

В.М.ГРИЩЕНКО**УНІВЕРСАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЛІНІЙНОГО ТА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ В ЗАДАЧАХ КОНТАКТНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ВАНТОВИХ СПОРУД З ОДНОСТОРОННІМИ ЗВ'ЯЗКАМИ**

DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270862

Проблем у виробничій діяльності, що потребують рішення задач оптимізації, надзвичайно багато і вони дуже різноманітні. Оптимізаційні підходи найчастіше пов'язані з пошуком найкращого варіанту конструкції або споруди. Математичні методи розв'язання таких проблем стрімко розвиваються та знаходять широке застосування. Вони активно та продуктивно проникають в багато областей наукових досліджень, в інженерно-конструкторські розробки, є важливим інструментом підвищення ефективності проектування на протязі всього процесу створення конструкцій. Пошук найкращого проектного рішення зводиться до підбору сукупності параметрів, які надають стаціонарне значення функції цілі. Широке коло екстремальних задач практичної орієнтації, як правило, в математичних моделях містить обмеження на параметри проектування типу рівності-нерівності. Загалом їх множина складає зміст такого розділу математики як Математичне програмування. Через те, що не існує єдиного методу вирішення, сформувався розрізненість у підходах дослідження, яка поділяє їх на групи, класи, тощо. Лінійне програмування (ЛП), як один з розділів, з лінійною цільовою функцією та обмеженнями добре вивчене та знаходить успішне застосування. Методи рішення задач нелінійного програмування, до якого відноситься квадратичне, більш складні. І тому розробка зручних обчислювальних схем є актуальною. Суть даної роботи полягає в тому, що постановки 2-х задач оптимізації формалізовані в єдиній та зручній формі симетричної матричної залежності, що дає змогу отримати ефективний (на наш погляд) алгоритм їх реалізації. А саме запропонована єдина схема рішення як задач ЛП так і КП на базі операцій матричної алгебри. Квадратичне програмування (КП), як другий розділ, також має широкі можливості, зокрема, дозволяє розглядати практичні задачі обчислення НДС в механіці деформованого твердого тіла в умовах контактної взаємодії. До таких проблем, зокрема, відносяться вантові споруди з односторонніми зв'язками та довжинами прольотів, які можуть досягати десятки-сотні метрів. В якості прикладу розглянута поведінка модельної вантової прольотної споруди при варіаціях вітрових навантажень. Приведені результати можуть бути цікавими для спеціалістів.

Ключові слова: лінійне та квадратичне програмування, оптимальне проектування, вантові споруди, односторонні зв'язки

V.M. GRISCHENKO**UNIVERSAL ALGORITHM OF LINEAR AND QUADRATIC PROGRAMMING IN THE PROBLEMS OF CONTACT DEFORMATION OF CABLE STRUCTURES WITH ONE-SIDED CONNECTIONS**

Problems in production activities that require optimization problems are extremely numerous and very diverse. Optimization approaches are most often associated with the search for the best version of a structure or building. Mathematical methods for solving such problems are developing rapidly and are widely used. They actively and productively penetrate into many areas of scientific research, into engineering and design developments, are an important tool for improving design efficiency throughout the entire process of creating structures. The search for the best design solution is reduced to the selection of a set of parameters that provide a stationary value of the objective function. A wide range of extreme problems of practical orientation, as a rule, in mathematical models contains restrictions on design parameters of the equality-inequality type. In general, their set makes up the content of such a section of mathematics as Mathematical Programming. Due to the fact that there is no single solution method, diversity in research approaches has formed, which divides them into groups, classes, etc. Linear programming (LP), as one of the sections, with a linear objective function and constraints is well studied and successfully applied. Methods of solving problems of nonlinear programming, which includes quadratic programming, are more complex. Therefore, the development of convenient computational schemes is relevant. The essence of this work is that the statements of 2 optimization problems are formalized in a single and convenient form of a symmetric matrix dependence, which makes it possible to obtain an effective (in our opinion) algorithm for their implementation. Namely, a unified scheme for solving both LP and KP problems based on matrix algebra operations is proposed. Quadratic programming (QP), as the second section, also has wide possibilities, in particular, it allows considering the practical tasks of calculating VAT in the mechanics of a deformed solid body under the conditions of contact interaction. Such problems, in particular, include cable-stayed structures with one-way connections and span lengths that can reach tens or hundreds of meters. As an example, the behavior of a model cable-stayed span structure under varying wind loads is considered. The given results may be of interest.

Keywords: linear and quadratic programming, optimal design, cable-stayed structures, one-way connections

Вступ. Роль машинобудування, що пов'язана зі створенням та експлуатацією машин, є визначальною для розвитку промисловості. Розроблено велику кількість механізмів різноманітних за конструкцією, принципами роботи, призначенням і т. д. Це стосується також і споруд. Для успішного проектування таких об'єктів важливу роль відіграє моделювання та аналіз поведінки в характерних режимах роботи. Цей аналіз дає можливість отримати повне розуміння тих процесів, які супроводжують їх роботу.

В механіці деформованого твердого тіла детально розроблені та широко використовуються моделі складних конструкцій, які розглядаються як єдине тіло, без врахування взаємного руху одних частин по відношенню до інших. В реальних спорудах, механізмах при передачі енергії між ланками, як правило, виникають

складні задачі деформування як з двосторонніми так і односторонніми зв'язками – контактні взаємозв'язки. Сучасні тенденції розвитку техніки вказують на необхідність розробки методів обчислення НДС в механізмах як набору ланок реалістичної форми (металоконструкцій, агрегатів, з'єднань, та іншого), що контактують між собою. В залежності від характеру контактування відбувається перерозподіл навантажень в кінематичних парах, з'єднаннях. Відбуваються зміни не тільки в зонах контакту, але і перерозподіл по всій конструкції.

Поряд з цим в практичній площині актуальними постають також питання раціонального та оптимального проектування таких об'єктів (Орті). Наприклад, в динаміці машин це задачі кінематичного, геометричного синтезу механізмів.

З ростом складності об'єктів техніки, коли необхідно становиться оцінка різних варіантів конструктивних форм, засобом рішення таких задач є математичний апарат методів оптимізації. Ціль розрахунків може полягати, наприклад, у виборі розмірів елементів схем механізмів та споруд, їх параметрів, при забезпеченні обмежень на рухи вихідної та проміжних ланок машини, та які забезпечують екстремум цільової функції. В якості критеріїв цілі можуть виступати габарити, маса конструкції, витрати енергії, траєкторія руху, швидкодія і інші.

Сучасні засоби САПР активно використовують програмні засоби для вибору найкращого варіанту. Математичний апарат як для рішення контактних задач так і для задач оптимального проектування містить однакові формалізовані блоки. Потрібно також відмітити, що велика кількість актуальних прикладних задач контактування лінійно деформованих ланок машин відноситься до задач квадратичного програмування і може бути вирішена за скінченне число операцій.

Для визначення оптимальних рішень задач лінійного (ЛП) та квадратичного програмування (КП) розроблено різні підходи, схеми. Оpubліковано багато робіт з обґрунтуванням їх роботи, приводяться етапи реалізації, принципи організації, модифікації. Можна сказати, що їх робота пов'язана з аналізом перетворень симплекс-таблиць в різних формах. В той же час матрична алгебра надає універсальні інструменти роботи з табличними даними. Виникає прагнення при розв'язанні практичних задач формалізувати математичний апарат їх рішення у зручній матричній формі.

В даній роботі формалізована єдина схема пошуку оптимальної точки як для задач ЛП так і для випадку квадратичного функціоналу. Загальний алгоритм спирається на розрахункову систему лінійних алгебраїчних рівнянь, побудованих на основі умов оптимальності з орієнтацією на чисельний симплекс-підхід. Демонстрацію роботи приведеної схеми розглянуто на прикладі рішення простої задачі ЛП. Прикладом аналізу задач квадратичного програмування в умовах контактування лінійно деформованих тіл є розрахунок НДС модельної вантової мостової конструкції з односторонніми зв'язками в вантах.

1. Постановка задачі нелінійного програмування (НП). Теоретичні та обчислювальні аспекти пошуку оптимального рішення викладені в багато чисельній літературі [1,2,8-16]. В загальному випадку задача НП полягає в тому, щоб знайти точку мінімуму x^* цільової функції $f(x)$ від n змінних:

$$f(x^*) = \min f(x), \quad (x \in \Omega);$$

де допустима точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ належить області Ω , яка обмежена m умовами рівності:

$$\omega_j(x) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad m < n;$$

та s умовами нерівності:

$$\Omega_j(x) \leq 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

$$\Omega = \{x \in R_n; \omega_j = 0, (j = 1, \dots, m), m < n; \Omega_j \leq 0, (j = 1, 2, \dots, s)\}.$$

Точка x^* може знаходитись як всередині області Ω так і на границі.

Серед всіх задач НП більш відомою та добре розробленою є задача лінійного програмування, коли:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^T R \rightarrow \min; \\ \omega(x) &= cx - \delta = 0; \\ \Omega(x) &= ax - \Delta \leq 0; \end{aligned}$$

де: c, a – матриці;

R, δ, Δ – вектори коефіцієнтів.

При цьому, без застережень, функціонал цілі $f(x)$ можна узагальнити до квадратичного:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T K x - x^T R \rightarrow \min,$$

де: K – є, наприклад, матриця жорсткості в задачах механіки деформованого твердого тіла, а $f(x)$ – квадратичний функціонал енергії.

2. Основні розрахункові співвідношення. У випадку загальної задачі НП з обмеженнями нерівностями Кун і Такер запропонували підхід з невизначеними множниками аналогічними класичним лагранжевим. Для цього введено функціонал Лагранжа у вигляді:

$$L(x, u, t) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^s t_j \Omega_j(x).$$

На відміну від класичних множників u_j при обмеженнях рівності, які є неперервними функціями, множники t_j при обмеженнях нерівності є розривними. Зручно невизначені множники Лагранжа t_j вважати розділеними на неперервний множник Лагранжа $v_j(x)$ та розривну частину $w_j(x)$:

$$t_j = v_j w_j;$$

$$\text{де: } w_j(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{sign}(\Omega_j(x)) \right), \quad \text{sign}(0) = 1.$$

Формально в такому вигляді обмеження типу нерівності ($\Omega_j \leq 0$) переходять в еквівалентні обмеження типу рівності виду $w_j \Omega_j(x) = 0$, та позначають одну й ту ж саму область обмежень (рис.1).

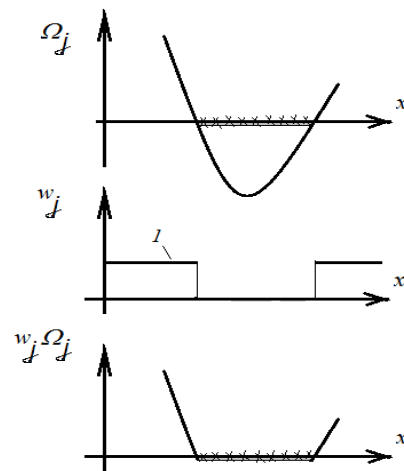


Рис. 1 – Еквівалентні обмеження типу нерівності та рівності

Таким чином, задачу НП з обмеженнями типу нерівності можна розглядати як еквівалентну класичну задачу з обмеженнями рівності з функціоналом:

$$L(x, u, v) = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j \omega_j(x) + \sum_{j=1}^s v_j \omega_j(x)$$

За допомогою методу множників встановлюються необхідні умови мінімуму. Для випадку квадратичного та лінійного функціоналів маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= Kx - R + c^T u + a^T v w = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= cx - \delta = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial v} &= \text{diag}(w)(ax - \Delta) = 0, \text{ або: } w_j \Omega_j = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Якщо побудувати алгоритм, в якому послідовно забезпечувати виконання умов Куна-Такера ($w_j \Omega_j = 0$), то рішення задач оптимізації зводиться до аналізу однієї й тієї ж системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1). Зручно поставлену задачу формалізувати в матричній формі, включивши в неї функціонал $f(x)$:

$$\begin{bmatrix} K & c^T & a^T & R \\ c & \cdot & \cdot & \delta \\ a & \cdot & \cdot & \Delta \\ R^T & \delta^T & \Delta^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix}. \tag{2}$$

В цьому особливість запропонованої схеми єдиного алгоритму пошуку оптимальної точки як для задач ЛП так і КП. Всі перетворення згідно алгоритму формуються як операції матричної алгебри над системою (2). Слід відмітити симетричність або майже симетричність матриці (A) цієї системи розрахункових рівнянь.

Перед подальшим використанням симплекс-схеми доцільно спростити форму системи рівнянь (2). Виключимо з неї вектори x та u , для встановлення безпосереднього зв'язку між компонентами множників Лагранжа t та Ω . Для цього приведемо верхню ліву частину рівняння розміром $(n + m)$ до канонічної (діагональної) форми. Це можна зробити за допомогою лівих та правих елементарних перетворень, зберігаючи симетрію матриці задачі. Їх результатом буде деяка заміна змінних з матрицею P_1 , наприклад, такої структури:

$$\begin{bmatrix} x \\ u \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdot & \cdot \\ \times & \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & E & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Система (2) після еквівалентного перетворення:

$$P_1^T A P_1 \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = P_1^T \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix},$$

набуває більш простого виду, що допускає визначення вектору r :

$$\begin{bmatrix} E & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix} \tag{4}$$

Далі продовжується спрощення матриці з допомогою лівих перетворень для визначення вектора ξ . Залежності, що залишаються, встановлюють безпосередній

зв'язок між компонентами множників Лагранжа t та Ω . Для наочності роботи схеми введемо два вектори $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_s)$ та $z = (z_1, z_2, z_3, \dots, z_s)$. Вважатимемо y_i базисними компонентами векторів t та Ω , а z_j – поза базисними. Як вектор y так і z можуть формуватись як з компонентів t_j так і Ω_j , за одним застереженням: для кожного j компоненти t_j та Ω_j не можуть одночасно входити в один з цих векторів, вони повинні стояти по різні боки рівняння. Залежність базисних компонент y від небазисних z можна представити у такій стандартній формі:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y \\ y_s \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ b_1 & b_2 & b_3 & b & b_s & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z \\ z_s \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Таким чином, стартова розрахункова система (2) переходить до залежності (5), що пов'язує t і Ω . Надалі виконується циклічна процедура симплекс-схеми. Це, по-перше, забезпечення виконання умов Куна-Такера ($t_j \Omega_j = 0$). Будемо робити це традиційним шляхом призначення всім поза базисним координатам z значення нуль. За ходом процедури можна слідкувати по значенням поточного базисного рішення y . Цей вектор повинен бути допустимим, тобто потрібна відповідність між невизначеними множниками Лагранжа t_j та активністю кожної нерівності Ω_j . Наприклад, якщо $\Omega_j < 0$ (ϵ неактивної), то t_j повинен дорівнювати нулю. Якщо поточне рішення недопустиме, потрібно ввести зміни: відповідні базисні координати перевести в небазисні і навпаки. Тобто переписати форму рівняння (5). Після чого знову представити залежність базисних координат від небазисних в канонічному вигляді. За тенденцією зменшення цільової функції від поза базисних координат потрібно слідкувати по значенням коефіцієнтів b_j . Якщо рішення існує, допустиме і подальше зменшення функціоналу неможливе, то процедуру можна виконати за скінченну кількість операцій. Алгоритм працює по цій схемі як для задач ЛП так і КП.

3. Тестовий приклад задачі лінійного програмування (ЛП). Розглянемо роботу викладеного алгоритму пошуку оптимальної точки на прикладі задачі ЛП з чотирма параметрами $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x_3 + 2x_4 \rightarrow \min; \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1; \\ x_2 - 2x_3 - x_4 &= -1; \\ x_i &\geq 0; \quad (i = 1,4); \end{aligned} \tag{6}$$

або

$$\begin{aligned} f(x) &= -[\cdot \quad \cdot \quad -1 \quad -2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \\ \omega(x) &= \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & 1 \\ \cdot & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0; \end{aligned}$$

$$\Omega(x) = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \leq 0;$$

Матрична форма запису всієї задачі з матрицею А, згідно (2), виглядає так:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -2 \\ \cdot & 1 & -2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ -f \end{bmatrix}$$

Далі на етапі спрощення цієї системи за допомогою елементарних перетворень побудуємо заміну змінних з матрицею P_1 :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & 1 & -2 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Після еквівалентного перетворення

$$\begin{bmatrix} P_1^T & \cdot \\ \cdot & E \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \cdot & P_1 \\ \cdot & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \xi \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T & \cdot \\ \cdot & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix}$$

система розпадається на дві частини.

З першої можна визначити компоненти вектора r :

$$\text{diag}(r_1 r_2 r_3 r_4) = \text{diag}(1/2, -1/2, 1/2, -1/2);$$

Друга є майже симетричною:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & 2 & 1 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & 1 & 2 \\ -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ -f \end{bmatrix}$$

Виконаємо над нею подальше ліве перетворення P_2 :

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -2 & 1 & \cdot \end{bmatrix}$$

В результаті отримаємо залежності для компонент вектора ξ та потрібний нам безпосередній зв'язок між компонентами множників Лагранжа t та Ω :

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_3 \\ \Omega_4 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & \cdot & 1 \\ -1 & 1 & \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 & -2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ -f \end{bmatrix}$$

Аналіз останньої системи рівнянь проведемо згідно симплекс - схеми. Для цього представимо її в стандартній формі, наприклад:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & -1 & -1 & 1 \\ \cdot & \cdot & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & \cdot & \cdot & -1 \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & -2 \\ \cdot & \cdot & 1 & 2 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \Omega_3 \\ \Omega_4 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В такому вигляді $(\Omega_1 \Omega_2 t_3 t_4)$ розглядаються як базисні компоненти вектора, а $(t_1 t_2 \Omega_3 \Omega_4)$ - поза базисні. Функціонал f виражається через коефіцієнти нижнього рядка. Потрібно пам'ятати, що існують також чотири умови Куна-Такера ($t_j \Omega_j = 0$).

Щоб виконати їх, процес рішення розпочинається з призначення всім поза базисним координатам значення нуль:

$$(t_1 t_2 \Omega_3 \Omega_4) \rightarrow 0.$$

Це стандартна операція симплекс підходу. В такому разі базисним координатам будуть відповідати наступні значення:

$$(\Omega_1 \Omega_2 t_3 t_4) = (-1, 1, 1, 2).$$

Тепер настає черга аналізу отриманого варіанту рішення. Він показує, що воно недопустиме. Так, якщо $\Omega_1 < 0$ (нерівність неактивна), то t_1 повинно дорівнювати нулю; це правильно. Але якщо $\Omega_2 > 0$, то t_2 не може дорівнювати нулю; це неправильно.

Тому шукаємо інший варіант рішення, кількість яких обмежена. Для цього плануємо виконати перестановку невідомих: виведемо з базисних компоненту Ω_2 , а замість неї введемо t_2 . Але в даному випадку на цьому шляху виникає особливість - діагональний елемент M_{22} матриці рівняння (8) дорівнює нулю. В такому разі в другому стовбці шукаємо інший (максимальний) елемент -2. Він належить третьому рядку. Тому приймається рішення в процесі перестановки вивести з базисних дві компоненти Ω_2 та t_3 , а ввести t_2 та Ω_3 . В результаті перебудована канонічна форма залежностей (8) буде такою:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ t_2 \\ \Omega_3 \\ t_4 \\ -f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & -1/2 & \cdot & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & \cdot & -1/2 & \cdot & -1/2 \\ \cdot & 1/2 & \cdot & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & \cdot & 1/2 & \cdot & -3/2 \\ \cdot & 1/2 & \cdot & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \Omega_2 \\ t_3 \\ \Omega_4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Повторюємо процес аналізу рішення цього варіанту системи. Призначаємо всім поза базисним координатам значення нуль:

$$(t_1 \Omega_2 t_3 \Omega_4) \rightarrow 0.$$

Тоді базисним координатам будуть відповідати нові значення:

$$(\Omega_1 t_2 \Omega_3 t_4) = (-1/2, 1/2, -1/2, 3/2).$$

Аналіз показує, що рішення допустиме. При цьому значення функціоналу $f = 1/2$. Впевнимось, що покращити (зменшити) результат не можна. Дійсно, всі коефіцієнти останнього рядка рівняння додатні. Зменшення f можливо лише при збільшенні компонент Ω_2 та Ω_4 , що є неможливим.

Таким чином, знайдене рішення є оптимальним, тобто задовольняє обмеженням як рівності так і нерівності, і надає функціоналу якості мінімального значення. Приведемо повне рішення задачі:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_3 + 2x_4 \rightarrow \min \\ (\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3 \Omega_4) &= (-0.5, 0, -0.5, 0); \\ (t_1 t_2 t_3 t_4) &= (0, 0.5, 0, 1.5); \\ (\xi_1 \xi_2) &= (-0.5, 0); \\ (r_1 r_2 r_3 r_4) &= (0.5, -0.5, 0.5, -0.5); \\ (u_1 u_2) &= (0, 0.5); \\ x^* &= (x_1 x_2 x_3 x_4) = (0.5, 0, 0.5, 0); \\ f(x^*) &= 0.5 \rightarrow \min; \end{aligned} \quad (9)$$

4. Деформування моделі вантової мостової конструкції в умовах контактної взаємодії. Науково-технічний прогрес в сучасних методах будівництва привів до створення елегантних та економічних об'єктів з вражаючими конструктивними формами, серед яких вантові споруди. Їх основні позитивні особливості полягають в характері роботи вант – несучих елементів, що працюють тільки на розтягнення. Стало можливим поєднання великої довжини прольотів, відносної легкості, високої ефективності, але яке водночас супроводжується значною напруженістю елементів. Для прийняття відповідальних рішень необхідна підготовка моделей розрахунків в умовах односторонніх зв'язків, оптимальних рішень.

Питання дослідження різних аспектів функціонування конструкцій з гнучкими елементами, що працюють лише на розтягнення, в тому числі і визначення оптимальних значень параметрів можна знайти, поряд з іншими, в [3-7, 17-20].



Рис. 2 – Приклад вантової мостової споруди

Запропонований в цій роботі загальний алгоритм для визначення оптимальної точки задач квадратичного програмування (КП) працює по тій же схемі, що і для задач ЛП. Єдина відмінність полягає в тому, що додатково вводиться матриця жорсткості в квадратичний функціонал енергії, яка доповнює основну матрицю

розрахункової системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2). Разом з тим квадратична постановка дозволяє значно розширити коло можливостей рішеннями задач лінійного деформування ланок конструкцій в умовах контактної взаємодії (при лінійних обмеженнях).

Для чисельного дослідження поведінки алгоритму КП розглянуто модельну задачу однопілонної вантової споруди з береговим та русловим прольотами (рис.3). Конструкція складається з пілону та дорожнього полотна, яке утримується лише за допомогою 3-х вант.

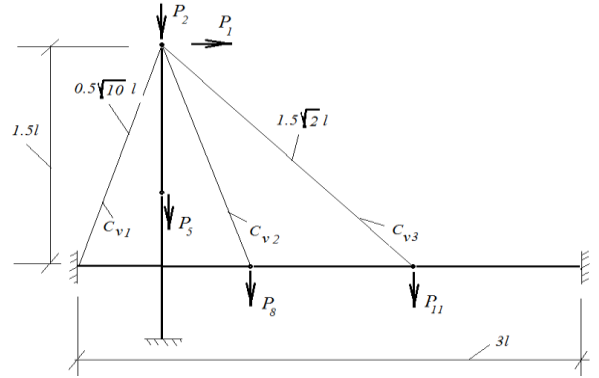


Рис. 3 – Модель однопілонної вантової споруди

Схема споруди, типи елементів, розміри, характеристики матеріалу, характер навантаження вибрані такими, що допускають, в певних випадках, просту аналітичну перевірку результатів розрахунків. Споруда представляє собою плоску стержневу конструкцію, що здійснює згинально-поздовжню деформацію. Взаємодія пілону та балки прольоту здійснюється лише при односторонній деформації розтягнення 3-х вант (канатів) прикріплених в їх точках. У випадках деформування окремих вант, при навантаженнях або монтажних операціях яких, має місце зближення точок кріплення, зв'язки перериваються. Їх можна врахувати як обмеження типу нерівності

Основні числові дані:

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль пружності матеріалу;

$L_b = 30$ м – довжина балки полотна;

$L_p = 20$ м – висота пілону;

$l = 10$ м – довжина одного прольоту;

$F = 0.5 \text{ м}^2$ – площа перерізу як полотна так і пілону;

$I = F/12 \text{ м}^4$ – екваторіальний момент інерції перерізу;

$F_v = 0.01F$ – переріз канату ($d \approx 0.1$ м).

В процесі експлуатації вантові мостові конструкції знаходяться під впливом різноманітних видів навантаження (власної ваги, транспортного та будівельного устаткування, вітрового навантаження та інших). В даному прикладі до загального навантаження включено такі: вагу пілону, подвоєну вагу дорожнього полотна та змінне по напрямку вітрове зусилля. Всі складові розподілені по глобальним вузлам за схемою (рис.3):

$$P_2 = 0.5 \cdot P_0;$$

$$P_5 = 1.5 \cdot P_0;$$

$$P_8 = P_{11} = 3 \cdot P_0;$$

$$P_0 = 400 \text{ кН} - \text{вага одного прольоту полотна};$$

P_1 – вітрове навантаження.

Чисельні розрахунки виконані методом скінченних елементів (МСЕ). Пілон та балка прольоту розбиті на 5 однакових СЕ (рис.4).

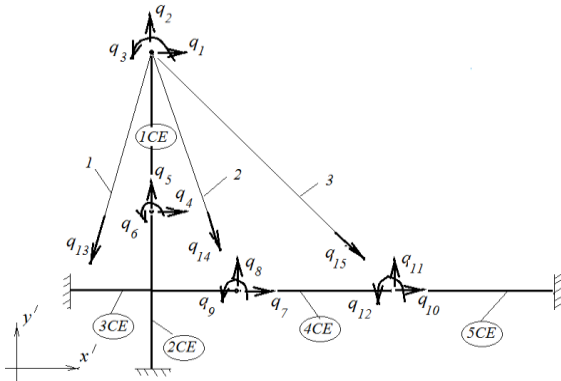


Рис. 4 – Скінченно-елементна модель споруди

В якості стандартного прийнято стержневий 2-х вузловий згинально-поздовжній СЕ з 6 степенями вільності (рис.5).

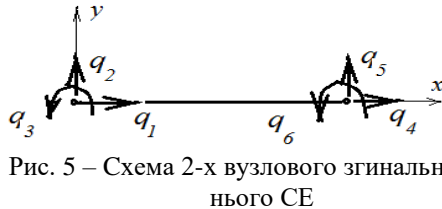


Рис. 5 – Схема 2-х вузлового згинально-поздовжнього СЕ

Матрична форма зв'язку вектора реакцій Q , що утримує СЕ в рівновазі, та його вузлових переміщень q така:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot \\ \cdot & 12S & 6lS & \cdot & -12S & 6lS \\ \cdot & 6lS & 4l^2S & \cdot & -6lS & 2l^2S \\ -C & \cdot & \cdot & C & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12S & -6lS & \cdot & 12S & -6lS \\ \cdot & 6lS & 2l^2S & \cdot & -6lS & 4l^2S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix},$$

де: $C = \frac{EF}{l}$ - коефіцієнт жорсткості на розтягнення;

$S = \frac{EI}{l^3}$ - параметр жорсткості на згинання.

Вся СЕ-модель конструкції включає 15 степенів вільності, які показані на рис.4.

Для формування основного функціоналу Лагранжа для розрахункової моделі (рис.3), потрібні значення функціоналу цілі та обмеження-нерівності. Запишемо його в такому вигляді:

$$L(q, t) = f(q) + \sum_{j=1}^6 t_j \Omega_j(q).$$

При цьому функціонал цілі $f(q)$ є квадратичним та відповідає повній потенціальній енергії пружної деформації споруди. Він включає такі складові:

$$f(q) = \frac{1}{2} q_p^T K_p q_p + \frac{1}{2} q_b^T K_b q_b + \sum_{j=1}^3 C_{vj} (\Delta l_{vj})^2 - q^T R;$$

де: K_p – матриця жорсткості пілона;

K_b – матриця жорсткості балки полотна

C_{vj} – коефіцієнти жорсткості вантів на розтягнення;

Δl_{vj} – величини видовження вант при розтягненні;

R – вектор вузлових навантажень.

4.1. Формування СЕ-рівнянь пілона та балки полотна. Матричні рівняння рівноваги пілона та балки полотна мають порядки (6×6). Для їх побудови використано матрицю індексів, яка встановлює відповідність між локальною нумерацією стандартного СЕ (рис.5) та глобальною нумерацією координат споруди (рис.4):

	1	2	3	4	5	6
1CE	4	5	6	1	2	3
2CE	▪	▪	▪	4	5	6
3CE	▪	▪	▪	7	8	9
4CE	7	8	9	10	11	12
5CE	10	11	12	▪	▪	▪

СЕ-рівняння пілона буде таким:

$$Q_p = K_p q_p - R_p,$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12S & \cdot & 6lS & \cdot & -12S & \cdot & 6lS \\ \cdot & C & \cdot & \cdot & \cdot & -C & \cdot \\ 6lS & \cdot & 4l^2S & \cdot & -6lS & \cdot & 2l^2S \\ -12S & \cdot & -6lS & 24S & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -C & \cdot & \cdot & 2C & \cdot & \cdot \\ 6lS & \cdot & 2l^2S & \cdot & \cdot & 8l^2S & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ -P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ -P_5 \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

СЕ-рівняння балки полотна має вигляд:

$$Q_b = K_b q_b - R_b.$$

$$\begin{bmatrix} Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \\ Q_{10} \\ Q_{11} \\ Q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2C & \cdot & \cdot & -C & \cdot & \cdot \\ \cdot & 24S & \cdot & \cdot & -12S & 6lS \\ \cdot & \cdot & 8l^2S & \cdot & -6lS & 2l^2S \\ -C & \cdot & \cdot & 2C & \cdot & \cdot \\ \cdot & -12S & -6lS & \cdot & 24S & \cdot \\ \cdot & 6lS & 2l^2S & \cdot & \cdot & 8l^2S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cdot \\ -P_8 \\ \cdot \\ \cdot \\ -P_{11} \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

4.2. Формування 2-х обмежень-нерівностей при односторонньому деформуванні кожної з вант. Точка кріплення вант з одного боку прив'язана до пілона - має спільні узагальнені координати q_1, q_2 . З іншого боку в точках кріплення канату до полотна, призначені свої незалежні координати окремо для балки (q_7, q_8, q_{10}, q_{11}) та канатів (q_{13}, q_{14}, q_{15}) (рис.4).

Розглянемо особливості деформування вант при контактній взаємодії з полотном на прикладі 3-го канату (рис.6). В цьому випадку незалежні (глобальні) координати переміщення балки в точці В будуть (q_{10}, q_{11}), а канату - (q_{15}). Зручно для канату ввести допоміжні (локальні) координати (s_{10}, s_{11}).

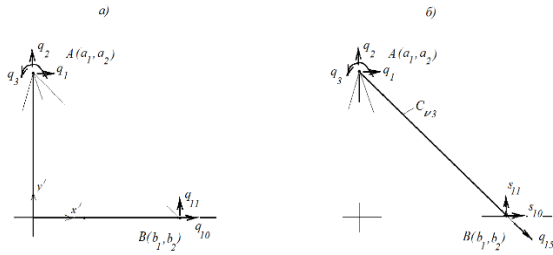


Рис. 6 – Схема взаємодії 3-го канату та полотна:
 а – координати незв’язаних пілону та полотна;
 б – координати деформування канату.

Знайдемо величину видовження канату через його узагальнені координати.

$$\Delta l = l_{AB'} - l_{AB} \approx (l_{AB'}^2 - l_{AB}^2) / (2l_{AB}).$$

Якщо позначити $q_{15} = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} s_{9+i}$; то:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} (s_{9+i} - q_i) = q_{15} - \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} q_i.$$

Відповідне віддалення між точками А і В, що належать конструкції, буде таким:

$$\Delta AB = \sum_{i=1}^2 \frac{b_i - a_i}{l_{AB}} (q_{9+i} - q_i).$$

Таким чином, зміна відстаней між точками конструкції при її деформуванні в лінійній постановці є лінійною функцією глобальних координат споруди.

Такі особливості деформування 3-го канату можна записати у вигляді 2-х нерівностей:

$$\Delta l \geq 0 \text{ та } \Delta l \geq \Delta AB, \text{ або:}$$

$$\begin{cases} q_{15} - \frac{b_1 - a_1}{l_{AB}} q_1 - \frac{b_2 - a_2}{l_{AB}} q_2 \geq 0 \\ q_{15} - \frac{b_1 - a_1}{l_{AB}} q_{10} - \frac{b_2 - a_2}{l_{AB}} q_{11} \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Одержані результати для одного канату можуть бути узагальнені на весь комплект, та записані для всієї споруди у вигляді 6-ти нерівностей:

$$\Omega(q) = \begin{bmatrix} -0.32-0.95 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ 0.32 & -0.95 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0.32-0.95 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 \\ 0.71 & -0.71 & \cdot & \cdot & 0.71-0.71 & \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{13} \\ q_{14} \\ q_{15} \end{bmatrix} \leq 0;$$

Тепер отримано всі необхідні залежності для формування матричної форми загальної системи розрахункових рівнянь задачі квадратичного програмування (2):

$$\begin{bmatrix} K & a^T & R \\ a & \cdot & \Delta \\ R^T & \Delta^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ t \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \Omega \\ -2f \end{bmatrix}, \quad (11)$$

або в розгорнутій формі:

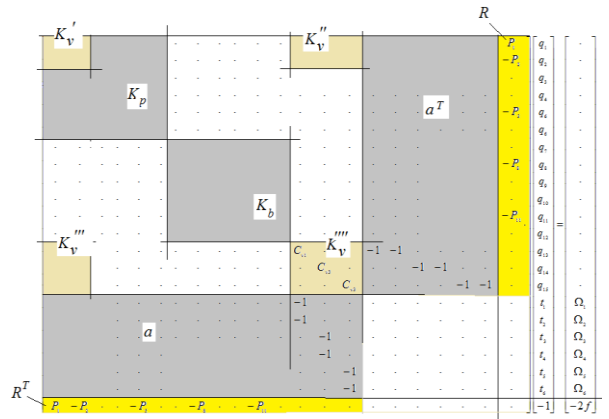


Рис. 7 – Структура загальної матриці розрахункової схеми симетричного виду

Матриця системи має розмір 22×22, симетрична і підготовлена для подальшого аналізу в задачі квадратичного програмування. Нагадаємо важливість наступного кроку схеми, пов’язаного з суттєвим зменшенням кількості операцій в циклічній симплекс-процедурі. Це - перетворення форми рівнянь (11) шляхом виключення з неї вектору q та встановлення безпосереднього зв’язку між компонентами множників Лагранжа t та Ω.

Після цього в роботі виконані варіативні розрахунки НДС споруди для випадків вітрового навантаження, при якому нерівності для окремих канатів можуть бути як активними так і неактивними.

4.3. Результати моделювання НДС вантової мостової споруди в умовах односторонніх зв’язків в канатах при варіюванні вітрового навантаження. Вантові споруди, які здебільшого є висотними, відносяться до відповідальних об’єктів проектування. Особливістю їх навантаження є комплексність та змінність структури цього навантаження. Виділяють регулярну складову та додаткову як то: вітрове, монтажне, транспортне, тощо. При таких обставинах в інженерній практиці використовують розрахункові варіативні комбінації сил, які залежать від умов експлуатації. Крім них, можуть бути особливі комбінації як то: штормові, вибухові, монтажні та інші. Не виключено, що споруди з односторонніми зв’язками при змінах навантаження самі можуть змінювати свою структуру.

В розглянутих нижче прикладах розрахункова схема імітує дію основних складових комбінації сил. Наведені варіанти розрахунків, в яких кожен з канатів може бути як активним так і виключеним з роботи, в залежності від величини та напрямку вітру. Розглянуто результати обчислень НДС для 4-х варіантів дії вітрового навантаження при зміні як його величини так і напрямку. Прийнято:

P_0 , кН	P_2	P_5	P_8	P_{11}
400	$0.5P_0$	$1.5P_0$	$3P_0$	$3P_0$

1) $P_1 = -2P_0$. Напрямок вітру до берега. Розглядається споруда за відсутності вант.

Цей приклад розподілу НДС по конструкції розглянуто для порівнянь з результатами для споруди зі встановленими канатами. Пілон здійснює згинально-поздовжнє деформування, яке незалежне від згинальної деформації балки. На рис.8 зображені епюри поперечних переміщень пілона та полотна (м), згинального моменту ($10^6, \text{нм}$) та поздовжньої сили в пілоні ($10^6, \text{н}$).

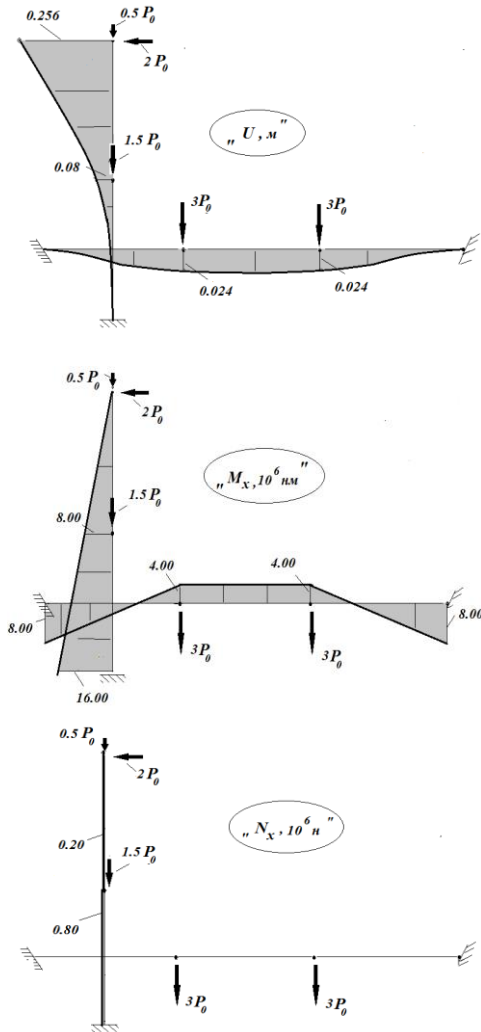


Рис. 8 – Деформування споруди без впливу вант. Вітрове навантаження в бік берега.

Задача допускає просте аналітичне рішення, яке добре співпадає з чисельними розрахунками.

2) $P_1 = -2P_0$. Напрямок вітру також в бік берега. Споруда підкріплена вантами але для цієї комбінації береговий вант виявився розвантаженим.

Силова напруженість споруди радикально перерозподілилось. Два руслові канати сприйняли на себе значну частину вертикальних сил. Сили стискання в пілоні виросли більш ніж вдвічі. Зате можна відмітити значне зменшення переміщень, згинального моменту по елементам конструкції. Відповідні компоненти НДС приведені на рис.9.

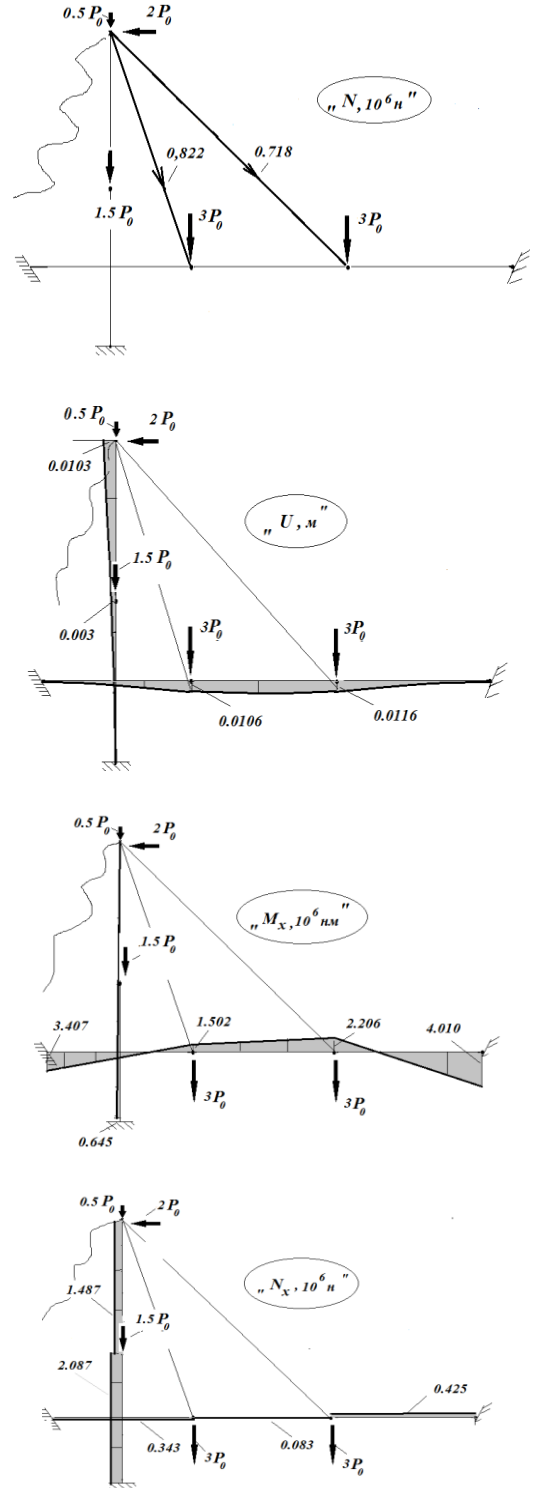


Рис. 9 – Деформування споруди з вантами. Береговий вант не працює.

3) $P_1 = P_0$. Напрямок вітру змінився в бік русла. Споруда підкріплена вантами але для цього варіанту тепер не працює вант правого берега.

Найінтенсивніше працює лише один канат - лівого берега. Зросла напруженість елементів конструкції. Характер розподілу НДС по споруді видно на рис.10.

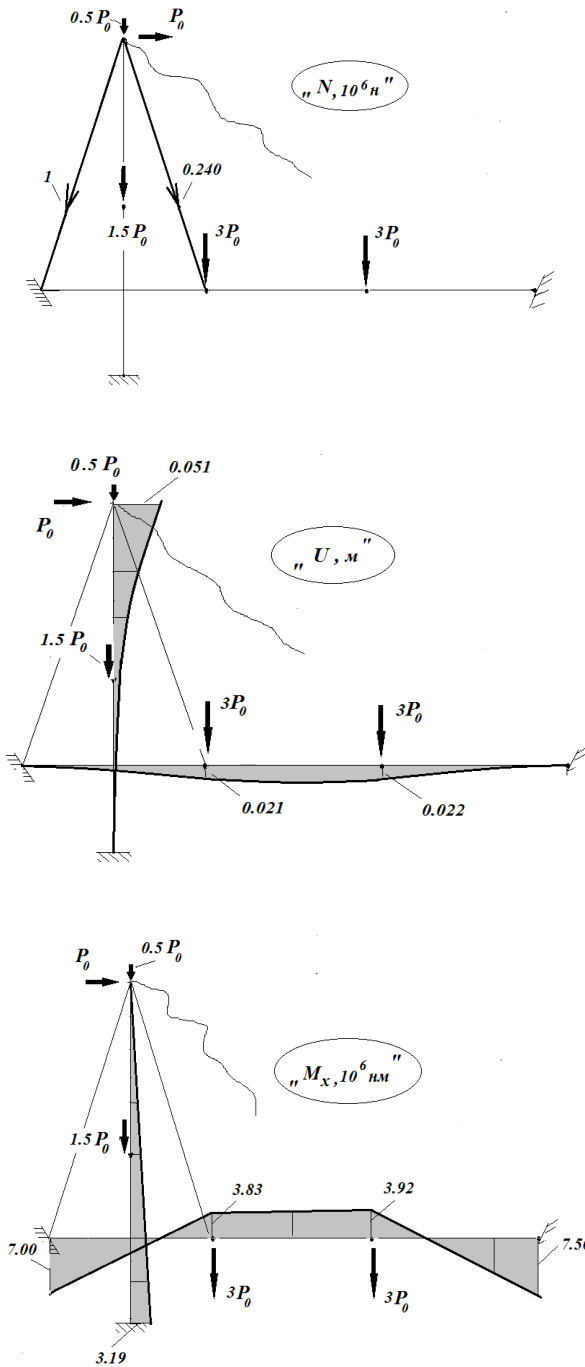


Рис. 10 – Деформування споруди при дії вітру в бік русла. Інтенсивно працює лише береговий вант.

4) $P_1=2P_0$. Сила вітру збільшена вдвічі. Обидва руслові вант розвантажуються.

Знову спостерігається радикальна зміна силового напруження конструкції. Небезпечно навантаженим став лише один канат лівого берега. Продовжується зростання напруженості елементів конструкції. Компоненти НДС споруди приведені на рис.11. В даному випадку вант не виконують свою основну функцію - працювати на розтягнення, та розвантажувати несучі елементи споруди.

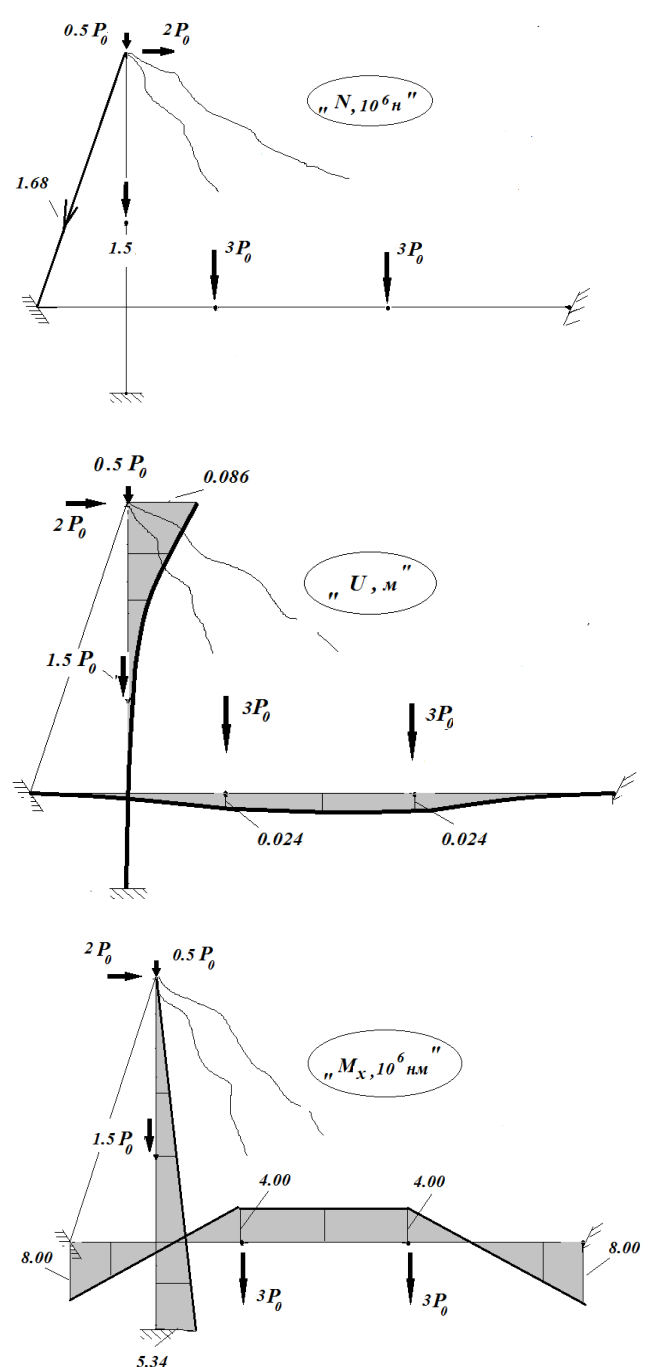


Рис. 11 – Зростання вітрового навантаження таке, що вант русла не працюють.

По результатам проведених розрахунків видно, що для споруд з односторонніми зв'язками в процесі експлуатації можуть суттєво змінюватись як структура навантаження так і структура самої споруди. В багатьох випадках для оцінки напруженості корисними можуть бути методи нелінійного, зокрема квадратичного, програмування.

5. Висновки. На підставі проведених досліджень можна зробити наступні висновки:

- Існують різні підходи рішення як задач лінійного так і квадратичного програмування. В цій роботі

постановки цих 2-х задач оптимізації формалізовані в єдиній універсальній формі симетричної матричної залежності, що дає змогу отримати ефективний (на наш погляд) алгоритм їх реалізації.

- Для зменшення кількості операцій в циклічній процедурі симплекс-схеми доцільно попередньо з допомогою матричних перетворень виключити з системи розрахункових рівнянь “зайві” невідомі та встановити безпосередній зв'язок між компонентами множинників Лагранжа та значеннями нерівностей.

- Приведений алгоритм квадратичного програмування може бути використаний для визначення НДС значного кола задач механіки деформованого твердого тіла в умовах контактної взаємодії при одно-сторонніх зв'язках за скінченну кількість операцій. Як приклад, наведені результати чисельних розрахунків практичних задач деформування моделі вантової споруди, які можуть бути корисними.

Список літератури

1. Аоки М. Введение в методы оптимизации/М.Аоки.-М.:Наука,1977.-344с.
2. Гилл Ф. Практическая оптимизация/Ф.Гилл,У.Мюррей,М.Райт.-М.:Мир,1985.-509с.
3. Бахтин С.А. Висячие и вантовые мосты. Проектирование, расчет, особенности конструкции/С.А.Бахтин, И.Г.Овчинников, Р.Р.Инамов.-Саратов:СГТУ,1999.-124с.
4. Качурин В.К. Проектирование висячих и вантовых мостов /В.К.Качурин,А.В.Брагин,Б.Г.Ерунов.-М.:Транспорт,1971.-280с.
5. Кириенко В.И. Байковые мосты/В.И.Кириенко.-Київ:Будівельник,1967.-144с.
6. Смирнов В.А. Висячие мосты больших пролетов/В.А.Смирнов.-М.:Вища школа, 1975.-368с.
7. Барановский А.А. Мосты больших пролетов. Проектирование висячих и вантовых мостов/А.А.Барановский.-СПб.:2005.-272с.
8. Хофер Э., Лундерштедт Р. Численные методы оптимизации.-М.:Машиностроение, 1981.-192с.
9. Дегтярев Ю.И. Методы оптимизации.-М.:СовРадио,1980.-272с.
10. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию.-М.:Наука,1983.-384с.
11. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации /А.Г.Сухарев, А.В.Тимофеев,В.В.Федоров.-М.:Наука,1986.-328с.
12. Банди Б. Методы Оптимизации.-М.:Радио и связь,1988.-128с.
13. Ногин В.Д., Протодяконов Н.О., Евлампиев И.М. Основы теории оптимизации.-М.:Вища школа,1986.-384с.
14. Кузин Л.Т. Основы кибернетики.-М.:Энергия,1973.-504с.
15. Карманов В.Г. Математическое программирование.-М.:Наука,1975.-272с.
16. Богаенко І.М., Григорків В.С., Бойчук М.В., Рюмишин М.О. Математичне програмування. –К.:Логос,1996.-266с.
17. Walther R. Cable-stayed bridges/R.Walther, B.Hourient, W.Isler, P.Moia, J.F.Klein.-Thomas Telford,1988.-225p.
18. Simoes L.M.C. Sizing and geometry optimization of cable-stayed

bridges/L.M.C. Simoes,J.H.O.Negrao//Computers and Structures.-1994.vol.52.-pp309-321.

19. Lute V. Genetic algorithms-based optimization of cable-stayed bridges//V.Lute, A.Upadhyay, K.K.Singh// J.Software Engineering&Applications.-2011.-№4.-pp571-578.
20. Hassan M.M.Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element,genetic algorithm,and B-spline combined technique/M.M.Hassan//EngineeringStructures.-2013.-Vol.49.-pp643-654.

References (transliterated)

1. Aoky M. Vvedeniye v metody optymyzatsyy/M.Aoky.-M.:Nauka,1977.-344s.
2. Hyll F. Prakticheskaia optymyzatsiya/F.Hyll,U.Miurrei,M.Rait.-M.:Myr,1985.-509s.
3. Bakhtyn S.A. Vysiachye y vantovyye mosty. Proektyrovanye, raschet, osobennosti konstruksyy/S.A.Bakhtyn, Y.H.Ovchynnykov, R.R.Ynamov.-Saratov:SHTU,1999.-124s.
4. Kachurn V.K. Proektyrovanye vysiachykh y vantovykh mostov /V.K.Kachurn,A.V.Brahyn,B.H.Erunov.-M.:Transport, 1971.-280s.
5. Kyryenko V.Y. Baikovyye mosty/V.Y.Kyryenko.-Kyiv:Budivelnik,1967.-144s.
6. Smyrnov V.A. Vysiachye mosty bolshykh proletov/V.A.Smyrnov.-M.:Vyshcha shkola, 1975.-368s.
7. Baranovskiy A.A. Mosty bolshykh proletov. Proektyrovanye vysiachykh y vantovykh mostov/A.A.Baranovskiy.-SPb.:2005.-272s.
8. Khofer Э., Lundershtedt R. Chyслennyye metody optymyzatsyy.-M.:Mashynostroeniye, 1981.-192s.
9. Dehtiarev Yu.Y. Metody optymyzatsyy.-M.:SovRadyo,1980.-272s.
10. Poliak B.T. Vvedeniye v optymyzatsiyu.-M.:Nauka,1983.-.
11. Sukharev A.H. Kurs metodov optymyzatsyy /A.H.Sukharev, A.V.Tymofeev,V.V.Fedorov.-M.:Nauka,1986.-328s.
12. Bandy B. Metody Optymyzatsyy.-M.:Radyo y svyaz,1988.-128s.
13. Nohyn V.D., Protodiakonov N.O., Evlampyev Y.M. Osnovy teo-ryy optymyzatsyy.-M.:Vyshcha shkola,1986.-384s.
14. Kuzyn L.T. Osnovy kybernetyky.-M.:Enerhyia,1973.-504s.
15. Karmanov V.H. Matematicheskoe prohramyrovanye.-M.:Nauka,1975.-272s.
16. Bohaienko I.M., Hryhorkiv V.S., Boichuk M.V., Riumshyn M.O.Matematychne prohramuvannia. –K.:Lohos,1996.-266s.
17. Walther R. Cable-stayed bridges/R.Walther, B.Hourient, W.Isler, P.Moia, J.F.Klein.-Thomas Telford,1988.-225p.
18. Simoes L.M.C. Sizing and geometry optimization of cable-stayed bridges/L.M.C. Simoes,J.H.O.Negrao//Computers and Structures.-1994.vol.52.-pp309-321.
19. Lute V. Genetic algorithms-based optimization of cable-stayed bridges//V.Lute, A.Upadhyay, K.K.Singh// J.Software Engineering&Applications.-2011.-№4.-pp571-578.
20. Hassan M.M.Optimization of stay cables in cable-stayed bridges using finite element,genetic algorithm,and B-spline combined technique/M.M.Hassan//Engineering Structures.-2013.-Vol.49.-pp643-654.

Надійшла 23.12.2022 (received)

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Грищенко Володимир Миколайович – кандидат технічних наук, доцент кафедри математичного моделювання та інтелектуальних обчислень в інженерії, Національний технічний університет «ХПИ»; м. Харків; тел.: (057) 707 6879. E-mail: grivn_dmm@ukr.net; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>.

Грищенко Владимир Николаевич – кандидат технических наук, доцент кафедры математического моделирования и интеллектуальных вычислений в инженерии, Национальный технический университет «ХПИ»; г. Харьков; тел.: (057) 707 6879. E-mail: grivn_dmm@ukr.net; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>.

Grischenko Volodimir Mikolayovich – Candidate of Technical Sciences (Ph.D), Docent of the Department of Mathematical Modeling and Intelligent Computing in Engineering National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”; Kharkiv; tel.: (057) 707 68 79. E-mail: grivn_dmm@ukr.net; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8880-0982>.