

*В. Б. УСПЕНСЬКИЙ*

## АВТОНОМНИЙ МЕТОД ДОКАЛІБРУВАННЯ БЕЗПЛАТФОРМНОЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ НАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ У ХОДІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

На сучасному повітряному транспорті широко використовують безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС). Термін експлуатації таких систем налічує десятиріччя. За цей час можливе погіршення характеристик таких систем, пов'язане з деградацією інерціальних датчиків – гіроскопів та акселерометрів. В цих умовах для підтримки необхідної точності БІНС протягом усього терміну експлуатації необхідно або періодично проводити регламентні роботи з бортовою системою, або безперервно адаптувати модель вимірювань датчиків, що використовується, в частині компенсації виникаючих похибок. Другий з вищевказаних напрямків, який назвемо докалібруванням, має перед першим ту перевагу, що проводиться самою системою автоматично і не вимагає ані додаткового обладнання, ані додаткових робіт з обслуговування. Відомий спосіб докалібрування БІНС заснований на комплексованні інформації від БІНС та від приймача супутникових радіонавігаційних сигналів (СРС). Таке докалібрування, по-перше, істотно залежить від наявності та якості супутникової інформації, по-друге, можливе лише для інтегрованих навігаційних систем, в яких інерційна підсистема доповнена приймачем СРС. На відміну від відомого способу у цій статті вирішується завдання автономного докалібрування БІНС, яке здійснюється після кожного польоту. Рішення будується на основі лінеаризованої моделі помилок інерційної навігації за крайовими умовами вектора стану (на початку та наприкінці польоту). Зовнішня інформація, що використовується, складається тільки з початкових значень координат і поточних вимірювань баровисотоміра. В результаті рішення наприкінці польоту визначаються похибки гіроскопів та акселерометрів, а також помилка визначення в БІНС кінцевих значень широти та довготи. Похибки датчиків можуть бути використані у наступних вмиканнях системи, що забезпечує підвищення точності її роботи загалом. На типовій програмі імітаційного польоту проведено аналіз придатності та ефективності розробленої методики.

**Ключові слова:** інерціальна навігація, лінеаризована модель помилок, гіроскоп, акселерометр, похибки вимірів, автономне докалібрування

Strapdown inertial navigation systems (SINS) are widely used in modern air transport. The service life of such systems is decades. During this time, the characteristics of such systems may deteriorate due to the degradation of inertial sensors - gyroscopes and accelerometers. Under these conditions, in order to maintain the required accuracy of the SINS during the entire period of operation, it is necessary either to periodically carry out routine maintenance with the onboard system, or to continuously adapt the used sensor measurement model in terms of compensating for errors that arise. The second direction, which we will call calibration, has the advantage over the first one that it is carried out automatically by the system itself and does not require any additional equipment or additional maintenance work. The known method of SINS recalibration is based on the integration of information from the SINS and from the receiver of satellite radio navigation signals (SRNS). Such calibration, firstly, significantly depends on the availability and quality of satellite information, and secondly, it is possible only for integrated navigation systems in which the inertial subsystem is supplemented by a SRNS receiver. In contrast to the known method, this article solves the problem of autonomous SINS calibration, which is carried out after each flight. The solution is based on a linearized inertial navigation error model based on the boundary conditions of the state vector (at the beginning and end of the flight). The external information used consists only of the initial values of the coordinates and the current measurements of the baroaltimeter. As a result of the decision at the end of the flight, the errors of gyroscopes and accelerometers are determined, as well as the error in determining the final values of latitude and longitude in the SINS. Sensor errors can be used in subsequent system activations, which improves the accuracy of its operation as a whole. The analysis of the suitability and effectiveness of the developed methodology was carried out on a typical flight simulation program.

**Keywords:** inertial navigation, linearized inertial navigation error model, gyroscope, accelerometer, measurement errors, autonomous recalibration

**Проблема, що розглядається, та аналіз її стану.** Розглядаються високоточні безплатформні інерціальні навігаційні системи (БІНС), які використовуються на літаках цивільної авіації. Така система складається з трійки акселерометрів та трійки гіроскопів, які у темпі реального часу вимірюють відповідно вектор уявного прискорення та вектор абсолютної кутової швидкості обертання. Ці виміри шляхом подвійного інтегрування оброблюються у системному комп'ютері, а результати – кути орієнтації, вектор відносної швидкості та координати об'єкту, поступають користувачу, зокрема, в систему управління рухом.

Навігаційні системи є критично важливими бортовими системами, тому до них висувуються суворі вимоги, зокрема, за точністю функціонування. Стандартні потрібні характеристики БІНС авіаційного призначення [1,2] забезпечуються відповідним приладовим складом та спеціальними процедурами калібрування, описаними, наприклад, в [3–5]. Ці процедури дозволяють за допомогою спеціальних стендів визначити систематичні похибки вимірів та дислокації датчиків БІНС (гіроскопів та

акселерометрів) з метою їх подальшої алгоритмічної компенсації у ході функціонування системи.

Чинників, які впливають на кінцеву похибку навігації, багато. Серед них фізичні принципи роботи датчиків; типи рухів, які здійснює носій системи; тепловий, механічний, магнітний вплив середовища; недосконалість технології та дефекти виготовлення; похибки супутньої електроніки та алгоритмів отримання та обробки інформації. Але у будь-якому разі за рахунок конструктивних доопрацювань, схемотехнічних та методичних рішень, калібрувальних випробувань та алгоритмічної компенсації якість навігаційної системи при наявності потенційно точних датчиків на початок експлуатації відповідатиме вимогам.

В той же час, у ході експлуатації, яка триватиме роками, існує ймовірність деградації характеристик комплектуючих та БІНС у цілому. Тому для підтримки вихідної якості функціонування БІНС потрібно або проводити час від часу регламентне обслуговування системи з використанням спеціального обладнання або спеціальних рухів усього літака, або за допомогою спеціальної обробки інформації забезпечити безперервну адаптацію

алгоритмів компенсації похибок поточних вимірів датчиків. Таку адаптацію будемо називати "докалібруванням у ході експлуатації".

Вказана вище адаптація є перспективним напрямом та широко використовується у різних виглядах. Спільне у різних методиках докалібрування є необхідність додаткового джерела навігаційної інформації.

Найінформативнішим джерелом є глобальні супутникові радіонавігаційні системи (СРНС). Якщо приймачі їх сигналів входять до складу інерціальної навігаційної системи, таке обладнання йменується інтегрованою інерціально-супутниковою навігаційною системою (ІСНС) [6]. В ній здійснюється алгоритмічне комплексування надмірної навігаційної інформації, отриманої від інерціальної підсистеми та приймача сигналів СРНС [6,7].

Крім забезпечення високої точності навігаційних визначень, в ІСНС реалізується також процедура поступового визначення та компенсації похибок інерціальних датчиків у даному включенні, яка вперше була запропонована для технології АІМЕ (Assured-Integrity Monitored-Extrapolation) обробки інформації в ІСНС [8]. Ядром програмно-математичного забезпечення ІСНС є навігаційний фільтр, здебільшого побудований на основі розширеного фільтру Калмана або його альтернатив [9]. Якщо такий фільтр добре налагоджений на фактичні шуми вимірів, він через деякий час польоту забезпечуватиме гарні результати докалібрування [10], особливо, якщо літак здійснює різноманітні динамічні маневри, при яких виконуються умови спостережності похибок гіроскопів або акселерометрів. До речі, наприкінці польоту отримані оцінки похибок можна зберегти в системі та використати у наступному вмиканні, дійсно, якщо є впевненість, що похибки є відтворюваними. Найважливім недоліком таких технологій в ІСНС є неспроможність отримати відповідні оцінки похибок при відсутності супутникових сигналів або їх епізодичності.

Додамо, комплексування інерціальної та зовнішньої інформації здійснюється також при наявності вимірів одометру (наземний транспорт) [11], лагу (морський транспорт) [12], магнітометрів (зазвичай, це БПЛА) [13], оптичних датчиків [14], баровисотоміру (будь-який повітряний транспорт) [15], інфрачервоні приймачі [16], лазерні вимірювачі відстані [17] і т.і. Але обмежена інформативність таких вимірів не дозволяє вирішувати задачу докалібрування інерціальних датчиків.

В цих умовах, маючи на увазі необхідність докалібрування БІНС під час тривалої експлуатації та неможливість цілком покладатись на технологію АІМЕ, враховуючи її вразливість від зовнішніх перешкод, розробка методу докалібрування на підставі тільки інерціальної інформації, яка отримується системою автономно, є доцільною та корисною.

Подібний підхід – використання алгоритму безплатформної інерціальної навігаційної системи (БІНС), вже давно та ефективно використовується під час калібрування БІНС у лабораторних умовах [3,18–20]. Він дозволяє після калібрування усього спектру приладових похибок інерціального модуля за допомогою порівняння прямих вимірів з деяким еталоном [19,21,22], значно покращити кінцеву якість інерціальної навігації шляхом визначення та врахування коректуючих поправок.

Але такі методи використання алгоритму БІНС для докалібрування не можуть бути застосовані в умовах польоту, коли під час руху немає еталонних значень навігаційних параметрів або динамічних характеристик. Такі еталонні значення можуть бути тільки на початку та наприкінці роботи системи, коли літак нерухомо знаходиться на землі. Саме для таких умов у даній статті розроблений метод докалібрування інерціальних датчиків на основі виключно автономної інформації, яка отримується в БІНС. Додатково в алгоритмі на початку та наприкінці роботи системи, коли літак вже нерухомий, використовуються еталонні значення кутової швидкості обертання Землі та прискорення вільного падіння. Такий склад інформації та умови її використання зумовлюють новітність розробленого методу. Врешті решт його застосування у програмно-математичному забезпеченні БІНС без додаткових матеріальних витрат реалізує поточну адаптацію компенсуючих моделей похибок та створює умови збереження точності функціонування БІНС під час тривалої експлуатації.

**Як виглядатиме пропонуємий процес докалібрування та деякі припущення.** Вважаємо, що БІНС у початковій точці виставляється (тобто система визначає свої кути орієнтації) автономно, шляхом алгоритмічної процедури гірокомпасування, і переходить в режим інерціального числення. Початкові координати одноразово поступають ззовні. Після деякого часу функціонування БІНС (зазвичай, при рухомому об'єкті) об'єкт зупиняється. У цій точці за первинними вимірами датчиків БІНС автоматично діагностується зупинка (тобто відносна швидкість достовірно вважається рівною нулю). Протягом кількох хвилин за вимірами гіроскопів та акселерометрів, що входять у склад БІНС, знову визначаються кути орієнтації, як при виставці, після чого обчислюються оцінки похибок гіроскопів та бічних акселерометрів у даному вмиканні системи. Додатково робиться оцінка помилки визначення координат БІНС на поточний момент часу. З врахуванням такої оцінки можливо автономно оцінити справжні координати об'єкту, а похибки датчиків зберегти та використати у наступному запуску. Друга функція і є бажаною властивістю адаптації або докалібрування БІНС.

Таким чином, процес докалібрування, що пропонується, не потребує додаткових рухів об'єкту або додаткової інформації ззовні. Єдиною додатковою

вимогою є подовження роботи системи на протязі кількох хвилин після зупинки об'єкту.

Для реалізації описаного сценарію висунемо такі припущення:

- гіроскопи та акселерометри мають постійні у будь-якому вмиканні похибки вимірювань, не відомі заздалегідь. Ці похибки зумовлюють помилки БІНС у визначенні координат, швидкості та орієнтації;
- мультиплікативні похибки (від масштабних коефіцієнтів датчиків та кутів неортогональності) зневажливо малі;
- під час функціонування весь час здійснюється корекція висоти та вертикальної швидкості за рахунок альтиметру, тому вертикальний акселерометр приймається ідеальним. Таким чином, невідомими є зсуви нуля (ЗН) бічних акселерометрів та дрейфи трьох гіроскопів (всього 5 параметрів). Їхнє визначення і є завданням, що вирішується у ході докалібрування.

**Вихідна математична модель процесу інерціальної навігації та постановка задачі.** Процес, що вивчається у даній роботі – це процес інерціальної навігації, тобто технологія чисельного визначення орієнтації, швидкості та координат об'єкта за допомогою поточних вимірів інерціальних датчиків – гіроскопів та акселерометрів. Розглянемо його детальніше.

Вирішення задачі інерціальної навігації починається з вибору типу навігаційних параметрів, які будуть визначатись. Такий вибір не є однозначним і залежить від того, для чого це робиться. Оскільки далі ми розглядатимемо помилки БІНС, які повинні бути зрозумілими споживачу такої інформації, природним буде спиратися саме на споживчі навігаційні параметри.

До складу споживчих навігаційних параметрів входять кути:  $\psi$  – курс,  $\theta$  – тангаж,  $\gamma$  – крен; складові вектора відносної швидкості:  $v_N, v_H, v_E$  – північна, вертикальна та східна проекції; географічні координати:  $\varphi, H, \lambda$  – широта, висота, довгота.

Для Землі, що приймається у вигляді сфероїду, кінематичні рівняння для орієнтації та навігаційні рівняння у споживчих навігаційних параметрах мають вигляд [23, 24]:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\omega_Z \cdot \sin \gamma - \omega_Y \cdot \cos \gamma) - tg \theta \cdot (\omega_E \cdot \sin \psi + \omega_N \cdot \cos \psi) + \omega_H,$$

$$\dot{\theta} = \omega_Y \cdot \sin \gamma + \omega_Z \cdot \cos \gamma + \omega_N \cdot \sin \psi - \omega_E \cdot \cos \psi,$$

$$\dot{\gamma} = \omega_X + tg \theta \cdot (\omega_Z \cdot \sin \gamma - \omega_Y \cdot \cos \gamma) - \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\omega_E \cdot \sin \psi + \omega_N \cdot \cos \psi); \quad (1)$$

$$\dot{v}_N = a_N + g_N + v_H \cdot (\Omega_E + \omega_E) - v_E \cdot (\Omega_H + \omega_H),$$

$$\dot{v}_H = a_H + g_H + v_E \cdot (\Omega_N + \omega_N) - v_N \cdot (\Omega_E + \omega_E),$$

$$\dot{v}_E = a_E + g_E + v_N \cdot (\Omega_H + \omega_H) - v_H \cdot (\Omega_N + \omega_N); \quad (2)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_N}{R+H}, \quad \dot{H} = v_H, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E}{(R+H) \cdot \cos \varphi} \quad (3)$$

де  $R = 6370000$  м – радіус земного сфероїду;  $a_N, a_H, a_E$  – північна, вертикальна та східна складові

вектора уявного прискорення  $\bar{a}_{\{X_n\}}$ ;  $g_N, g_H, g_E$  – проекції вектора прискорення сили тяжіння Землі  $\bar{g}_{\{X_n\}}$  на вісі місцевої географічної системи координат (СК);  $\Omega_N = \Omega \cdot \cos \varphi, \Omega_H = \Omega \cdot \sin \varphi, \Omega_E = 0$  – проекції вектора кутової швидкості обертання Землі  $\bar{\Omega}$ , модуль вектора  $\Omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$  рад/с;  $\omega_N, \omega_H, \omega_E$  – проекції абсолютної кутової швидкості обертання супроводжуючого тригранника на власні вісі;  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  – проекції абсолютної кутової швидкості обертання об'єкту на пов'язані з об'єктом вісі (збурені виміри гіроскопів).

В свою чергу вектор  $\bar{a}_{\{X_n\}}$  обчислюється, як

$$\bar{a}_{\{X_n\}} = A^T \cdot \bar{a}_{\{X_c\}},$$

де  $A$  – матриця повороту від місцевої географічної системи координат до пов'язаної СК;  $\bar{a}_{\{X_c\}} = (a_X \ a_Y \ a_Z)^T$  – вектор уявного прискорення в проекціях на вісі пов'язаної СК, які безпосередньо вимірюються трійкою акселерометрів (збурені виміри акселерометрів).

Результуючий поворот, відповідний матриці  $A$ , можна уявити, як результат послідовності трьох поворотів на кути курсу, тангажу та крену. Тому матрицю такого повороту можна записати, як

$$A = A_\gamma \cdot A_\theta \cdot A_\psi,$$

де матриці напрямних косінусів для елементарних поворотів з урахуванням прийнятого позитивного напрямку повороту мають вигляд

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Проекції вектора  $\bar{g}_{\{X_n\}}$  визначаються співвідношеннями:

$$g_N = 0, \quad g_H = -g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+H)^2}, \quad g_E = 0,$$

де  $g_0 = 9.78049$  м/с<sup>2</sup> – модуль вектора прискорення сили тяжіння, що діє на екваторі Землі.

Проекції вектора абсолютної кутової швидкості супроводжуючого тригранника на власні осі обчислюються так:

$$\omega_N = \Omega_N + \frac{v_E}{R+H}, \quad \omega_H = \Omega_H + \frac{v_E}{R+H} \cdot tg \varphi, \quad \omega_E = -\frac{v_N}{R+H}.$$

Таким чином, задача інерціальної навігації полягає у тому, щоб отримати рішення системи рівнянь (1) – (3), маючи поточні значення  $a_X, a_Y, a_Z$  та  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$ . Початкові умови усіх дев'яти навігаційних параметрів є відомими, тому сформульована задача є задачею Коші. В інерціальних системах вона розв'язується за допомогою

спеціальних методів чисельного інтегрування, які у сукупності і складають алгоритм БІНС. Врешті решт, алгоритм БІНС – це сукупність операцій, спрямованих на чисельне інтегрування рівнянь (1) – (3), результатом якої є поточні значення кутів, швидкості та координат об'єкту.

Найголовнішою проблемою тематики є зменшення помилок визначення навігаційних параметрів, зумовлених невідомими похибками, які присутні у вимірах  $a_x, a_y, a_z$  та  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ . Це можливо зробити, якщо визначити ці похибки та компенсувати їх у наступному вмиканні системи. Але для цього необхідно знати еталонні, тобто дійсні, без помилки, значення навігаційних параметрів. Якщо не долучати зовнішні джерела інформації, це можливо, ще й в обмеженому обсязі, тільки на початку роботи системи та наприкінці, коли об'єкт перейде у кінцевий стан спокою.

Таким чином, формулюється задача визначення похибок інерціальних датчиків (в умовах наведених вище припущень) на основі крайових значень помилок деяких навігаційних параметрів, які можна в системі отримати автономно, тобто тільки на основі власних вимірів.

**Лінеаризована модель помилок інерційної навігації.** В основу розв'язання задачі покладається лінеаризована модель помилок інерційної навігації. Для її отримання проваріюємо рівняння руху (1) – (3) за змінними  $\varphi, H, \lambda, v_N, v_H, v_E, \psi, \theta, \gamma$ , а також за вимірами гіроскопів та акселерометрів. Детальне отримання такої моделі, обговорення питань її адекватності та аспектів використання дається у [25]. Тут наведемо лише вирази, необхідні для цілісності викладання і можливості відтворення формульних результатів.

I. Помилки обчислення кутів у БІНС за збуреними вимірами датчиків відповідають рівнянням

$$\begin{aligned} \delta\dot{\psi} &= -tg\theta(\omega_E \cos\psi - \omega_N \sin\psi) \cdot \delta\psi + \\ &+ \frac{1}{\cos^2\theta} [\sin\theta(\omega_Z \sin\gamma - \omega_Y \cos\gamma) - (\omega_E \sin\psi + \omega_N \cos\psi)] \cdot \delta\theta + \\ &+ \frac{1}{\cos\theta} (\omega_Z \cos\gamma + \omega_Y \sin\gamma) \cdot \delta\gamma - \frac{\cos\gamma}{\cos\theta} \delta\omega_Y + \frac{\sin\gamma}{\cos\theta} \delta\omega_Z - \\ &- tg\theta \cos\psi \cdot \delta\omega_N - tg\theta \sin\psi \cdot \delta\omega_E + \delta\omega_H; \\ \delta\dot{\theta} &= (\omega_N \cos\psi + \omega_E \sin\psi) \cdot \delta\psi + (\omega_Y \cos\gamma - \omega_Z \sin\gamma) \cdot \delta\gamma + \\ &+ \sin\gamma \cdot \delta\omega_Y + \cos\gamma \cdot \delta\omega_Z + \sin\psi \cdot \delta\omega_N - \cos\psi \cdot \delta\omega_E; \\ \delta\dot{\gamma} &= -\frac{1}{\cos\theta} (\omega_E \cos\psi - \omega_N \sin\psi) \cdot \delta\psi + \\ &+ \frac{1}{\cos^2\theta} [\omega_Z \sin\gamma - \omega_Y \cos\gamma - \sin\theta(\omega_E \sin\psi + \omega_N \cos\psi)] \cdot \delta\theta + \\ &+ tg\theta(\omega_Z \cos\gamma + \omega_Y \sin\gamma) \cdot \delta\gamma + \delta\omega_X - tg\theta \cos\gamma \cdot \delta\omega_Y + \\ &+ tg\theta \sin\gamma \cdot \delta\omega_Z - \frac{\cos\psi}{\cos\theta} \delta\omega_N - \frac{\sin\psi}{\cos\theta} \delta\omega_E; \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\delta\psi, \delta\theta, \delta\gamma$  – відповідно поточні помилки визначення кутів  $\psi, \theta$  та  $\gamma$ ;  $\delta\omega_x, \delta\omega_y, \delta\omega_z$  – похибки вимірів кутової швидкості (шуканий дрейф гіроскопів);  $\delta\omega_N, \delta\omega_H, \delta\omega_E$  – помилки обчислення

проекцій абсолютної кутової швидкості обертання супроводжуючого триграннику.

II. Для помилок географічних складових швидкості  $\bar{V} = (v_N, v_H, v_E)$  маємо:

$$\delta\dot{\bar{V}} = \delta\bar{a}_{\{x_n\}} + \delta\bar{g} + [\delta\bar{V} \times (\bar{\Omega} + \bar{\omega})] + [\bar{V} \times (\delta\bar{\Omega} + \delta\bar{\omega})], \quad (5)$$

де всі векторні величини задаються у проекціях на вісі місцевої географічної СК;  $\delta\bar{\Omega}$  – вектор помилок обчислення кутової швидкості обертання Землі у проекціях на географічні вісі;  $\bar{\omega} = (\omega_N, \omega_H, \omega_E)$ ;  $\delta\bar{\omega} = (\delta\omega_N, \delta\omega_H, \delta\omega_E)$ ;  $\delta\bar{g}$  – вектор помилок обчислення прискорення вільного падіння;  $\delta\bar{a}_{\{x_n\}}$  – вектор помилки обчисленого уявного прискорення в проекціях на географічні вісі. Він визначається власною похибкою вимірів акселерометрів та помилкою перепроєктування вектора, тобто кутовими помилками:

$$\begin{aligned} \delta\bar{a}_{\{x_n\}} &= A^T \delta\bar{a}_{\{x_c\}} + (A_\psi A_\theta)^T \bar{a}_{\{x_c\}} \delta\psi + \\ &+ (A_\psi \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} A_\psi)^T \bar{a}_{\{x_c\}} \delta\theta + (\frac{\partial A_\psi}{\partial \gamma} A_\theta A_\psi)^T \bar{a}_{\{x_c\}} \delta\gamma \end{aligned}$$

Тут  $\delta\bar{a}_{\{x_c\}}$  – вектор похибок вимірів уявного прискорення  $\bar{a}_{\{x_c\}}$  в проекціях на пов'язані вісі, тобто це є власною похибкою акселерометрів. Формульні вирази для матриць  $\frac{\partial A_\psi}{\partial \psi}, \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}, \frac{\partial A_\psi}{\partial \gamma}$  визначаються шляхом диференціювання поелементно матриць  $A_\psi, A_\theta, A_\psi$ .

III. Модель помилок обчислення широти  $\varphi$ , довготи  $\lambda$  та висоти  $H$ :

$$\begin{aligned} \delta\dot{\varphi} &= \frac{\delta V_N}{R+H}; \quad \delta\dot{H} = \delta V_H; \\ \delta\dot{\lambda} &= \frac{\delta V_E}{(R+H)\cos\varphi} + \frac{V_E \sin\varphi}{(R+H)\cos^2\varphi} \delta\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, (4)–(6) – повна модель помилок інерційної навігації. До неї лінійно входять компоненти самого вектора помилок та похибки датчиків, нелінійно входять параметри повного вектора стану БІНС (оцінки швидкості, координат, кутів), які вважаються відомими функціями часу та мають братися з вихідних даних алгоритму БІНС.

У разі відсутності помилок по висоті та вертикальній швидкості внаслідок корекції (дивись припущення) друге рівняння у векторній системі (5) та системі (6) відсутнє, та приймаються  $\delta H = 0, \delta V_H = 0$ . Тому їх надалі можна виключити з вектора помилок, додатково прийнявши  $\delta a_y = 0$ .

Наведена модель помилок покладається далі в основу алгоритма вирішення задачі автономної локалізівки.

**Формальне узагальнення моделі помилок.** У представленому вигляді конструктивно працювати з моделлю неможливо, тому потрібна її формалізація,

тобто приведення до компактного узагальненого вигляду.

Повну помилку інерціальної навігації визначимо, як 9-мірний вектор змінних у часі

$$\delta X = X_{BINS} - X_T,$$

де  $X_{BINS}(t)$  – поточне значення вектора упорядкованих споживчих параметрів (широта, висота, довгота; північна, вертикальна, східна компоненти швидкості; курс, тангаж, крен), обчислених за допомогою алгоритму БІНС;  $X_T(t)$  – дійсне, тобто ідеальне значення вектора споживчих параметрів. Вектор стану  $X_{BINS}(t)$  підкоряється векторному рівнянню

$$\dot{X}_{BINS} = f(X_{BINS}, \bar{\omega}, \bar{a}),$$

в якому  $\bar{\omega}$  – фактичний вимір (з похибкою) вектора дійсної абсолютної кутової швидкості обертання  $\bar{\omega}_T$ ,  $\bar{a}$  – фактичний вимір (з похибкою) вектора дійсного уявного прискорення  $\bar{a}_T$ ,  $f(\cdot)$  – відома вектор-функція. Перша трійка компонентів цієї функції відповідатиме правим частинам диференціальних рівнянь (3), друга трійка – правим частинам рівняння (2), третя трійка – правим частинам рівнянь (1).

Алгоритм чисельного інтегрування цих рівнянь – це і є алгоритм БІНС.

Враховуючи, що  $\bar{\omega} = \bar{\omega}_T + \delta\bar{\omega}$ ,  $\bar{a} = \bar{a}_T + \delta\bar{a}$ , для лінеаризованої моделі помилок маємо

$$\delta\dot{X} = \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{X_{BINS}} \cdot \delta X + \frac{\partial f}{\partial \bar{\omega}} \Big|_{X_{BINS}} \cdot \delta\bar{\omega} + \frac{\partial f}{\partial \bar{a}} \Big|_{X_{BINS}} \cdot \delta\bar{a}. \quad (7)$$

Частинні похідні вектор-функції  $f(\cdot)$  за вектором стану та векторами вимірювань утворюють матриці відповідних розмірностей, а параметри, зазначені після вертикальної риси, означають підстановку в цю матрицю значень вектора стану БІНС та обурених (фактичних) вимірювань. Виходячи з вигляду рівнянь (1)–(3), зазначимо, що матриці частинних похідних (матриці Якобі) є нестационарними та залежать від поточних значень вектора стану та векторів вимірювань.

Скоротимо модель, виключивши з повного вектора помилку обчислення висоти та вертикальної швидкості, а також ЗН вертикального акселерометра з вектора  $\delta\bar{a}$ .

Введемо позначення для векторів

$$\delta r = \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ \delta\lambda \end{pmatrix}, \quad \delta v = \begin{pmatrix} \delta v_N \\ \delta v_E \end{pmatrix}, \quad \delta\alpha = \begin{pmatrix} \delta\psi \\ \delta\theta \\ \delta\gamma \end{pmatrix}.$$

Тоді скорочену модель помилок у блочному вигляді можна записати так:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{r} \\ \delta\dot{v} \\ \delta\dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta v \\ \delta\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_{21} & 0 \\ 0 & B_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta\bar{a} \\ \delta\bar{\omega} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де  $A_{ij}, B_{ij}$  – матричні блоки відповідних розмірностей, які складаються з елементів матриць Якобі з (7). Конкретні вирази для елементів цих матриць можна отримати безпосередньо з (4)–(6).

Початкові значення векторів задаються виразами

$$\delta r(0) = 0, \quad \delta v(0) = 0, \quad \delta\alpha(0) = \begin{pmatrix} c_1 \cdot \delta\omega_x + c_3 \cdot \delta\omega_z \\ d_1 \cdot \delta a_x \\ d_3 \cdot \delta a_z \end{pmatrix}, \quad \text{де}$$

$\delta\omega_{x,z}, \delta a_{x,z}$  – невідомі похибки вимірювань бічних гіроскопів (дрейфи) та акселерометрів;  $c_1 = -\frac{\sin\psi}{\Omega \cos\varphi}$ ,

$c_3 = -\frac{\cos\psi}{\Omega \cos\varphi}$ ,  $d_1 = \frac{1}{g}$ ,  $d_3 = -\frac{1}{g}$  – коефіцієнти, що

обчислюються з моделі помилок початкової виставки (див. [25]);  $g$  – відомий модуль вектора прискорення вільного падіння.

Остаточно об'єднавши помилки в семивимірний

вектор  $\delta x = \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta v \\ \delta\alpha \end{pmatrix}$  та п'ятивимірний вектор похибок

датчиків  $\delta\xi = \begin{pmatrix} \delta\bar{a} \\ \delta\bar{\omega} \end{pmatrix}$ , рівняння (8) запишемо у вигляді

$$\delta\dot{x} = A(t) \cdot \delta x + B(t) \cdot \delta\xi. \quad (9)$$

Тут  $\delta x$  – скорочений вектор змінних помилок навігаційних параметрів,  $\delta\xi$  – постійний вектор невідомих похибок акселерометрів та гіроскопів; матриці  $A(t), B(t)$  – узагальнені позначення матриць в рівнянні (8) з обчислюваними для кожного моменту часу елементами.

Початкові умови для  $\delta x(0) = \delta x_0$  можна надати у вигляді, вводячи матрицю  $C_0$ :

$$\delta x_0 = C_0 \cdot \delta\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & c_3 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_z \\ \delta\omega_x \\ \delta\omega_y \\ \delta\omega_z \end{pmatrix}. \quad (10)$$

**Алгоритм отримання рішення рівняння (9).**

Рівняння (9) вирішується від нульового часу до кінцевого моменту, коли об'єкт зупинився. Під остаточною рішенням тут розуміється вираз, що пов'язує кінцеві умови для вектора  $\delta x$  з початковими умовами, а точніше з вектором похибок  $\delta\xi$ , оскільки в силу (10) вони повністю визначають початковий вектор  $\delta x_0$ .

Вважатимемо, що час змінюється дискретно з кроком  $\tau$ , та нехай  $n = 0, N$  – номер кроку. Дискретні моменти часу позначатимемо  $t_n$  і далі нижній індекс у змінних означатиме номер кроку.

Скористаємось рекурентною формулою, що відповідає методу Ейлера:

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = \delta \mathbf{x}_n + \tau \cdot (A_n \cdot \delta \mathbf{x}_n + B_n \cdot \delta \xi) = \tilde{A}_n \cdot \delta \mathbf{x}_n + \tilde{B}_n \cdot \delta \xi,$$

де  $\tilde{A}_n = E + \tau \cdot A_n$ ,  $\tilde{B}_n = \tau \cdot B_n$ ,  $E$  – одинична матриця (7x7).

Тоді для  $n = 0, 1, \dots, N$  маємо

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_1 &= \tilde{A}_0 \cdot \delta \mathbf{x}_0 + \tilde{B}_0 \cdot \delta \xi, \\ \delta \mathbf{x}_2 &= \tilde{A}_1 \cdot \delta \mathbf{x}_1 + \tilde{B}_1 \cdot \delta \xi = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_0 \cdot \delta \mathbf{x}_0 + (\tilde{A}_1 \cdot \tilde{B}_0 + \tilde{B}_1) \cdot \delta \xi, \\ &\text{і т.д., нарешті,} \\ \delta \mathbf{x}_N &= \tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_0 \cdot \delta \mathbf{x}_0 + \\ &+ (\tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_1 \cdot \tilde{B}_0 + \tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_2 \cdot \tilde{B}_1 + \dots + \tilde{A}_{N-1} \cdot \tilde{B}_{N-1}) \cdot \delta \xi \end{aligned}$$

Останній вираз у компактному вигляді запишемо так:

$$\delta \mathbf{x}_N = \Phi_{N-1} \cdot \delta \mathbf{x}_0 + \Theta_{N-1} \cdot \delta \xi, \quad (11)$$

де

$$\Phi_{N-1} = \tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_0 \quad (12)$$

$$\Theta_{N-1} = \tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_1 \cdot \tilde{B}_0 + \tilde{A}_{N-1} \times \dots \times \tilde{A}_2 \cdot \tilde{B}_1 + \dots + \tilde{A}_{N-1} \cdot \tilde{B}_{N-1}$$

– обчислювані матриці.

З точки зору алгоритмізації процесу обчислення цих матриць важливо отримати та використовувати рекурентні формули, що застосовуються на кожному кроці інтегрування.

Ці формули мають вигляд:

$$\Phi_n = \tilde{A}_n \cdot \Phi_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad \Phi_0 = \tilde{A}_0$$

$$\Theta_n = \tilde{A}_n \cdot \Theta_{n-1} + \tilde{A}_n \cdot \tilde{B}_n, \quad \Theta_0 = \tilde{B}_0. \quad (13)$$

Повертаємося до рівняння (11), що зв'язує початкові умови для помилок вектора  $\delta \mathbf{x}$  з кінцевими. Позбавимося початкових умов за допомогою (10):

$$\delta \mathbf{x}_N = \Phi_{N-1} \cdot C_0 \cdot \delta \xi + \Theta_{N-1} \cdot \delta \xi = F \cdot \delta \xi, \quad (14)$$

де  $F = \Phi_{N-1} \cdot C_0 + \Theta_{N-1}$  – обчислювана матриця (7x5). Отже, рівняння (14) є виразом для визначення вектора похибок датчиків  $\delta \xi$ .

**Визначення кінцевого значення вектора помилок за незалежними даними.** Для того, щоб з (14) знайти  $\delta \xi$ , необхідно визначити вектор  $\delta \mathbf{x}_N$  за даними, незалежним від процесу навігації, тобто з використанням додаткових вимірів та джерел.

Таких даних достатньо буде п'яти, бо усього маємо п'ять невідомих компонент вектора  $\delta \xi$ . Помилки координат  $\delta \mathbf{r}_N$  визначити інакше, ніж з (14), неможливо.

Помилки горизонтальних компонент швидкості в умовах зупинки (дійсні значення дорівнюють нулю) визначаються тривіально з результатів БНС. Помилки кутів орієнтації визначимо, залучаючи дані кінцевої виставки, бо вони незалежні від результатів власної навігації.

Розглянемо підвектор кутів помилок. Помилка обчислення в БНС кутів орієнтації наприкінці складає різницю між оцінкою самих кутів та їх справжніми значеннями

$$\delta \alpha_N = \alpha^{BINS} - \alpha^T. \quad (15)$$

Проведемо наприкінці місії процедуру гірокомпасування, в результаті якої визначимо значення кутів  $\alpha^{Allig}$ . При цьому кути будуть містити помилку, що виражається через похибки гіроскопів та акселерометрів наступним чином

$$\delta \alpha^{Allig} = \begin{pmatrix} c_1^A \cdot \delta \omega_x + c_3^A \cdot \delta \omega_z \\ d_1^A \cdot \delta a_x \\ d_3^A \cdot \delta a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_1^A & 0 & c_3^A \\ d_1^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3^A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_z \\ \delta \omega_x \\ \delta \omega_y \\ \delta \omega_z \end{pmatrix} = D \cdot \delta \xi,$$

$$\text{де } c_1^A = -\frac{\sin \psi^{Allig}}{\Omega \cos \varphi^A}, \quad c_3^A = -\frac{\cos \psi^{Allig}}{\Omega \cos \varphi^A}, \quad d_1^A = \frac{1}{g},$$

$d_3^A = -\frac{1}{g}$  – коефіцієнти, що обчислюються з моделі помилок виставки;  $\psi^{Allig}$  – кут курсу, який визначено при кінцевій виставці;  $\varphi^A$  – широта місця за даними БНС, де проводиться кінцева виставка.

Таким чином, оскільки  $\delta \alpha^{Allig} = \alpha^{Allig} - \alpha^T$ , то замість (15) можна записати

$$\delta \alpha_N = \alpha^{BINS} - \alpha^{Allig} + D \cdot \delta \xi.$$

Даний вираз містить оцінки кутів, отримані в кінці навігації та при виставці в кінцевій точці, а також невідомі похибки датчиків.

З урахуванням цього (14) можна записати у вигляді системи семи рівнянь, у правій частині якої стоять: невідома помилка визначення координат  $\delta \mathbf{r}_N$  (двовимірний вектор), відома помилка визначення відносної швидкості  $\delta \mathbf{v}_N^*$  (двовимірний вектор) та вираз для помилки визначення кутів (тривимірний вектор) з невідомим вектором  $\delta \xi$ :

$$F \cdot \delta \xi = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_N \\ \delta \mathbf{v}_N^* \\ \alpha^{BINS} - \alpha^{Allig} + D \cdot \delta \xi \end{pmatrix}. \quad (16)$$

**Закінчення розв'язання задачі.** Для закінчення необхідно вирішити систему (16) семи рівнянь щодо семи невідомих: п'яти з вектора  $\delta \xi$  та двох з вектора  $\delta \mathbf{r}_N$ . Для цього розщепимо матрицю  $F$  на три блоки  $F_1(2 \times 5); F_2(2 \times 5); F_3(3 \times 5)$  і запишемо (16) у вигляді

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \cdot \delta \xi = \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_N \\ \delta \mathbf{v}_N^* \\ \alpha^{BINS} - \alpha^{Allig} + D \cdot \delta \xi \end{pmatrix},$$

звідки маємо остаточно

$$\delta \xi = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 - D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \delta \mathbf{v}_N^* \\ \alpha^{BINS} - \alpha^{Allig} \end{pmatrix};$$

$$\delta \mathbf{r}_N = F_1 \cdot \delta \xi.$$

Отримані формули є остаточно розв'язанням задачі.

**Алгоритм рішення задачі у цілому.** Опишемо загальний алгоритм рішення поставленої задачі.

Вхідні дані:

$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$  – поточні виміри уявного прискорення в проєкціях на пов'язані вісі (м/с<sup>2</sup>) (від акселерометрів);

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – поточні виміри абсолютної кутової швидкості в проєкціях на пов'язані вісі (рад./с) (від гіроскопів);

$\psi, \theta, \gamma$  – поточні значення курсу, тангажу, крену (в рад) (з алгоритму БІНС);

$v_N, v_H, v_E$  – поточні значення північної, вертикальної та східної проєкції вектора швидкості (в м/с) (з алгоритму БІНС);

$\varphi, H, \lambda$  – поточні значення широти (рад.), висоти (м), довготи (рад.) (з алгоритму БІНС);

$\psi^{Allig}, \theta^{Allig}, \gamma^{Allig}$  – курс, тангаж, крен (в рад), отримані в результаті кінцевої виставки.

Вихідні дані:

$\delta a_x, \delta a_z, \delta \omega_x, \delta \omega_z$  – оцінки похибок  $X, Z$  акселерометрів (м/с<sup>2</sup>) та похибок  $X, Y, Z$  гіроскопів (рад./с);

$\delta r_N = (\delta \varphi, \delta \lambda)$  – оцінки помилки обчислення в алгоритмі БІНС широти та довготи в кінці місії (рад.).

Константи:

$R = 6370000$  м – радіус Землі (сферична модель);  
 $\Omega = 7292115 \cdot 10^{-11}$  рад/с – кутова швидкість обертання Землі;

$\tau$  – крок інтегрування або оновлення інформації в БІНС (с).

$E$  – одинична матриця (7x7);

$g = 9.81$  м/с<sup>2</sup> – прискорення вільного падіння.

Алгоритм:

1) За отриманими заздалегідь формулами за з урахуванням вхідних даних обчислити матриці Якобі  $A, B$ .

2) Обчислити матриці  $\tilde{A} = E + \tau \cdot A, \tilde{B} = \tau \cdot B$ .

3) Перший раз провести ініціалізацію матриць за формулами

$$\Phi = \tilde{A},$$

$$\Theta = \tilde{B}$$

та йти на вихід з алгоритму.

4) Усі інші рази обчислити матриці за формулами

$$\Phi = \tilde{A} \cdot \Phi,$$

$$\Theta = \tilde{A} \cdot \Theta + \tilde{A} \cdot \tilde{B}.$$

5) Якщо даних з кінцевої виставки ще немає, йти на вихід з алгоритму.

6) Інакше обчислити матрицю (7x5)

$$F = \Phi \cdot C_0 + \Theta$$

та розбити її на три підматриці

$$F_1(2 \times 5); F_2(2 \times 5); F_3(3 \times 5) : \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

7) Скласти вектор  $\delta V^* = \begin{pmatrix} v_N \\ v_E \end{pmatrix}$  – кінцевих

значень швидкості за даними БІНС;

вектор  $\alpha^{BINS} = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \\ \gamma \end{pmatrix}$  – кінцевих значень кутів за

даними БІНС;

вектор  $\alpha^{Allig} = \begin{pmatrix} \psi^{Allig} \\ \theta^{Allig} \\ \gamma^{Allig} \end{pmatrix}$  – значень кутів за даними

кінцевої виставки.

8) Обчислити

$$\delta \xi = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 - D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \delta V^* \\ \alpha^{BINS} - \alpha^{Allig} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_z \\ \delta \omega_x \\ \delta \omega_y \\ \delta \omega_z \end{pmatrix}$$

9) Обчислити  $\delta r_N = F_1 \cdot \delta \xi$ .

10) Кінець алгоритму.

Наведений алгоритм реалізується на кожному кроці інтегрування або оновлення інформації з датчиків. Робота алгоритму буде результативною тільки за умови наявності наприкінці ділянки спокою та готовності даних кінцевої виставки.

**Дослідження розробленого алгоритму.** Метою дослідження розробленого алгоритму є:

- аналіз адекватності лінеаризованої моделі фактичним помилкам інерціальної навігації;
- отримання точності оцінок похибок датчиків та помилок координат у залежності від дійсних похибок датчиків;
- оцінка результативності використання докалібровки з точки зору точності навігації при наступному вмиканні.

Зупинимось на кожному зі вказаних завдань.

**Аналіз адекватності** лінеаризованої моделі помилок їх фактичним значенням здійснюється моделюванням процесу інерціального числення в ідеальних умовах (похибки датчиків нульові) і в збурених умовах, коли до ідеальних вимірів додаються похибки.

Моделювання здійснюється шляхом інтегрування рівнянь (1)–(3) при ідеальних вимірах та при збурених. Різниця таких двох реалізацій дає для кожного споживчого параметру фактичну помилку інерціальної навігації.

З іншого боку, здійснюється інтегрування моделі помилок (4)–(6), в якій також використовуються результати роботи збуреного БІНС. Отримані оцінки порівнюються із фактичними помилками інерціальної навігації. Якщо ці дві залежності добре збігаються, можна зробити висновок стосовно адекватності лінеаризованої моделі помилок.

Встановлення адекватності моделі є важливою умовою ефективності розробленого алгоритму у цілому. Це пов'язане з тим, що фактичні помилки при експлуатації БІНС нам не відомі, але їх оцінки ми можемо отримати з лінеаризованої диференціальної моделі. Але якщо модель розбігається із фактичними значеннями помилок в такому алгоритмі немає ніякого сенсу.

Для проведення досліджень з ефективності розробки за методикою, викладеною у [26], був

згенерований штучний набір даних, який містять імітовані виміри гіроскопів та акселерометрів та еталонні значення усіх навігаційних параметрів, що відповідають деякій типовій програмі польоту важкого літака. Тривалість імітованого польоту складає близько 5 годин.

На основі імітованих даних проведено моделювання для різних параметрів похибок датчиків. Зокрема, розглянуто два набори похибок гіроскопів та акселерометрів (табл.1)

Таблиця 1 - Характеристики інерціальних датчиків, що розглядаються

№ набору	дрейф гіроскопів, °/год.			зсув нуля акселерометрів, $g \cdot 10^{-6}$		
	$\delta\omega_x$	$\delta\omega_y$	$\delta\omega_z$	$\delta a_x$	$\delta a_y$	$\delta a_z$
1	0,03	0,02	-0,01	40	0	30
2	0,3	0,5	-0,04	400	0	500

Перший набір можна віднести до навігаційного класу датчиків, другий – до середнього класу датчиків.

Результати порівняння наведені на рис.1,2. Перший рисунок стосується порівнянню оцінок по широті, другий – по довготі. Наведені залежності відносно часу дані у метрах, час – у секундах. Далі прокоментуємо обидва рисунки разом.

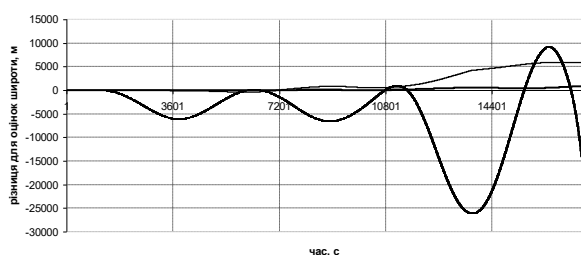


Рис. 1 – Розбіжність оцінок широти між диференціальною моделлю та фактичними значеннями для різних умов

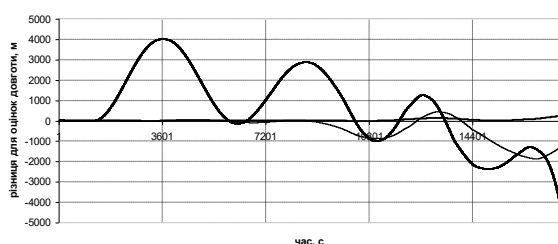


Рис. 2 – Розбіжність оцінок довготи між диференціальною моделлю та фактичними значеннями для різних умов

Найтемніша крива (перший набір датчиків) ледве помітна, оскільки вона проходить близько до нуля. Вона відповідає різниці між модельованою за диференціальними рівняннями (4)–(6) помилкою координати та фактичною помилкою. Близкість до нуля такої різниці свідчить про високу адекватність моделі в цих умовах, яка зберігається усю тривалість польоту.

Крива середньої товщини відповідає другому набору датчиків і має той же самий сенс. Очевидно, що для датчиків середнього класу точності адекватність моделі не викликає сумнівів майже три години роботи БІНС, після чого помітно гіршає. Таким чином, якщо в системі використовуються саме датчики середнього класу точності, розроблений алгоритм докалібрування може бути ефективним тільки перші 2–3 години.

Обидві криві отримані за умов, що алгоритм накопичування матриць  $\Phi$ ,  $\Theta$  працюватиме із максимальною частотою, тобто 100 Гц у даному разі. Але така частота обробки інформації може призводити до перевантажування обчислювача, тому важливо встановити, чи не можна збільшити крок інтегрування без втрати адекватності моделі. Результати такого моделювання для кроку 1 с відображені у вигляді найтонших кривих. З них видно, що адекватність моделі відносно фактичних значень помилок (наведено для другого набору датчиків) незадовільна вже через 30 хвилин функціонування, а точніше відразу після початку руху об'єкта.

Таким чином, по-перше, при максимальній частоті інтегрування адекватність моделі має місце для широкого спектру характеристик датчиків; по-друге, збільшення кроку інтегрування при реалізації розробленого алгоритму неможливе.

Наступна мета аналізу – **отримання точності оцінок** похибок датчиків та помилок координат у залежності від дійсних похибок датчиків.

Для отримання результатів була проведена серія обчислювальних експериментів при різних дійсних значеннях похибок датчиків.

Аналіз результатів проводився за такими критеріями:

- точність отриманих за алгоритмом оцінок похибок, що задаються для горизонтальних (X, Z) акселерометрів;
- точність отриманих за алгоритмом оцінок похибок, що задаються для всіх трьох гіроскопів;
- точність отриманої за алгоритмом оцінки кінцевої помилки числення координат та відповідно залишкова кінцева помилка, якщо провести корекцію



кінцевих координат згідно отриманої оцінки.

Результати моделювання наведені в таблиці 2.

Структура даних у таблиці 2 така:

*другий стовпець* – дійсні значення похибок X та Z акселерометрів, що задаються;

*третьої стовпець* – оцінка цих параметрів, яка отримана за допомогою розробленого алгоритму при частоті інтегрування 100 Гц;

*четвертий та п'ятий стовпці* – ті ж самі характеристики, але для похибок X, Y, Z гіроскопів;

*шостий та сьомий стовпці* – дійсна кінцева помилка БІНС та її оцінка за розробленим алгоритмом;

*восьмий стовпець* – залишкова помилка координат, якщо скористатись отриманою оцінкою та відповідно скоригувати кінцеві значення широти та довготи.

Кожна стрічка таблиці відповідає своєму набору похибок датчиків. У якості датчиків використовувались як датчики навігаційного класу, так і датчики середнього класу точності та їх комбінації. З моделювання можна зробити такі **висновки**:

- Алгоритм, що випробується, дає правдоподібні оцінки похибок акселерометрів та гіроскопів для будь-яких дійсних характеристик датчиків, а залишкова помилка визначення координат (після компенсації за підсумками алгоритму) у разі (до 10 разів) менша за помилку збуреного БІНС.

- Для високоточних датчиків абсолютна залишкова похибка у найгіршому разі трохи більше 1 км, в багатьох випадках – набагато менша. Для середнього класу датчиків абсолютна залишкова похибка може досягати десятків кілометрів, але у будь-якому разі набагато менша, ніж кінцева помилка для збуреного БІНС.

Таким чином, результати демонструють високу точність визначення похибок датчиків та кінцевої помилки координат для широкого спектру характеристик датчиків, що робить доцільним його використання в реальних системах.

Нарешті, останній обчислювальний експеримент присвячено **оцінці результативності використання докалібрування** з точки зору точності навігації при наступному вмиканні.

На тій же траєкторії польоту моделюється робота БІНС з датчиками, характеристики яких відповідають набору №10 (табл.2), та з датчиками, похибки яких компенсовані за рахунок оцінок, отриманих при докалібруванні. Ці оцінки також наведені у третьому та п'ятому стовпцях табл.2. Динаміка помилок широти та довготи під час польоту наведена на рис.3,4. На них ширша крива – це результат роботи БІНС з урахуванням отриманих оцінок (тобто з компенсацією похибок), тонша крива – результат роботи збуреного БІНС без компенсації похибок.

Таблиця 2 – Кінцеві показники роботи алгоритму для різних характеристик датчиків

№ набору	Дійсні похибки X/Z - АК, $\mu\text{G}$	Оцінка похибок X/Z - АК, $\mu\text{G}$	Дійсні похибки X/Y/Z- гіроскопів, $^{\circ}/\text{год.}$	Оцінка похибок X/Y/Z - гіроскопів, $^{\circ}/\text{год.}$	Дійсні кінцеві помилки визначення широти/довготи в збуреному БІНС, м	Оцінка кінцевих помилок визначення широти/довготи, м	Залишкові кінцеві помилки визначення широти/довготи, м
1	0/0	0/0	0/0/0	0/0/0	0/0	-17/-17	17/17
2	-20/-20	-22/-17	0,003/-0,007/0,005	0,004/-0,007/0,005	1310/2240	1090/2170	220/70
3	-30/50	-30/53	0,003/-0,007/0,005	0,002/-0,007/0,005	1390/640	1640/840	-250/-200
4	-30/50	-22/59	0,01/0/-0,007	0,010/0,001/-0,007	180/-3280	910/-2880	-730/-400
5	-30/50	-21/58	0,01/0,02/-0,01	0,010/0,020/-0,010	3420/-3360	4040/-3000	-620/-360
6	30/-50	30/-58	-0,01/0,02/-0,01	-0,010/0,020/-0,010	-1880/-2250	-2400/-2570	520/320
7	40/-70	23/-55	0,02/-0,05/0,03	0,021/-0,050/0,032	3480/11500	3770/11560	-290/-60
8	100/100	87/110	0,02/-0,05/0,03	0,018/-0,049/0,033	2100/7400	4360/8210	-2260/-810
9	100/100	71/195	0,1/-0,5/0,08	0,096/-0,495/0,093	-60000/5900	-54100/9300	-5900/-3400
10	400/-200	384/-248	-0,05/0,1/-0,03	-0,050/0,106/-0,027	-6930/-6260	-5420/-5630	-1510/-630
11	-300/-200	-108/71	0,2/-0,5/-0,3	0,227/-0,454/-0,265	-160300/-126800	-131300/-113800	-29000/-13000

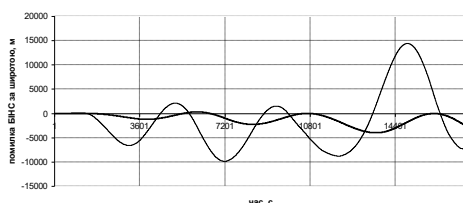


Рис. 3 – Помилка визначення широти під час польоту в збуреному БІНС та в БІНС з компенсацією похибок

Очевидним є той факт, що точність роботи БІНС в разі компенсації набагато вища, ніж без неї. Таким чином, має місце підвищення точності функціонування БІНС за рахунок використання алгоритму автономного докалібрування.

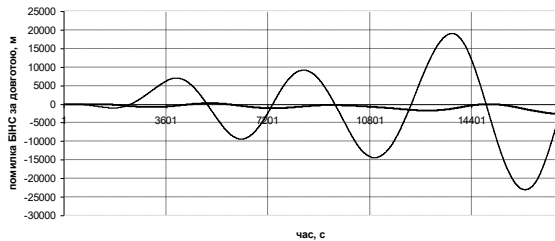


Рис. 4 – Помилка визначення довготи під час польоту в збуреному БІНС та в БІНС з компенсацією похибок

**Висновки.** Запропоновано технологію автономного докалібрування інерціальної навігаційної системи, яке здійснюється без зовнішніх джерел інформації. У разі його реалізації за розробленим алгоритмом визначаються оцінки похибок інерціальних датчиків та кінцевих значень помилки визначення в БІНС координат. Чисельне моделювання доводить працездатність алгоритму, достовірність оцінок для широкого спектру характеристик датчиків та доцільність використання розробленої технології, тому що вона створює умови для підвищення точності БІНС без додаткового вдосконалення приладової частини системи. Результати можуть зацікавити спеціалістів в області інерціальної навігації та навігаційних систем.

#### Список літератури

1. Впровадження навігації, заснованої на характеристиках (PBN). Стратегія України та план впровадження на 2013 – 2025 роки (Редакція 1.0). 2013. <https://avia.gov.ua/wp-content/uploads/2017/12/Strategiya-ta-plan-vprovadzhennya-PBN.pdf>.
2. *Pai, K. R.* A review on Inertial navigational systems. / *K. R. Pai, N. Marakala* // 2016 International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT), Chennai, India, 2016, pp. 1682-1686. doi: 10.1109/ICEEOT.2016.7754971.
3. *Klimkovich, B. V.* SINS calibration in inertial mode. Combination of velocity and scalar methods / *B. V. Klimkovich* // *Gyroscopy and Navigation* - 2015, 6, pp. 25–32. doi.org/10.1134/S2075108715010071
4. *Cai, Q.* Systematic calibration for ultra-high accuracy inertial measurement units / *Q. Cai, G. Yang* (2016). doi.org/10.3390/s16060940.
5. *Avrutov, V.V.* Calibration of an Inertial Measurement / *V. V. Avrutov, A. N. Sapegin, Z. S. Stefanishin, et al.* // *Unit. Int. Appl. Mech.* - 2017. - #53, pp. 228–236. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0808-4>
6. *Філяшкін, М. К.* Інерціально-супутникові навігаційні системи: навч. посіб. / *М. К. Філяшкін, В. О. Рогожин, А. В. Скрипеч, Т. І. Лукінова* – К.: Вид-во Нац. Авіа. Ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 272 с.
7. *Васильєв, В. М.* Схема комплексування інерціальної і супутникової навігаційних систем та її дослідження / *В. М. Васильєв, В. О. Рогожин, Б. І. Долінце* // *Проблеми створення, випробування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем.* - 2013. - Вип. 8. - С. 20-25. - Режим доступу: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Psvz\\_2013\\_8\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Psvz_2013_8_5)
8. Assured-Integrity Monitored-Extrapolation Navigation Apparatus / *John W. Diesel.* US Patent 5,583,774. 1996.
9. *Бурдейний, М. В.* Підвищення точності визначення параметрів траєкторії безпілотних літальних апаратів шляхом комплексування навігаційної інформації з використанням методу максимальної правдоподібності / *М. В. Бурдейний, М. В. Коробчинський* // *Науковий вісник НЛТУ України.* – 2014. – Вип. 24.9. С.336-341.
10. *Захарін, Ф. М.* Алгоритмічне забезпечення інерціально-супутникових систем навігації: монографія / *Ф. М. Захарін, В. М. Синєглов, М. К. Філяшкін* – К.: Вид-во "НАУ-друк", 2011. – 320 с.
11. *Golovan, A. A.* INS/Odometer Integration: Positional Approach / *A. A. Golovan* // *Gyroscopy and Navigation.* - 2021. - # 12. - Pp. 186–194. doi.org/10.1134/S2075108721020048
12. *Ostrowski* Underwater Navigation System Based on Doppler Shift – Measurements and Error Estimations / *Ostrowski, Zawisza & Salamon, Roman & Kochanska, Iwona & Marszal, Jacek* // *Polish Maritime Research.* - 2020. - 27. - Pp. 180-187. 10.2478/pomr-2020-0019.
13. *Miao, C. X.* MEMS-SINS/GPS/Magnetometer Integrated Navigation System for Small Unmanned Aerial Vehicles / *C. X. Miao, J. J. Cao, Y. B. Ou* // *Applied Mechanics and Materials.* – 2014. – Vol. 568–570. – Pp. 976–986.
14. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.568-570.976>
15. *Shen* Optical Flow Sensor/INS/Magnetometer Integrated Navigation System for MAV in GPS-Denied Environment / *Shen, Chong & Bai, Zesen & Cao, Huiliang & Xu, Ke & Wang, Chenguang & Zhang, Huaiyu & Wang, Ding & Tang, Jun & Liu, Jun* // *Journal of Sensors.* 2016. Pp.1-10. 10.1155/2016/6105803.
16. *Hajiyev* Data Fusion for Integrated Baro/GPS Altimeter / *Hajiyev, Chingiz & Hacizade, Ulviye & Cilden Guler, Demet* // *Conference: 2019 9th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST).* - Pp. 881-885. DOI:10.1109/RAST.2019.8767791
17. *Zhang L, Zhai Z, He L, Wen P, Niu W.* Infrared-Inertial Navigation for Commercial Aircraft Precision Landing in Low Visibility and GPS-Denied Environments / *L. Zhang, Z. Zhai, L. He, P. Wen, W. Niu* // *Sensors.* - 2019. - 19(2):408. <https://doi.org/10.3390/s19020408>
18. *Santosh A.* Hiremath Laser range finder model for autonomous navigation of a robot in a maize field using a particle filter / *Santosh A. Hiremath, Gerie W.A.M. van der Heijden, Frits K. van Evert, Alfred Stein, Cajo J.F. ter Braak* // *Computers and Electronics in Agriculture.* - Vol. 100. - 2014. - Pp. 41-50. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2013.10.005>.
19. *Krylov A. A.* Comparative analysis of calibration variants for inertial measurement unit based on microelectromechanical system / *A. A. Krylov, K. K. Veremeenko* // 18th International Conference "Aviation and Cosmonautics" (AviaSpace-2019). IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 868 (2020) 012037. doi:10.1088/1757-899X/868/1/012037
20. *Poddar S.* A Comprehensive Overview of Inertial Sensor Calibration Techniques / *S. Poddar, V. Kumar, A. Kumar* // *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme,* 2017, 139, 011006.
21. *Dong Chunmei* A System-level Calibration Method for Laser Gyro SINS / *Dong Chunmei, Ren Shunqing, Chen Xijun, Li Wei* // *Acta Armamentarii.* - 2019. - 40(8). -Pp. 1618-1626. <http://www.cjournal.com/EN/10.3969/j.issn.1000-1093.2019.08.009>
22. *Zhang H.* A Multi-Position Calibration Algorithm for Inertial Measurement Units / *H. Zhang, Yu Wu, M. Wu, Xi Hu, Ya Zha* // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit (Honolulu, Hawaii).* - 2008. - 15. doi: 10.2514/6.2008-7437
23. *Chernyak N. G.* Instrumental errors of navigation accelerometer nonlinear metrological model's coefficients identification by test-positioning method in terrestrial gravitational field / *N. G. Chernyak, V. V. Rybak, S. V. Terokhin* // *Інформаційні системи, механіка та керування* – Київ, 2014. – №11. – С.92-101.
24. *Бромберг П. В.* Теория инерциальных систем навигации / *П. В. Бромберг.* – М.: Наука. – 1979. – 296 с.
25. *Анучин О. Н.* Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / *О. Н. Анучин, Г. И. Емельяничев* / Под общей ред. чл.-кор. РАН В. Г. Пешехонова. – СПб., 1999. – 357 с.
26. *Успенский В. Б.* Математические основы инерциальной навигации: учеб. пособ. / *В. Б. Успенский, О. А. Татарникова.* – Х.: Изд-во «Підручник НТУ «ХП»», 2017. – 192 с.
27. *Успенский В. Б.* Имитационная модель движения летательного аппарата / *В. Б. Успенский* // *Вісник інженерної академії України.* – Київ, 2001. – №3 (Частина 2), КВ№2635. – С.59-62.

## References (transliterated)

1. Vprovadzhennya navihatsiyi, zasnovanoyi na kharakterystykakh (PBN). Stratehiya Ukrayiny ta plan vprovadzhennya na 2013 – 2025 roky (Redaktsiya 1.0). 2013. <https://avia.gov.ua/wp-content/uploads/2017/12/Strategiya-ta-plan-vprovadzhennya-PBN.pdf>.
2. *Pai, K. R.* A review on Inertial navigational systems, / *K. R. Pai, N. Marakala* // 2016 International Conference on Electrical, Electronics, and Optimization Techniques (ICEEOT), Chennai, India, 2016, pp. 1682-1686. doi: 10.1109/ICEEOT.2016.7754971.
3. *Klimkovich, B. V.* SINS calibration in inertial mode. Combination of velocity and scalar methods / *B. V. Klimkovich* // Gyroscopy and Navigation - 2015, 6, pp. 25–32. doi.org/10.1134/S2075108715010071
4. *Cai, Q.* Systematic calibration for ultra-high accuracy inertial measurement units / *Q. Cai, G. Yang* (2016). doi.org/10.3390/s16060940.
5. *Avrutov, V. V.* Calibration of an Inertial Measurement / *V. V. Avrutov, A. N. Sapegin, Z. S. Stefanishin, et al.* // Unit. Int. Appl. Mech. - 2017. - #53, pp. 228–236. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0808-4>
6. *Filyashkin, M. K.* Inertsial'no-suputnykovi navihatsiyi systemy: navch.posib. / *M. K. Filyashkin, V. O. Rohozhyn, A. V. Skrypets', T. I. Lukinova* – K.: Vyd-vo Nats. Avia. Un-tu «NAU-druk», 2009. – 272 s.
7. *Vasyl'yev, V. M.* Skhema kompleksuvannya inertsial'noyi i suputnykovoyi navihatsiyinykh system ta yiyi doslidzhennya / *V. M. Vasyl'yev, V. O. Rohozhyn, B. I. Dolintse* // Problemy stvorennya, vyprovuvannya, zastosuvannya ta ekspluatatsiyi skladnykh informatsiyinykh system. - 2013. - Vyp. 8. - S. 20-25. - Rezhym dostupu: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Psvz\\_2013\\_8\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Psvz_2013_8_5)
8. Assured-Integrity Monitored-Extrapolation Navigation Apparatus / *John W. Diesel*. US Patent 5,583,774. 1996.
9. *Burdeynyy, M. V.* Pidvyshchennya tochnosti vyznachennya parametriv trayektoriyi bezpilotnykh lital'nykh aparativ shlyakhom kompleksuvannya navihatsiyinoyi informatsiyi z vykorystannyam metodu maksimal'noyi pravdopodobnosti / *M. V. Burdeynyy, M. V. Korobchyn's'kyi* // Naukovyy visnyk NLTU Ukrayiny. – 2014. – Vyp. 24.9. S.336-341.
10. *Zakharin, F. M.* Alhorytmichne zabezpechennya inertsial'no-suputnykovykh system navihatsiyi: monohrafiya / *F. M. Zakharin, V. M. Symyehlazov, M. K. Filyashkin* – K. : Vyd-vo "NAU-druk", 2011. – 320 s.
11. *Golovan, A. A.* INS/Odometer Integration: Positional Approach / *A. A. Golovan* // Gyroscopy and Navigation. - 2021. - # 12. - Pp. 186–194. doi.org/10.1134/S2075108721020048
12. *Ostrowski* Underwater Navigation System Based on Doppler Shift – Measurements and Error Estimations / *Ostrowski, Zawisza & Salamon, Roman & Kochanska, Iwona & Marszal, Jacek* // Polish Maritime Research. - 2020. - 27. - Pp. 180-187. 10.2478/pomr-2020-0019.
13. *Miao, C. X.* MEMS-SINS/GPS/Magnetometer Integrated Navigation System for Small Unmanned Aerial Vehicles / *C. X. Miao, J. J. Cao, Y. B. Ou* // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – Vol. 568–570. – Pp. 976–986. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.568-570.976>
14. *Shen* Optical Flow Sensor/INS/Magnetometer Integrated Navigation System for MAV in GPS-Denied Environment / *Shen, Chong & Bai, Zesen & Cao, Huiliang & Xu, Ke & Wang, Chenguang & Zhang, Huaiyu & Wang, Ding & Tang, Jun & Liu, Jun* // Journal of Sensors. 2016. Pp.1-10. 10.1155/2016/6105803.
15. *Hajiyev* Data Fusion for Integrated Baro/GPS Altimeter / *Hajiyev, Chingiz & Hacizade, Ulviye & Cilden Guler, Demet* // Conference: 2019 9th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST). - Pp. 881-885. DOI:10.1109/RAST.2019.8767791
16. *Zhang, L.* Infrared-Inertial Navigation for Commercial Aircraft Precision Landing in Low Visibility and GPS-Denied Environments / *L. Zhang, Z. Zhai, L. He, P. Wen, W. Niu W* // Sensors. - 2019. - 19(2):408. <https://doi.org/10.3390/s19020408>
17. *Santosh, A.* Laser range finder model for autonomous navigation of a robot in a maize field using a particle filter / *Santosh A. Hiremath, Gerie W.A.M. van der Heijden, Frits K. van Evert, Alfred Stein, Cajo J. F. ter Braak* // Computers and Electronics in Agriculture. - Vol. 100. - 2014. - Pp. 41-50. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2013.10.005>.
18. *Krylov, A. A.* Comparative analysis of calibration variants for inertial measurement unit based on microelectromechanical system / *A. A. Krylov, K. K. Veremeenko* // 18th International Conference "Aviation and Cosmonautics" (AviaSpace-2019). IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 868 (2020) 012037. doi:10.1088/1757-899X/868/1/012037
19. *Poddar, S. A.* Comprehensive Overview of Inertial Sensor Calibration Techniques / *S. Poddar, V. Kumar, A. Kumar* // Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme, 2017, 139, 011006.
20. *Dong Chunmei* A System-level Calibration Method for Laser Gyro SINS / *Dong Chunmei, Ren Shunqing, Chen Xijun, Li Wei* // Acta Armamentarii. - 2019. - 40(8). -Pp. 1618-1626. <http://www.cjournal.com/EN/10.3969/j.issn.1000-1093.2019.08.009>
21. *Zhang, H.* A Multi-Position Calibration Algorithm for Inertial Measurement Units / *H. Zhang, Yu Wu, M. Wu, Xi Hu, Ya Zha* // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit (Honolulu, Hawaii). - 2008. - 15. doi: 10.2514/6.2008-7437
22. *Chernyak, N. G.* Instrumental errors of navigation accelerometer nonlinear metrological model's coefficients identification by test-positioning method in terrestrial gravitational field / *N. G. Chernyak, V. V. Rybak, S. V. Terokhin* // Інформаційні системи, механіка та керування – Київ, 2014. – №11. – С.92-101.
23. *Bromberg, P. V.* Teoriya inertsial'nykh sistem navigatsii / *P. V. Bromberg*. – M.: Nauka. – 1979. – 296 s.
24. *Anuchin, O. N.* Integrirovannyye sistemy oriyentatsii i navigatsii dlya morskikh podvizhnykh ob'yektov / *O. N. Anuchin, G. I. Yemel'yantsev* / Pod obshchey red. chl.-kor. RAN V. G. Peshekhonova. – SPb., 1999. – 357 s.
25. *Uspenskiy, V. B.* Matematicheskiye osnovy inertsial'noyi navigatsii: ucheb. posob. / *V. B. Uspenskiy, O. A. Tatarinova*. – KH.:Izd-vo «Pidruchnik NTU «KHP»», 2017. – 192 s.
26. *Uspenskiy V. B.* Imitatsionnaya model' dvizheniya letatel'nogo apparata / *V. B. Uspenskiy* // Visnik inzhenernoyi akademii Ukraini. – Київ, 2001. – №3 (Chastina 2), KV№2635. – S.59-62.

Надійшла (received) 30.01.2023

## Відомості про авторів / About the Authors

**Успенський Валерій Борисович (Uspenskiy Valerii Borysovych)** – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5960-7347>; e-mail: [Valerii.Uspenskiy@khp.edu.ua](mailto:Valerii.Uspenskiy@khp.edu.ua)