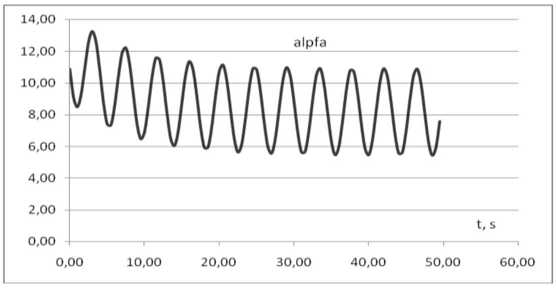

Рис. 4 – типовий вигляд залежності $\alpha(t)$ для моделі (36)

Спочатку з вихідних величин сформуємо суми і різниці за правилами:

$$\delta_{k0} = \alpha_{p+k} + \alpha_{p-k}\,,\ \eta_{k0} = \alpha_{p+k+1} - \alpha_{p-k-1}\,. \ (37)$$

Для різниць з урахуванням моделі (36) маємо:

$$\eta_{k0} = A_1(e^{-h(t_p+(k+1)\Delta t)} - e^{-h(t_p-(k+1)\Delta t)}) +$$
$$+A_2(\sin(\omega(t_p + (k+1)\Delta t) + \psi) -$$
$$-\sin(\omega(t_p - (k+1)\Delta t) + \psi)) = 2A_1 i e^{-ht_p} \sin((k+1)\Delta x_1) +$$
$$+2A_2 \cos(\omega t_p + \psi)\sin((k+1)\Delta x_2)\,,\ k = 0,1,2,...,$$

де $\Delta x_1 = ih\Delta t$, $\Delta x_2 = \omega \Delta t$, $i = \sqrt{-1}$.

Позначимо $C_{10} = 2A_1 i e^{-ht_p}$, $C_{20} = 2A_2 \cos(\omega t_p + \psi)$, тоді для різниць η_{k0} маємо:

$$\eta_{k0} = C_{10}\sin((k+1)\Delta x_1 + C_{20}\sin((k+1)\Delta x_2\,,$$
$$k = 0,1,2,.... \qquad (38)$$

Розглядаючи (38) як систему рівнянь відносно C_{10}, C_{20}, запишемо необхідну умову існування розв'язку в умовах мінімальної кількості вимірювань, яка має вигляд (30):

$$D_3 = \begin{vmatrix} \eta_{00} & \sin(\Delta x_1) & \sin(\Delta x_2) \\ \eta_{10} & \sin(2\Delta x_1) & \sin(2\Delta x_2) \\ \eta_{20} & \sin(3\Delta x_1) & \sin(3\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Як було показано раніше, ця умова призводить до рівняння відносно невідомих z_1, z_2:

$$4\eta_{00}z_1 + 2\eta_{10}z_2 + (\eta_{00} + \eta_{20}) = 0\,, \qquad (39)$$

де $z_1 = y_1 y_2$, $z_2 = -(y_1 + y_2)$, $y_1 = \cos(\Delta x_1)$, $y_2 = \cos(\Delta x_2)$.

Друге рівняння для визначення невідомих z_1, z_2 отримаємо у вигляді

$$4\eta_{01}z_1 + 2\eta_{11}z_2 + (\eta_{01} + \eta_{21}) = 0\,, \qquad (40)$$

де різниці η_{k1} задаються формулою:

$$\eta_{k1} = \alpha_{p+k+2} - \alpha_{p-k-2}\,,\ k = 0,1,2,... \quad (41)$$

Для сум вимірювань (37) маємо:

$$\delta_{k0} = 2R + A_1(e^{-h(t_p+k\Delta t)} - e^{-h(t_p-k\Delta t)}) +$$
$$+A_2(\sin(\omega_i(t_p + k\Delta t) + \psi_i) - \sin(\omega_i(t_p - k\Delta t) + \psi_i)) =$$
$$= 2R + 2A_1 e^{-ht_p}\cos(k\Delta x_1) + 2A_2\sin(\omega t_p + \psi_i)\cos(k\Delta x_2)$$
$$k = 0,1,2,...$$

Позначимо $B_{10} = 2A_1 e^{-ht_p}$, $B_{20} = 2A_2\sin(\omega t_p + \psi)$, тоді маємо для $k = 0,1,2,...$:

$$\delta_{k0} = 2R + B_{10}\cos(k\Delta x_1) + B_{20}\cos(k\Delta x_2)\,. \qquad (42)$$

Розглядаючи (42) як систему рівнянь відносно фіктивних невідомих B_{10}, B_{20}, запишемо необхідну умову існування розв'язку в умовах мінімальної кількості вимірювань, що має вигляд:

$$D_5 = \begin{vmatrix} \delta_{00} - 2R & 1 & 1 \\ \delta_{20} - 2R & \cos(\Delta x_1) & \cos(\Delta x_2) \\ \delta_{30} - 2R & \cos(2\Delta x_1) & \cos(2\Delta x_2) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Як було показано раніше, ця умова дає формулу для визначення усталеного положення системи у вигляді:

$$R = \frac{2\delta_{00}z_1 + 2\delta_{10}z_2 + (\delta_{00} + \delta_{20})}{4(1 + z_1 + z_2)}\,. \qquad (43)$$

Визначимо момент часу t_p для випадку моделі (36), для цього запишемо суми і різниці вимірювань, які присутні в формулах (40), (41), (43). Маємо:

$$\delta_{00} = 2\alpha_p\,,\ \ \delta_{10} = \alpha_{p+1} + \alpha_{p-1}\,,$$
$$\delta_{20} = \alpha_{p+2} + \alpha_{p-2}\,,\ \eta_{00} = \alpha_{p+1} - \alpha_{p-1}\,,$$
$$\eta_{10} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}\,,\ \eta_{20} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}\,,$$
$$\eta_{01} = \alpha_{p+2} - \alpha_{p-2}\,,\ \eta_{11} = \alpha_{p+3} - \alpha_{p-3}\,,$$
$$\eta_{21} = \alpha_{p+4} - \alpha_{p-4}\,.$$

Тоді $\alpha_{p-4} = \alpha_0$, тобто $p = 4$. Отже, $\alpha_{p+4} = \alpha_8$, і для визначення R потрібно мінімум 9 вимірювань вихідної величини (36).

Представимо алгоритм визначення рівноважного положення для випадку моделі перехідного процесу (36) в наступній послідовності операцій:

1. Задати крок вимірювань Δt.

2. Отримати вимірювання α_k, $k = \overline{0,8}$.

3. Сформувати суми і різниці вимірювань

$$\delta_{00} = 2\alpha_4\,,\ \ \delta_{10} = \alpha_5 + \alpha_3\,,\ \delta_{20} = \alpha_6 + \alpha_2\,,$$
$$\eta_{00} = \alpha_5 - \alpha_3\,,\ \eta_{10} = \alpha_6 - \alpha_2\,,\ \eta_{20} = \alpha_7 - \alpha_1\,,$$
$$\eta_{01} = \alpha_6 - \alpha_2\,,\ \eta_{11} = \alpha_7 - \alpha_1\,,\ \eta_{21} = \alpha_8 - \alpha_0\,.$$

4. Розв'язати систему рівнянь (40), (41), знайти z_1, z_2.

5. Визначити R за формулою (43).

Висновки. Для чотирьох математичних моделей процесу, що спостерігається на виході динамічної системи, розглянута задача алгоритмічного оцінювання рівноважного/усталеного положення. динамічної системи. Показано, що у разі відсутності похибок вимірювань результат може бути отриманий на основі мінімальної кількості вимірювань вихідної величини в рівновіддалені моменти часу. На відміну від результатів, отриманих в [12], представлені робочі формули визначення рівноважного/усталеного положення не містять величини інтервалу часу між моментами вимірювань, отже в подальшому дослідженні може бути поставлена задача мінімізації цього інтервалу з урахуванням частотних характеристик вихідного сигналу. В умовах наявності похибок вимірювань вихідної величини удосконалення алгоритма вбачається в використанні надлишкових вимірювань з метою формування додаткових лінійних алгебраїчних рівнянь і подальшого застосування методу найменших квадратів.

Список літератури

1. *Cătălin Alexandru*. Analytical Method for Determining the Static Equilibrium Position of the Rear Axles Guiding Mechanisms of the Motor Vehicles. Applied mechanics and materials. V.841. 2016. P.59 - 64.

2. *Kobata, T. and Olson, D.* (2005), Accurate Determination of Equilibrium State Between Two Pressure Balances Using a Pressure Transducer, Metrologia. 2005. Vol. 42 (6). DOI:10.1088/0026-1394/42/6/S19

3. *Мураховский С.А., Лазарев Ю.Ф., Мироненко П.С.* Динамика наземного компенсационного маятникового гирокомпаса. Вісник Інженерної академії України. 2010. №2. С.125-130.

4. *Мироненко П.С., Мураховський С. А., Сапегін О. М., Боярчук А. О.* Оцінювання параметрів руху чутливого елементу гіротеодоліту з використанням фільтра Калмана. Вісник Інженерної академії України. 2017. №4. С. 129–133.

5. *Мироненко П.С., Демьяненко В.В., Демьяненко Т.В.* Модель погрешности осевого микромеханического акселерометра в условиях вибрации. Вісник НТУУ “ КПІ”: Серія Приладобудування . 2014. № 47. С. 39–43.

6. *Honglun Xu*. An Efficient Method For Online Identification Of Steady State For Multivariate System (2018). Open Access *Theses & Dissertations*. DOI:10.1115/MSEC2018-6565.

7. *Боярчук А. О., Мироненко П.С., Мураховський С.А., Іваненко Р.О.* Астатичний ідентифікатор в системі керування чутливим елементом гіротеодоліта. Вісник КПІ: Серія Приладобудування. Вип.61 (1). 2021. С.13-19.

8. *Юр’єв Ю.Ю.* Сучасні гіроскопічні засоби азимутального орієнтування. VI Міжнар.наук.-техн. конф. Приладобудування: стан і перспективи. Київ. 2007. С. 24-25.

9. *Мураховский С.С., Лазарев Ю. Ф., Мироненко П. С.* Динамика наземного компенсационного маятникового гирокомпаса. Вісник Інженерної академії України. 2010. № 2.С. 125-130.

10. *БоярчукА.О., Мироненко П.С., Мураховский С.А.* Система керування гіротеодолітом, яка забезпечує інваріантність вихідного сигналу щодо вібраційних прискорень основи. Вісник Інженерної академії України. 2020. № 1. С. 52-57.

11. *Spielvogel Andrew R., Whitcomb Louis L* A stable adaptive attitude estimator on SO(3) for true-North seeking gyrocompass systems: Theory and preliminary simulation evaluation.. Proc. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation. May 29 -June 3 2017. P. 3231 – 3236.

12. *Никульченко А. Г., Шипулина Л. В.* Конечно-шаговый метод идентификации равновесного положения САР. Вестник Харьковского политехн. ин-та. Сб. науч. тр. Харьков : Вища шк. 1980. Вып. 2, № 163 : Прикладная механика и процессы управления. С. 18-22.

References (transliterated)

1. *Cătălin Alexandru*. Analytical Method for Determining the Static Equilibrium Position of the Rear Axles Guiding Mechanisms of the Motor Vehicles. Applied mechanics and materials. V.841.– 2016.– P.59 - 64.

2. *Kobata, T. and Olson, D.* (2005), Accurate Determination of Equilibrium State Between Two Pressure Balances Using a Pressure Transducer, Metrologia. 2005. Vol. 42 (6). DOI:10.1088/0026-1394/42/6/S19

3. *Murahovskiy S.A., Lazarev Yu.F., Mironenko P.S.* Dinamika nazemnogo kompensatsionnogo mayatnikovogo girokompasa. [Dynamics of ground compensatory pendulum gyrocompass]. Visnik Inzhenernoyi akademiyi Ukrayini. 2010. №2. P.125-130.

4. *Mironenko P.S., Murahovskiy S. A., Sapegin O. M., Boyarchuk A. O.* Otsinyuvannya parametrIv ruhu chutlivogo elementu gIroteodolitu z vikoristannyam filtra Kalmana. [Estimation of motion parameters of the gyrotheodolite sensitive element using the Kalman filter]. Visnik Inzhenernoyi akademiyi Ukrayini. 2017. №4. P.129–133.

5. *Mironenko P.S., Demyanenko V.V., Demyanenko T.V.* Model pogreshnosti osevogo mikromehanicheskogo akselerometra v usloviyah vibratsii.[Error model of an axial micromechanical accelerometer under vibration conditions]. Visnik NTUU “ KPI”: Seriya Priladobuduvannya . 2014. № 47. P.39–43.

6. *Honglun Xu*. An Efficient Method For Online Identification Of Steady State For Multivariate System (2018). Open Access *Theses & Dissertations*. DOI:10.1115/MSEC2018-6565.

7. *Boyarchuk A. O., Mironenko P.S., Murahovskiy S.A., Ivanenko R.O.* Astatichniy Identifikator v sistemi keruvannya chutlivim elementom giroteodolita.[Astatic identifier in the control system of the sensitive element of the gyrotheodolite]. Visnik KPI: Seriya Priladobuduvannya. Vip.61 (1). 2021. P.13-19.

8. *Yur’ev Yu.Yu.* Suchasni giroskopichni zasobi azimutalnogo orientuvannya.[Modern gyroscopic means of azimuth orientation]. VI Mizhnar. nauk.-tehn. konf. Priladobuduvannya: stan i perspektivi. Kiyiv. 2007. P.24-25.

9. *Murahovskiy S.S., Lazarev Yu. F., Mironenko P. S.* Dinamika nazemnogo kompensatsionnogo mayatnikovogo girokompasa. [Dynamics of ground compensatory pendulum gyrocompass]. Visnik Inzhenernoyi akademiyi Ukrayini. 2010. № 2. P.125-130.

10. *BoyarchukA.O., Mironenko P.S., Murahovskiy S.A.* S istema keruvannya giroteodolitom, yaka zabezpechue Invariantnist vihidnogo signalu schodo vibratsiynih priskoren osnovi. [Gyrotheodolite control system, which ensures the invariance of the output signal with respect to vibration accelerations of the base]. Visnik Inzhenernoyi akademiyi Ukrayini. 2020. № 1. P.52-57.

11. *Spielvogel Andrew R., Whitcomb Louis L* A stable adaptive attitude estimator on SO(3) for true-North seeking gyrocompass systems: Theory and preliminary simulation evaluation.. Proc. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation. May 29 -June 3 2017. P. 3231 – 3236.

12. *Nikulchenko A. G., Shipulina L. V.* Konechno-shagovyiy metod identifikatsii ravnovesnogo polozheniya SAR. [Finite-step method for identifying the equilibrium position of the ACS]. Vestnik Harkovskogo politehn. in-ta. Sb. nauch. tr. Harkov : Vischa shk. 1980. Vyip. 2, № 163 : Prikladnaya mehanika i protsessyi upravleniya. P.18-22.

Надійшла (received) 12.04.2023

Відомості про автора / About the Author

Плаксій Юрій Андрійович (Plaksiy Yuriy Andriyovych) – кандидат технічних наук, доцент, професор НТУ “ХПІ”, Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.