

М. ЛЕВЧЕНКО, В. ЛОБОДА

АНАЛІЗ ТРІЩИНИ ЗІ СКІНЧЕНОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Досліджується тріщина зі скінченною електричною проникністю між двома п'єзоелектричними матеріалами. Спочатку вважається, що довжина тріщини набагато менша від розмірів тіла, тому останнє розглядається як нескінченно велике. Вважаючи, що електричний потік через тріщину не змінюється по її довжині, будується аналітичний розв'язок поставленої задачі. На основі цього розв'язку знаходиться величина електричного потоку, а також інші компоненти електромеханічного поля. Виводиться також досить проста формула для швидкості звільнення енергії (ШЗЕ), а також для деяких значень електричної проникності середовища тріщини та зовнішніх навантажень обчислюються величина електричного потоку через тріщину та ШЗЕ. Апробація одержаних результатів проведена на прикладі подібної задачі, але для області скінчених розмірів. Використано метод скінчених елементів (МСЕ) і застосовано обернений підхід. Згідно з цим підходом задано електричний потік через тріщину, який отриманий аналітично, і проведено розв'язання з використанням МСЕ. Аналіз отриманих чисельних результатів підтвердив достовірність методики та одержаного аналітичного розв'язку.

Ключові слова: тріщина зі скінченною електричною проникністю; п'єзоелектричний біматеріал; аналітичний розв'язок; метод скінчених елементів.

A crack with finite electrical permeability between two piezoelectric materials is investigated. Initially, it is believed that the length of the crack is much smaller than the size of the body, so the latter is considered infinitely large. Assuming that the electric flux through the crack does not change along its length, an analytical solution to the given problem is constructed. On the base of this solution the magnitude of the electric flux, as well as other components of the electromechanical fields are found. A fairly simple formula for the energy release rate (EER) is also derived. For some values of the electrical permeability of the crack medium and external loads, the amount of electric flow through the crack and EER are calculated. Approximation of the obtained results was carried out on the example of a similar problem, but for the domain of finite dimensions. The finite element method (FEM) was used and the inverse approach was applied. According to this approach, the electric flux through the crack, which is obtained analytically, is used, and the solution is carried out using FEM. The analysis of the obtained numerical results confirmed the reliability of the methodology and the obtained analytical solution.

Keywords: crack with finite electrical permeability; piezoelectric bimaterial; analytical solution; finite element method.

Вступ. П'єзоелектрична кераміка дуже крихка і схильна до руйнування. Крім того, можливе розшарування межі поділу матеріалів, яке призводить до появи тріщин на інтерфейсі, що може бути причиною руйнування приладів. Тому важливою є задача дослідження тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами. При дослідженні таких тріщин найчастіше використовуються їх електропроникна [1] та електроізолювана [2] моделі, які є граничними випадками реальних тріщин. Найбільш адекватною до фізичної суті є модель тріщини зі скінченною електричною проникністю, яка запропонована в роботі [3] для випадку однорідного п'єзоелектричного матеріалу. Стосовно міжфазної тріщини ця модель була узагальнена в роботі [4], де було розроблено наближену методику знаходження електричного потоку через тріщину та знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень. Модель тріщини зі скінченною електричною проникністю досліджувалась також в роботі [5] для випадку відкритої міжфазної тріщини та в роботі [6] для випадку тріщини з зоною контакту.

В той же час для випадку тріщини між двома різними матеріалами потребує отримання аналітична формула для швидкості звільнення енергії та залишається недостатньо обґрунтованою методика визначення електричного потоку через тріщину. Бажано також провести чисельний експеримент для підтвердження достовірності одержаних аналітичних розв'язків. Ці питання і є предметом розгляду даної статті.

Формулювання проблеми. Визначальні рівняння, рівняння рівноваги та геометричні рівняння для лінійного п'єзоелектричного матеріалу за відсутності об'ємних сил і вільних зарядів можна представити у вигляді [1]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \gamma_{kl} - e_{kij} E_k, \quad D_i = e_{ikl} \gamma_{kl} + \varepsilon_{ik} E_k,$$

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0,$$

$$\gamma_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_i = -\varphi_{,i},$$

де u_k , φ , σ_{ij} , γ_{ij} та D_i – пружні переміщення, електричний потенціал, напруження, деформації та електричні зміщення відповідно; c_{ijkl} , e_{lij} і ε_{ij} – модулі пружності, п'єзоелектричні константи та діелектричні проникності відповідно. Нижні індекси змінюються від 1 до 3 і вважається справедливим правило Ейнштейна про підсумовування по індексам, що повторюються.

Розглядається тріщина довжини $2b$ на межі розділу двох напівнескінчених п'єзокерамічних просторів $x_3 > 0$ і $x_3 < 0$ (Рис. 1). Вважається, що $c_{ijkl}^{(1)}$, $e_{lij}^{(1)}$, $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ і $c_{ijkl}^{(2)}$, $e_{lij}^{(2)}$, $\varepsilon_{ij}^{(2)}$ є матрицями фізичних властивостей для верхнього та нижнього матеріалів відповідно, і обидва матеріали мають клас симетрії бmm із напрямком поляризації x_3 .

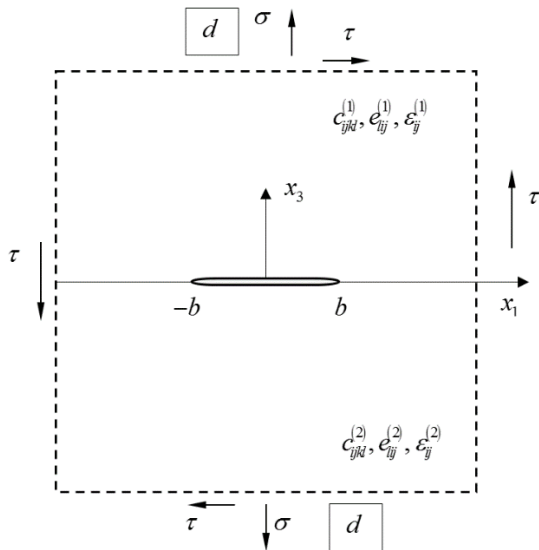


Рис. 1. П'єзоелектрична біматеріальна площина з між-фазною тріщиною, що має скінчену електричну проникність

Вважаємо, що заповнювач тріщин має діелектричну проникність

$$\epsilon_a = \epsilon_r \epsilon_0, \tag{1}$$

де ϵ_r – відносна діелектрична проникність, а $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C/Vm}$ – діелектрична проникність вакууму.

Навантаження на нескінченності визначається як $\sigma_{33}^{(m)} = \sigma$, $\sigma_{13}^{(m)} = \tau$, $D_3^{(m)} = d$, $D_1^{(m)} = D_{xm}^\infty$ ($m=1$ позначає верхню область, а $m=2$ - нижню). Оскільки навантаження не залежить від координати x_2 , можна розглянути плоску задачу про деформацію в площині, зображеній на рис. 1. Вважаємо, що тріщина повністю відкрита і її грані вільні від заданих механічних навантажень і електричних зарядів. Крім того, ми вважаємо, що електричне поле всередині тріщин можна знайти як

$$E_a = -\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \text{ для } x_1 \in (-b, b).$$

Враховуючи, що $D_3 = \epsilon_a E_a$, приходимо до наступної електричної умови

$$D_3 = -\epsilon_a \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{u_3^+ - u_3^-} \text{ для } x_1 \in (-b, b) \tag{2}$$

вздовж області тріщини, яку раніше використовували Нао і Чен [3]. Таким чином, граничні умови на поверхні розділу матеріалів можна записати як

$$\text{для } x_1 \notin (-b, b) : \langle \mathbf{V}(x_1, 0) \rangle = 0, \langle \mathbf{t}(x_1, 0) \rangle = 0, \tag{3}$$

$$\text{для } x_1 \in (-b, b) : \sigma_{13}^{(m)}(x_1, 0) = 0, \sigma_{33}^{(m)}(x_1, 0) = 0,$$

$$D_3(x_1, 0) = 0$$

$$\langle D_3(x_1) \rangle = 0, D_3(x_1) \langle u_3(x_1) \rangle = -\epsilon_a \langle \varphi(x_1) \rangle, \tag{4}$$

$$\text{де } \mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}^T,$$

квадратні дужки означають стрибок відповідної функції при переході через вісь x_1 .

На основі результатів [7] для п'єзоелектричної біматеріальної площини маємо

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{5}$$

$$n_{j1} \langle u_1'(x_1) \rangle + i \{ n_{j3} \langle u_3'(x_1) \rangle + n_{j4} \langle \varphi'(x_1) \rangle \} = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1). \tag{6}$$

де m_{jl}, n_{jl}, γ_j ($j, l = 1, 3, 4$) залежать від матеріальних констант та мають дійсні значення для певних класів п'єзокераміки. Крім того функція, $F_j(z)$ аналітична у всій площині.

Припустимо, що електричний потік постійний уздовж берегів тріщини, тобто

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D \text{ для } x_1 \in (-b, b). \tag{7}$$

Рівняння (5) і (7) разом з умовами на межі розділу (4) призводять до наступної задачі лінійного спряження Гільберта-Рімана

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = m_{j4} D, (j = 1, 3, 4), \text{ де } x_1 \in (-b, b) \tag{8}$$

Для $x_1 \notin (-b, b)$ справедливі умови $F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1)$ і значить на основі (5) можна записати наступні умови на нескінченності

$$F_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \hat{\sigma}_j - i \hat{\tau}_j \tag{9}$$

для функцій $F_j(z)$, де $\hat{\sigma}_j = \frac{1}{r_j} (\sigma + m_{j4} d)$,

$$\hat{\tau}_j = -m_{j1} \tau / r_j, r_j = (1 + \gamma_j) (j = 1, 3, 4).$$

Вводячи нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) - \frac{m_{j4} D}{1 + \gamma_j}, \tag{10}$$

рівняння (8) та (10) запишемо у вигляді

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 (j = 1, 3, 4) \text{ де } x_1 \in L' \tag{11}$$

$$\Phi_j(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_j^* - i \tau_j^*, \tag{12}$$

де $\sigma_j^* = \hat{\sigma}_j - m_{j4} D / r_j$, $\tau_j^* = \hat{\tau}_j$ ($j = 1, 3, 4$).

Згідно з [8] розв'язок задачі (11), (12) має вигляд

$$\Phi_j(z) = X_j(z) (\sigma_j^* - i \tau_j^*) (z - 2ib \epsilon_j), \tag{14}$$

де $X_j(z) = (z + b)^{-1/2 + i \epsilon_j} (z - b)^{-1/2 - i \epsilon_j}$, $\epsilon_j = \frac{\ln \gamma_j}{2\pi}$.

Підставляючи (14) в (10), а потім у (5), одержуємо

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = (1 + \gamma_1) (\sigma_1^* - i \tau_1^*) (x_1 - 2ib \epsilon_1) (x_1 + b)^{-1/2 + i \epsilon_1} (x_1 - b)^{-1/2 - i \epsilon_1} + m_{14} D \tag{15}$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44} D_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{2\sigma_4^* x_1}{\sqrt{x_1^2 - b^2}} + m_{44} D. \tag{16}$$

Із системи (15), (16) можуть бути отримані вирази

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), D_3^{(1)}(x_1, 0) \text{ і } \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 > b.$$

З рівнянь (6), (10) та (14) аналогічно до [9] одержуємо наступні вирази:

$$n_{j1}[u_1(x_1, 0)] + i[n_{j3}[u_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\varphi(x_1, 0)]] = \frac{\gamma_j + 1}{\gamma_j} (\sigma_j^* - i\tau_j^*) \left(\frac{x_1 + b}{x_1 - b} \right)^{i\epsilon_j} \sqrt{x_1^2 - b^2} \quad \text{для} \\ x_1 \in (-b, b), \quad (17)$$

з яких витікають формули для стрибків переміщення та електричного потенціалу

$$\langle u_3(x_1, 0) \rangle = \Delta^{-1} \{n_{44}H_1(x_1) - n_{14}H_2(x_1)\} \\ \langle \varphi(x_1, 0) \rangle = \Delta^{-1} \{-n_{43}H_1(x_1) + n_{13}H_2(x_1)\}, \quad (18)$$

де, $H_1(x_1) = \gamma_0(\sigma_1^* \cos \alpha + \tau_1^* \sin \alpha) \sqrt{b^2 - x_1^2}$, $H_2(x_1) = 2\sigma_4^* \sqrt{b^2 - x_1^2}$, $\gamma_0 = \frac{\gamma_1 + 1}{\sqrt{\gamma_1}}$, $\alpha = \epsilon_1 \ln \left(\frac{b + x_1}{b - x_1} \right)$,

$$\Delta = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}.$$

Підставляючи вирази (18) в (2), отримуємо

$$D = \epsilon_a \frac{n_{43}\tilde{H}_1(x_1) - n_{13}\tilde{H}_2}{n_{44}\tilde{H}_1(x_1) - n_{14}\tilde{H}_2} \quad \text{для } x_1 \in (-b, b), \quad (19)$$

де $\tilde{H}_1(x_1) = \gamma_0(\sigma_1^* \cos \alpha + \tau_1^* \sin \alpha)$, $\tilde{H}_2 = 2\sigma_4^*$.

Для кожного значення x_1 співвідношення (19) являє собою трансцендентне рівняння відносно електричного потоку D . Його розв'язок легко знаходиться чисельно. Важливо зазначити, що для реальних п'єзоелектричних матеріалів величина ϵ_1 є дуже малою, тому $\cos(\alpha)$ і $\sin(\alpha)$ практично не змінюються для $x_1 \in (-b, b)$. А це означає, що $H_1(x_1)$ практично не змінюється в цьому проміжку і значить величина електричного потоку D для кожного ϵ_a є практично константою. Для прикладу в таблиці 1 наведені значення коренів рівняння (19) для різних $x_1 \in (-b, b)$ при $\epsilon_a = \epsilon_0$ і $b = 10$ мм.

Табл. 1. Значення коренів рівняння (19) для різних $x_1 \in (0, b)$ при $\epsilon_a = \epsilon_0$ і $b = 10$ мм.

x_1 , мм	0	1	2	3	4	5
$10^3 D$ Кл/м ²	5.0709	5.0709	5.0710	5.0710	5.0710	5.0711

Табл. 1 (продовження)

x_1 , мм	6	7	8	9	9.5	9.9
$10^3 D$ Кл/м ²	5.0712	5.0713	5.0715	5.0710	5.0720	5.0743

З цієї таблиці видно, що в більшій частині проміжку $(0, b)$ величина D залишається практично постійною і тільки біля точки b спостерігається незначне відхилення, величиною $\approx 0.067\%$. Це підтверджує справедливості припущення стосовно постійного значення електричного потоку через тріщину і дозволяє

для його знаходження використовувати, наприклад, середину тріщини $x_1 = 0$.

Знайдемо також швидкість звільнення енергії (ШЗЕ) при розвитку тріщини. Згідно [1] ШЗЕ біля правої вершини тріщини може бути представлена у вигляді:

$$G_b = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \left[\sigma_{33}^{(l)}(x_1, 0) \langle u_3(x_1 - \Delta l) \rangle + \sigma_{13}^{(l)}(x_1, 0) \langle u_1(x_1 - \Delta l) \rangle + D_3^{(l)}(x_1, 0) \langle \varphi(x_1 - \Delta l, 0) \rangle \right] dx_1 \quad (20)$$

Підставляючи вирази для напружень і електричного зміщення, отримані з (15), (16), а також стрибки переміщень і електричного потенціалу, знайдені з (17) і виконуючи інтегрування, одержуємо:

$$G_b = \frac{\pi(1 + 4\epsilon_1^2)}{8 \cosh(\pi\epsilon_1)} h_1 h_2 + a\pi h_3 (\sigma_5^*)^2, \quad (21)$$

де

$$h_1 = \frac{m_{44}n_{44} + n_{43}}{p_1 p_2} - \frac{1}{m_{11}n_{11}}, \\ h_2 = \frac{a}{\sqrt{\gamma_1}} \left\{ [\sigma + m_{14}(d - D)]^2 + \tau^2 \right\}, \\ h_3 = \frac{m_{14}n_{14} + n_{13}}{p_1 p_2}, \\ p_1 = m_{44} - m_{14}, \\ p_2 = n_{13}n_{44} - n_{14}n_{43}.$$

Формула (21) справедлива як для біматеріалу, так і для однорідного матеріалу. Зокрема, в останньому випадку цю формулу можна спростити і записати у вигляді:

$$G_b = \frac{\pi b}{4 p_2} \left\{ n_{44} [\sigma + m_{14}(d - D)]^2 - n_{14} [\sigma + m_{44}(d - D)]^2 \right\} \quad (22)$$

Враховуючи також співвідношення

$$n_{13} = -m_{44}n_{14}, \quad n_{43} = -m_{14}n_{44}, \quad \frac{1}{m_{11}n_{11}} = \frac{m_{44}n_{44} + n_{43}}{p_1 p_2},$$

$$h_1 = \frac{2n_{44}}{p_2}, \quad h_3 = -\frac{n_{14}}{p_2},$$

цю формулу можна переписати так

$$G_b = \frac{\pi b}{4} [\mathcal{G}_1 \sigma^2 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_{21}) \sigma(d - D) + \mathcal{G}_{22} (d - D)^2], \quad (23)$$

де $\mathcal{G}_{11} = \Delta^{-1}(n_{44} - n_{14})$, $\mathcal{G}_{12} = \Delta^{-1}(m_{14}n_{44} - m_{44}n_{14})$, $\mathcal{G}_{21} = \Delta^{-1}(n_{13} - n_{43})$, $\mathcal{G}_{22} = \Delta^{-1}(m_{44}n_{13} - m_{14}n_{43})$, $\Delta = p_2$. Формула (23) повністю співпадає з відповідною формулою статті [4].

В таблицях 2 та 3 наведені деякі результати чисельної реалізації одержаних аналітичних формул. Зокрема, в Табл. 2 показані значення електричного потоку в області тріщини та ШЗЕ для $\sigma = 10$ МПа,

$\tau = 0$, $d = 0$ та різних величин діелектричної проникності заповнювача тріщини, а в Табл. 3 наведені ті ж значення, але для $d = 0.01 \text{ C/m}^2$.

Таблиця 2. Зміна електричного потоку в області тріщини та ШЗЕ для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $d = 0$ та різної діелектричної проникності заповнювача тріщини

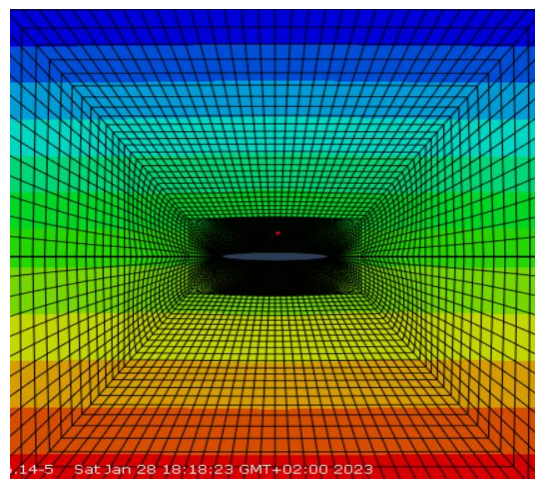
ϵ_a	$100D, \text{ C/m}^2$	$G_b, \text{ N/m}$
0	0	30.25
ϵ_0	-0.206	39.73
$2.5 \epsilon_0$	-0.242	40.37
$81 \epsilon_0$	-0.274	40.70
$4000 \epsilon_0$	-0.276	40.71

Табл. 3 Зміна тих же параметрів, що і в Табл. 2 для $\sigma = 10 \text{ МПа}$, $d = 0.01 \text{ C/m}^2$ та різної діелектричної проникності заповнювача тріщини

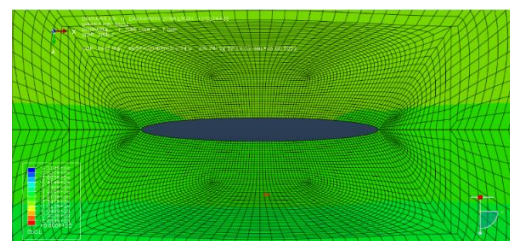
ϵ_a	$100D \text{ C/m}^2$	$G_b, \text{ N/m}$
0	0	-16.15
ϵ_0	0.507	36.48
$2.5 \epsilon_0$	0.626	40.16
$81 \epsilon_0$	0.721	40.71
$4000 \epsilon_0$	0.724	40.71

З одержаних результатів видно, що для моделі електроізолюваної тріщини ШЗЕ приймає від'ємні значення, що є фізично невиправдано і ставить під сумнів можливість використання цієї моделі тріщини. При значному ж збільшенні електричної проникності тріщини ШЗЕ прямують до одного значення незалежно від величини прикладеного електричного потоку. Це пояснюється тим, що при великих значеннях електричної проникності тріщини ми фактично приходимо до моделі електропроникної тріщини, фізичні характеристики якої не залежать від електричного потоку.

Числовий аналіз. Для області скінченних розмірів, що являє собою 2 спаяних прямокутники висоти l і ширини $2l$ з тріщиною $-b \leq x_1 \leq b$, $x_2 = 0$ в центральній частині інтерфейсу, розв'язок задачі проводився методом скінченних елементів. Використовувались 8-вузлові чотирикутні та 6-вузлові трикутні кінцеві елементи лагранжевого типу. Мало місце згущення сітки при підході до тріщини і особливо до її вершин. Структура сітки, а також розподіл електричного потенціалу показані на рис. 2



(a)



(b)

Рис. 2 Структура сітки та розподіл електричного потенціалу,

(а) – вся область, (б) – околі тріщини

Вважається, що верхня частина пластини виготовлена з п'єзоелектричного матеріалу PZT-4, нижня є п'єзоелектриком PZT-5Н. Властивості цих матеріалів в системі одиниць СІ задаються відомими матрицями жорсткості, п'єзоелектричних та діелектричних констант, а саме PZT-4: $c_{11} = 139 \times 10^9$, $c_{12} = c_{13} = 74,3 \times 10^9$, $c_{33} = 113 \times 10^9$, $c_{44} = 25,6 \times 10^9$, $e_{15} = 13,4$, $e_{31} = -6,98$, $e_{33} = 13,8$, $d_{11} = 6 \times 10^{-9}$, $d_{33} = 5,47 \times 10^{-9}$; PZT-5Н: $c_{11} = 121 \times 10^9$, $c_{12} = c_{13} = 75,4 \times 10^9$, $c_{33} = 111 \times 10^9$, $c_{44} = 21,1 \times 10^9$, $e_{15} = 12,3$, $e_{31} = -5,4$, $e_{33} = 15,8$, $d_{11} = 8,1 \times 10^{-9}$, $d_{33} = 8,1 \times 10^{-9}$.

Вважалось, що:

- до верхньої і нижньої граней прикладене рівномірно розподілене нормальне розтягуюче напруження $\sigma = 10 \text{ МПа}$;
- через усю область проходить електричний потік $d = 10^{-2} \text{ Кл/м}^2$, який реалізується заданням на верхній грані рівномірно розподіленого заряду інтенсивності (-10^{-2} Кл/м^2);
- на нижній грані заданий нульовий електричний потенціал;
- розміри пластини і тріщини визначаються величинами $l = 50 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ мм}$;

Будемо вважати, що тріщина заповнена повітрям. Тоді згідно з табл. 2 електричний потік через трі-

щину дорівнює $0.00507 \text{ Кл} / \text{м}^2$. Для перевірки правильності цього результату задаємо в області тріщини вказаний електричний потік, розв'яжемо задачу методом скінченних елементів і перевіримо виконання співвідношення (2).

Згідно з правилами студентської версії пакету Абакус для реалізації потрібного електричного потоку через тріщину треба на її верхньому березі задати рівномірно розподілений заряд величиною $-0.00507 \text{ Кл} / \text{м}^2$, а на нижньому – рівномірно розподілений заряд $+0.00507 \text{ Кл} / \text{м}^2$

Розрахунок був проведений на сітці, показаній на Рис. 2. Кольорова розкраска на цьому рисунку показує результуючий розподіл електричного потенціалу. Графіки переміщень верхнього та нижнього берегів тріщини показані на Рис. 3 та 4, відповідно, а значення електричного потенціалу на верхньому та нижньому берегах – на Рис. 5 та 6, відповідно.

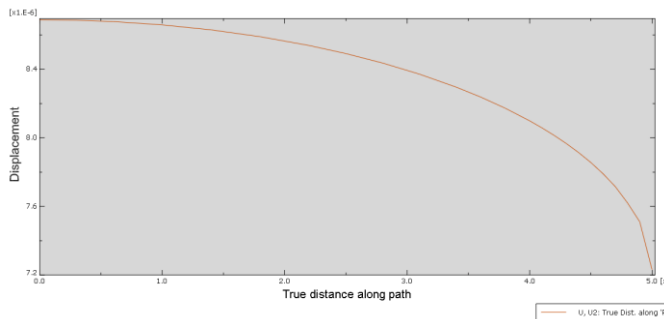


Рис. 3. Графік переміщень верхнього берега тріщини.

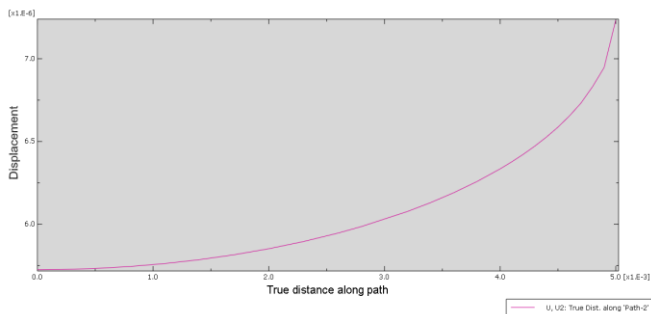


Рис. 4. Графік переміщень нижнього берега тріщини

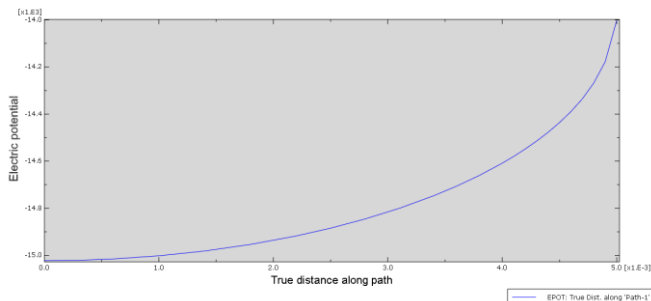


Рис. 5. Розподіл електричного потенціалу на верхньому березі тріщини

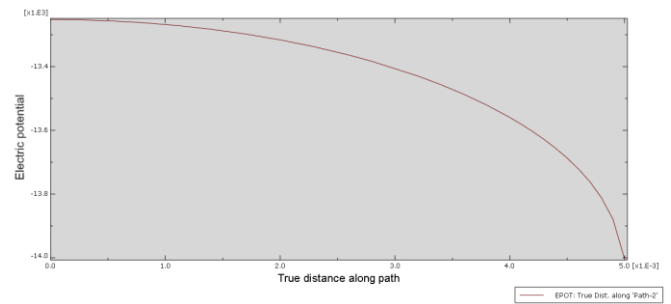


Рис. 6. Розподіл електричного потенціалу на нижньому березі тріщини

На основі цих результатів отримані значення правої частини співвідношення (2). Для декількох значень x_1 їх величини наведені в Табл. 3.

Таблиця 3

$10^3 x_1 \text{ м}$	0	1.8	3.8	4.8	4.9
$10^3 \varepsilon_a \langle \varphi \rangle / \langle u_3 \rangle \text{ Кл} / \text{м}^2$	5.28 9	5.28 0	5.27 1	5.11 1	4.6 8

Порівнюючи одержані результати з лівою частиною рівняння (2), яка у цьому випадку повинна дорівнювати $5.07 \times 10^{-3} \text{ Кл} / \text{м}^2$ можемо побачити, що в більшій частині проміжку $(0, b)$ розбіжність в результатах є незначною і складає біля 4,1% і тільки в безпосередній близькості до вершини тріщини ця похибка дещо зростає, але знаходиться в межах 10%. Цей результат підтверджує достовірність як аналітичного підходу, так і чисельного розрахунку, проведених в даній статті.

Висновки

Досліджено напружено-деформівний стан п'єзоелектричного біматеріалу з міжфазною тріщиною. Вважається, що тріщина має скінченну електричну проникність, а на віддаленні діє механічне навантаження та електричний потік. Спочатку приймається, що довжина тріщини набагато менша від розмірів тіла, тому останнє розглядається як нескінченно велике. Важливо, що електричний потік через тріщину не змінюється по її довжині, формулюється задача лінійного спряження (11), (12), для якої виписується аналітичний розв'язок. З використанням цього розв'язку формулюється рівняння (19) для знаходження величини електричного потоку. Для конкретних матеріалів і навантажень розв'язок цього рівняння є практично незмінним по довжині тріщини. Виводиться також досить проста формула (21) для ШЗЕ. Наводяться результати чисельної реалізації отриманого аналітичного розв'язку.

Для подібної задачі, але у випадку області скінченних розмірів розв'язок побудований за допомогою методу скінченних елементів. Використано електричний потік через тріщину, який отриманий аналітично, і проведено розв'язання отриманої задачі за допомогою МСЕ. Перевірка одержаних чисельних результатів показала, що вони з достатньою точністю задовольняють рівнянню (2) для електричного потоку через тріщину, що підтверджує достовірність як аналітичного підходу, так і чисельного розрахунку проведених в даній статті.

Список літератури

1. Партон В. З. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
2. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – P. 739–765.
3. Hao T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // Eng. Fract. Mech. – 1994. – Vol. 47. – P. 793–802.
4. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // Int. J. Solids Struct. – 2006. — Vol. 43. – P. 1979–1990.
5. Li Q. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric/ piezoelectric bimaterials / Q. Li, Y. H. Chen // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 75. – P. 011010-1–011010-13.
6. Govorukha V. On contact zone models for an electrically limited permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / V. Govorukha, M. Kamlah // Int. J. Fracture. – 2010. –Vol. 164. – P. 133–146.
7. Herrmann K.P., Govorukha V.B., Loboda V. V. On contact zone model for an interface crack with electrically insulated crack surfaces in a piezoelectric bimaterial // International J. of Fracture. 2001. Vol. 111. P. 203–227.
8. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
9. Левченко М. С., Гергель І. Ю., Лобода В. В. Про особливості деформування тріщини між двома п'єзоелектричними матеріалами, Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: зб. наук. праць. – Дніпро: Ліра, 2021. – Вип. 33. – С. 86–97.

References (transliterated)

1. Parton V. Z. Elektromagnitoupругost' pezoelektricheskikh y elektroprovodnykh tel / V. Z. Parton, B. A. Kud-riavtsev. – M.: Nauka, 1988. – 472 s.
2. Suo Z. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. of Mechanics and Physics of Solids. – 1992. – Vol. 40. – R. 739–765.
3. Hao T. H. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications / T. H. Hao, Z. Y. Shen // Eng. Fract. Mech. – 1994. – Vol. 47. – P. 793–802.
4. Govorukha V. B. On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial com-pound / V. B. Govorukha, V. V. Loboda, M. Kamlah // Int. J. Solids Struct. – 2006. — Vol. 43. – P. 1979–1990.
5. Li Q. Solution for a semi-permeable interface crack in elastic dielectric/ piezoelectric bimaterials / Q. Li, Y. H. Chen // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2008. – Vol. 75. – P. 011010-1–011010-13.
6. Govorukha V. On contact zone models for an electrical-ly limited permeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / V. Govorukha, M. Kamlah // Int. J. Fracture. – 2010. –Vol. 164. – P. 133–146.
7. Herrmann K.P., Govorukha V.B., Loboda V. V. On contact zone model for an interface crack with electrically insulat-ed crack surfaces in a piezoelectric bimaterial // International J. of Fracture. 2001. Vol. 111. P. 203–227.
8. Muskhelyshvily N. Y. Nekotorye osnovnyye zadachy matematycheskoi teoryu uprugosti / N. Y. Muskhelyshvily. – M.: Nauka, 1966. – 708 s.
9. Levchenko M. S., Herhel I. Yu., Loboda V. V. Pro osoblyvosti deformuvannya trishchyny mizh dvoma piezoelektrychnymy materialamy, Problemy obchysliuvalnoi mekhaniky i mitsnosti konstruktstii: zb. nauk. prats. – Dnipro: Lira, 2021. – Vyp. 33. – S. 86–97.

Відомості про авторів/ About the Authors

Левченко Максим (Maksym Levchenko) – аспірант, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, е-мейл: levchencko.maks2010@gmail.com

Лобода Володимир (Loboda Volodymyr) - д.ф.-м.н., професор, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, е-мейл: loboda@dnu.dp.ua