УДК 539.3

Ю. М. АНДРЄЄВ, О. М. МАРУСЕНКО

АЛГОРИТМ, РЕАЛІЗАЦІЯ, ПІДГОТОВКА ДАНИХ, ПРОВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКІВ СТАТИКИ ТА ДИНАМІКИ БАЛКОВИХ ҐРАТЧАСТИХ КОНСТРУКЦІЙ У ССКА КІДИМ

DOI: 10.20998/2078-9130.2022.2.270159

Розглянуто завдання розробки універсального аналітичного опису та алгоритму автоматичного комп'ютерного проведення розрахунків динаміки, статики та кінетостатики механічних моделей конструкцій, що включають балкові грати. Це можуть бути розрахунки перехідних процесів, вільних та вимушених коливань, які встановилися, визначення положень рівноваги та напружено-деформованого стану при статичних та динамічних навантаженнях тощо. Сама конструкція може бути плоскою або просторовою, нерухомою або рухатися площиною або у просторі. До неї можуть бути прикріплені різні прилади та пристрої. Показано як можна лаконічно спеціальною мовою підготовки комп'ютерних даних аналітично описати частину конструкції, яка представлена балочними ґратами. На основі теорії пружності балок Бернуллі-Ейлера отримано дві форми канонічного подання потенційної енергії пружної балки. Це дає змогу ввести у мову опису механічних моделей спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДиМ (ССКА КіДиМ) новий елемент – «Beam», у якому вказується положення систем координат, пов'язаних з крайніми перерізами, геометричні та фізичні параметри балки. Положення цих перерізів визначається вузлами ґрат, як твердими тілами. Таким чином, визначаються узагальнені координати механічної моделі. Розроблено алгоритм формування елементів, прийнятих для опису моделей у ССКА КіДиМ, які задають пружну структуру механічної моделі. Наявними засобами у цій програмі автоматично будуються рівняння динаміки та статики, тобто формується математична модель і можуть бути проведені динамічні та статичні розрахунки. У статті на прикладі розрахунку деформації віконної рами докладно демонструється запропонована методика. Проведено порівняння результатів із розрахунками за незалежною програмою.

Ключові слова: ґратчасті балкові конструкції, балки Бернуллі-Ейлера, спеціальна система комп’ютерної алгебри, розрахунки динаміки просторових механічних моделей.

Y. ANDRIEIEV, O. MARUSENKO

ALGORITHM, IMPLEMENTATION, DATA PREPARATION, CALCULATION OF STATICS AND DYNAMICS OF BEAM LATTICE STRUCTURES IN SSKA KIDYM

The problem of developing a universal analytical description and an algorithm for automatic computer calculations of dynamics, statics and kinetostatics of mechanical models of structures, which include beam lattices, is considered. These can be calculations of transient processes, steady-state free and forced vibrations, determination of equilibrium positions and stress-strain state under static and dynamic loads, etc. The structure itself can be flat or spatial, fixed or movable on a plane or in space. Various equipment can be attached to it. It is shown how it is possible to analytically describe a part of the structure, which is a beam lattice, in a language for preparing computer data of a special computer algebra system KiDyM (SCAS KiDyM). Based on the theory of elasticity of Bernoulli-Euler beams, 2 forms of the canonical representation of the potential energy of an elastic beam are obtained. This allows us to introduce a new element into the accepted language for describing mechanical models - a “Beam”, for which the positions of coordinate systems associated with its extreme sections, its geometric and physical parameters are indicated. The position of these sections is determined by the lattice nodes, as by solid bodies. Thus, the generalized coordinates of the mechanical model are determined. An algorithm for the formation of elements of mechanical models of SCAS KiDyM has been developed. This gives the elastic structure of the mechanical model. The tools available in this program automatically build the equations of dynamics and statics, i.e. form a mathematical model, according to which dynamic and static calculations are carried out. The article demonstrates the proposed method in detail on the example of calculating the deformation of a window frame. A comparison of the results with calculations based on an independent program was made.

Key words: lattice beam structures, Bernoulli-Euler beams, a special system of computer algebra, calculations of the dynamics of spatial mechanical models.

Вступ. З метою отримання ефективних можливостей проведення розрахунків статики, динаміки та кінетостатики механічних моделей конструкцій, у склад яких включено несучі плоскі та просторові стрижневі ґрати та ферми (рис. 1.), пропонується розробити універсальний алгоритм завдання таких конструкцій, програмно його реалізувати, протестувати, провести розрахунки.

Крім самої решітки, до неї може бути прикріплено різне обладнання, сили взаємодії елементів якого з нею умовно показано на тому ж рисунку. Підхід, що реалізований тут, базується на уявленні ґрати системою балок Бернуллі-Ейлера з твердими масивними тілами у вузлах. Працездатність таких систем підтверджується, наприклад, [1]. Основою такої дискретизації є робота [2], де розглянуто аналогічні моделі, в яких інерційність системи задається точковими масами у вузлах конструкції. Там же прикладаються і зосереджені сили. Схожими підходами користувалися у роботах

[3–5].

У результаті отримано універсальний алгоритм опису на аналітичному рівні таких механічних систем, якій дозволяє за одним і тим же описом за допомогою спеціальної системи комп’ютерної алгебри КіДиМ (далі – ССКА КіДиМ) автоматично отримати динамічні рівняння руху та алгебраїчні рівняння положень рівноваги. Це дає змогу дуже ефективно проводити комплексні розрахунки статики та динаміки (у тому числі розрахунки вільних та змушених коливань, перехідних процесів тощо). Все це відносно просто зробити у ССКА КіДиМ [6, 7].

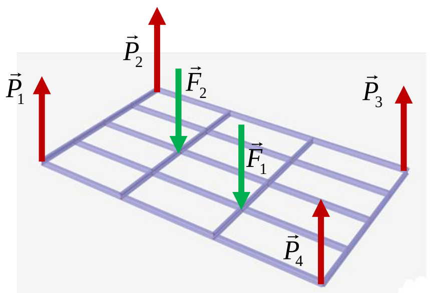

Рисунок 1 – Несуча стрижнева ферма

Постановка задачі. У статті пропонується аналітичний опис широкого класу плоских та просторових балкових систем для комп’ютерних розрахунків статичної, кінетостатичної та динамічної їх поведінки. Така конструкція може бути нерухомою і спиратися на шарнірну або жорстку основу, а може бути вільною у просторі для моделювання процесів польоту. На прикладі решітчастої балкової рами демонструються основні положення такої методики.

Використання теорії стрижнів Бернуллі-Ейлера для цілей дослідження.

1. Розглядаються балкові плоскі та просторові конструкції (наприклад, решітка, яка представлена на рис. 1), що зазнають просторового напруженого стану. Уся конструкція представляється сукупністю пружних балок, кінці яких жорстко скріплені у вузлах (наприклад, за допомогою зварних з'єднань). Припускається, що елементарні балки відчувають усю множину деформацій: розтягування-стискання, кручення, вигину та зсуву у двох площинах.

2. Ставиться завдання – отримати алгоритм визначення деформаційної картини всієї конструкції та внутрішніх зусиль у елементарних балках при статичному та динамічному навантаженні конструкції дискретною системою сил у вузлах. У вузлах розташовуються і зосереджені маси, зумовлені рівномірним рознесенням мас балок (наприклад, маса кожної балки розноситься по її кінцях навпіл [1]).

3. Дотримуються позначень кутових і лінійних переміщень крайніх перерізів балки один щодо іншого, показаних на рис. 2 [8].

Кожна балка зв'язана своїми крайніми перерізами з вузлами (деякими твердими тілами будь-якого розміру і маси, зокрема і малими, і нескінченно малими та невагомими). З цими вузлами (твердими тілами) жорстко зв'язані системи координат (показані на рис. 2 синім кольором – $A\xi_1\eta_1\zeta_1$ і $B\xi_2\eta_2\zeta_2$).

Положення цих систем задаються в абсолютній системі координат, яка вважається умовно нерухомою, змінними або постійними координатами їх початків *A* та *B* і кутами Ейлера, або Крилова, кватерніонами, або матрицями напрямних косинусів орієнтації [9]. З крайніми перерізами балки пов'язані свої системи координат (показані на рис. 2 червоним кольором – $O_1x_1y_1z_1$ і $O_2x_2y_2z_2$). Положення цих систем координат задаються *постійними* координатами центрів O_1 (ξ_{1O}, η_{1O}, ζ_{1O}) та O_2 (ξ_{2O}, η_{2O}, ζ_{2O}) і *постійними* кутами, кватерніонами або матрицями напрямних косинусів орієнтації у системах координат, пов'язаних з вузлами (твердими тілами) та показаними на рис. 2 синім кольором.

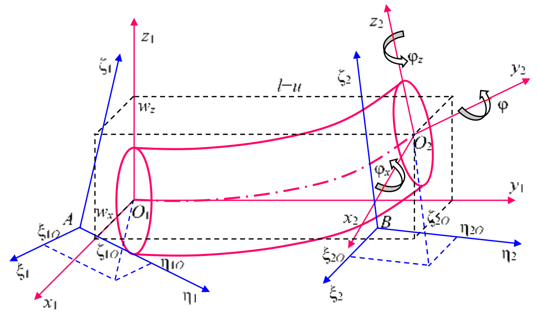

Рисунок 2 – Балка у деформованому стані

Вся картина деформацій конструкції визначиться координатами вузлів та координатами орієнтації вузлів (кутами Ейлера, Крилова, компонентами кватерніонів та ін.). Саме ці параметри можна взяти за узагальнені координати системи.

Передбачається, що кожна балка виконана з одного матеріалу довжиною *l* (у недеформованому стані), площею постійного поперечного перерізу *F*, постійних геометричних моментів інерції перерізу I_x, I_z, $I = I_x + I_z$, відомими значеннями модуля пружності *E* і модуля зсуву *G* матеріалу і може бути задана наступними синтаксичними конструкціями у вихідних даних ССКА КіДиМ

Ім'я$_A$~База$_A$ | OK_A | COM_A, m_A, Jx_A, Jy_A, Jz_A;
Ім'я$_B$~База$_B$ | OK_B | COM_B, m_B, Jx_B, Jy_B, Jz_B, (1)
Ім'я$_A$_Ім'я$_B$ || K_A | K_B | $L(l_{AB})$, $F(F_{AB})$, Ix_{AB}, Iz_{AB}, E_{AB}, G_{AB};

Тут перші два вирази – це записи «тверде тіло» [6, 10], які задають 2 вузли з іменами Ім'я$_A$ та Ім'я$_B$, до яких кріпиться балка, положення яких задається звичайним чином щодо базових для них систем координат (далі – СК), зв’язаних з тілами, позначеними тут База$_A$ та База$_B$, списками зсувів та поворотів ОКА та ОКВ, які треба зробити, щоб СК, що пов’язані з тілами База$_A$ та База$_B$ поєднати із СК тіл Ім'я$_A$ та Ім'я$_B$. Ці перетворення СК задаються списком виду *Sx*(*x*), *Sy*(*y*), *Sz*(*z*), *Rx*(α), *Ry*(β), *Rz*(γ), де «*S*» – зсув («shift») вздовж, «*R*» – поворот («rotation») навколо осі, що позначена після цих букв на величини, що вказані в дужках. COM_A і COM_B – це аналогічні списки, що задають положення головних центральних СК тіл – вузлів балки відносно пов'язаних із цими тілами СК. Нарешті, m_A, Jx_A, Jy_A, Jz_A, m_B, Jx_B, Jy_B, Jz_B – формули або значення для мас та головних центральних моментів інерції тіл – вузлів.

Ці 2 записи дозволяють програмі КіДиМ побудувати *інерційну структуру* рівнянь динаміки для руху вузлів Ім'я$_A$ та Ім'я$_B$ *у* абсолютній СК [6].

Третій вираз – це, власне, і є опис балки, розташованої між вузлами *Ім'я$_A$* та *Ім'я$_B$*. Тут

– K_A та K_B – списки виду $Sx(x)$, $Sy(y)$, $Sz(z)$, $Rx(\alpha)$, $Ry(\beta)$, $Rz(\gamma)$, що задають постійні координати положення та кути орієнтації «лівого» і «правого» перерізів балки в СК вузлів *Ім'я$_A$* та *Ім'я$_B$* відповідно;
– l_{AB}, F_{AB}, Ix_{AB}, Iz_{AB}, E_{AB}, G_{AB} – довжина, площа поперечного перерізу, геометричні моменти інерції перерізу, модулі пружності та зсуву матеріалу балки.

Інформація, що міститься у цьому записі, дає можливість програмі КіДиМ побудувати *пружну структуру* [6] рівнянь динаміки для балки з вузлами *Ім'я$_A$* та *Ім'я$_B$*.

4. Побудова пружної структури динамічних рівнянь. У прийнятих тут припущеннях зв'язок між силами і парами (N – розтягуюча сила, Q_x і Q_z – перерізуючі сили, M – крутний момент, M_x, M_y – згинальні моменти), прикладеними до балки за рис. 2, і малими лінійними (u, w_x, w_z) і кутовими (φ, φ_x, φ_z) переміщеннями задається виразом

$$\mathbf{R} = \mathbf{Cd}\,, \tag{2}$$

де матриця $\mathbf{C}$ має ненульові елементи, згідно [8]:

$c_{11} = \dfrac{4EI_x}{l}$, $\quad c_{15} = c_{51} = -\dfrac{6EI_x}{l^2}$, $\quad c_{22} = \dfrac{4EI_z}{l}$,

$c_{24} = c_{42} = \dfrac{6EI_z}{l^2}$, $\quad c_{33} = \dfrac{GI}{l}$, $\quad c_{44} = \dfrac{12EI_z}{l^3}$, $\quad c_{55} = \dfrac{12EI_x}{l^3}$,

$c_{66} = \dfrac{EF}{l}$, а $\mathbf{R}^T = \left\{M_x,\ M_y,\ M,\ Q_x,\ Q_y,\ N\right\}$ та $\mathbf{d}^T = \left\{\varphi_x,\ \varphi_z,\ \varphi,\ w_x,\ w_z,\ u\right\}$ – вектори.

Ці вирази дозволяють записати потенційну енергію балки

$$\Pi = 0{,}5\mathbf{d}^T\mathbf{Cd}\,. \tag{3}$$

При підстановці сюди матриці $\mathbf{C}$ та вектора $\mathbf{d}$ вийде квадратична форма у неканонічному вигляді. Щоб отримати таку потенційну енергію в ССКА КіДиМ її треба перетворити на канонічний вигляд. Це можна зробити декількома способами за допомогою деякого лінійного перетворення вектора $\mathbf{d}$. Наведемо 2 форми такого лінійного перетворення:

– перший вектор

$$\tilde{\mathbf{d}} = \left\{\psi_x = \varphi_x - \frac{3}{2l}w_z,\ \psi_z = \varphi_z + \frac{3}{2l}w_x,\ \varphi,\ w_x,\ w_z,\ u\right\}, \tag{4}$$

– другий вектор

$$\tilde{\tilde{\mathbf{d}}} = \left\{\varphi_x,\ \varphi_z,\ \varphi,\ u_x = w_x + \frac{l}{2}\varphi_z,\ u_z = w_z - \frac{l}{2}\varphi_x,\ u\right\}. \tag{5}$$

Відповідно, матриці до виразу (2) будуть мати тільки діагональні елементи:

– перша

$$\tilde{\mathbf{C}} = diag\left\{\frac{4EI_x}{l}\quad \frac{4EI_z}{l}\quad \frac{GI}{l}\quad \frac{3EI_z}{l^3}\quad \frac{3EI_x}{l^3}\quad \frac{EF}{l}\right\}; \tag{6}$$

– друга

$$\tilde{\tilde{\mathbf{C}}} = diag\left\{\frac{EI_x}{l}\quad \frac{EI_z}{l}\quad \frac{GI}{l}\quad \frac{12EI_z}{l^3}\quad \frac{12EI_x}{l^3}\quad \frac{EF}{l}\right\}. \tag{7}$$

5. Моделювання балкових конструкцій у ССКА КіДиМ. Отримані вирази (4) та (6), а також (5) та (7) дозволяють задавати у вихідних даних ССКА КіДиМ пружні елементи з координатами – компонентами вектора $\tilde{\mathbf{d}}$ (або $\tilde{\tilde{\mathbf{d}}}$), та характеристиками – відповідними компонентами матриці $\tilde{\mathbf{C}}$ (або $\tilde{\tilde{\mathbf{C}}}$).

Тобто,

– для першої форми це будуть елементи:

$C.x = 4EIx/l$; $\quad C.\psi_z = 4EIz/l$; $\quad C.\varphi = GI/l$;
$C.w_x = 3EIz/l^3$; $\quad C.w_z = 3EIx/l^3$; $\quad C.u = EF/l$;

– для другої форми це будуть елементи:

$C.\varphi_x = EIx/l$; $\quad C.\varphi_z = EIz/l$; $\quad C.\varphi = GI/l$;
$C.u_x = 12EIz/l^3$; $\quad C.u_z = 12EIx/l^3$; $\quad C.u = EF/l$;.

Для того, щоб виразити координати цих силових елементів через узагальнені координати всієї системи, треба виразити через них параметри деформації балки (φ_x, φ_z, φ, w_x, w_z, u).

Будемо вважати, що СК $O_2x_2y_2z_2$ щодо СК $O_1x_1y_1z_1$ буде задана картезіанськими координатами початку (т. O_2) – $x_{O_2}^{(O_1)}$, $y_{O_2}^{(O_1)}$, $z_{O_2}^{(O_1)}$ (верхній індекс у дужках тут і далі означає позначення СК, у якій задані вектори, або компоненти векторів). Для матриць індекси у дужках означають: верхній – у яку СК ця матриця перекладає вектори, а нижній – з якої) і малими кутами Крилова: $\psi^{(O_1)}$ – кут повороту навколо осі O_1y, $\theta^{(O_1)}$ – кут повороту навколо осі O_1x, $\varphi^{(O_1)}$ – кут повороту навколо осі O_1z. Тоді шукані параметри деформації балки можна знайти через них

$$\begin{aligned} &w_x = x_{O_2}^{(O_1)}, \quad w_z = z_{O_2}^{(O_1)}, \quad u = y_{O_2}^{(O_1)} - l,\\ &\varphi_x = \theta^{(O_1)} \quad \varphi = \psi^{(O_1)}, \quad \varphi_z = \varphi^{(O_1)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Виразити картезіанські координати т. O_2 у СК $O_1x_1y_1z_1$ нескладно (далі будуть виведені відповідні формули). Дещо складніше отримати вирази для кутів Крилова. Тому спершу отримаємо їх.

Позначимо кути Крилова, що задають орієнтацію СК $O_2x_2y_2z_2$ щодо СК $O_1x_1y_1z_1$: ψ – поворот навколо осі O_1y_1, θ – поворот навколо осі O_1x_1, γ – поворот навколо осі O_1z_1. Матриця повороту СК $O_1x_1y_1z_1$ до СК $O_2x_2y_2z_2$ виражається через кути Крилова відомим способом (тут великими буквами C та S позначено cos та sin, а індексами – їх кути)

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = \begin{bmatrix} C_\psi C_\gamma + S_\psi S_\theta S_\gamma & S_\psi S_\theta C_\gamma - C_\psi S_\gamma & S_\psi C_\theta \\ C_\theta S_\gamma & C_\theta C_\gamma & -S_\theta \\ C_\psi S_\theta S_\gamma - S_\psi C_\gamma & C_\psi S_\theta C_\gamma + S_\psi S_\gamma & C_\psi C_\theta \end{bmatrix}.$$

Звідси, через малість кутів, $\cos\theta \neq 0$. Тоді знайдемо, однозначно,

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(S_{13}/S_{33}\right),\ \theta = -\arcsin S_{23},\ \gamma = \operatorname{arctg}\left(S_{21}/S_{22}\right) \tag{9}$$

У той же час ця матриця може бути знайдена так

$$S_{(O_2)}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(\text{абс})}^{(A)} S_{(B)}^{(\text{абс})} S_{(O_2)}^{(B)}\,, \tag{10}$$

що випливає із послідовності поворотів СК від $O_1x_1y_1z_1$ до $O_1\xi_{1O}\eta_{1O}\zeta_{1O}$, від $O_1\xi_{1O}\eta_{1O}\zeta_{1O}$ до абсолютної, від абсолютної до $O_2\xi_{2O}\eta_{2O}\zeta_{2O}$ та від $O_2\xi_{2O}\eta_{2O}\zeta_{2O}$ до $O_2x_2y_2z_2$ (див. рис. 2).

Для визначення відносних координат т. O_2 у СК $O_1x_1y_1z_1$ виразимо вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ у абсолютній СК

$$\overrightarrow{O_1O_2}^{(\text{абс})} = \vec{r}_B^{(\text{абс})} + S_{(B)}^{(\text{абс})}\overrightarrow{BO_2}^{(B)} - \vec{r}_A^{(\text{абс})} - S_{(A)}^{(\text{абс})}\overrightarrow{AO_1}^{(A)} =$$

$$= \left[\vec{r}_B^{(\text{абс})} - \vec{r}_A^{(\text{абс})}\right] + S_{(B)}^{(\text{абс})}\overrightarrow{BO_2}^{(B)} - S_{(A)}^{(\text{абс})}\overrightarrow{AO_1}^{(A)}$$

і переведемо його в СК $O_1x_1y_1z_1$. Отримаємо

$$\overrightarrow{O_1O_2}^{(O_1)} = S_{(A)}^{(O_1)} S_{(\text{абс})}^{(A)} \overrightarrow{O_1O_2}^{(\text{абс})} =$$

$$= S_{(A)}^{(O_1)}\left\{S_{(\text{абс})}^{(A)}\left[\left(\vec{r}_B^{(\text{абс})} - \vec{r}_A^{(\text{абс})}\right) + S_{(B)}^{(\text{абс})}\overrightarrow{BO_2}^{(B)}\right] - \overrightarrow{AO_1}^{(A)}\right\}. \quad (11)$$

У цих формулах матриці $S_{(\text{абс})}^{(A)}$ і $S_{(B)}^{(\text{абс})}$ визначаються із послідовності поворотів, заданих у описі поворотів СК у секціях OK_A та OK_B для вузлів Ім'я$_\text{A}$ та Ім'я$_\text{B}$ у формулах (1) відповідно, матриці $S_{(A)}^{(O_1)}$ і $S_{(O_2)}^{(B)}$ – аналогічно із секцій K_A та K_B описів балки (1). Аналогічно, вектори $\overrightarrow{AO_1}^{(A)}$ і $\overrightarrow{BO_2}^{(B)}$ легко визначаються із описів зміщень у секціях K_A і K_B задання балки, а вектори $\vec{r}_A^{(\text{абс})}$ – $\vec{r}_B^{(\text{абс})}$ – із задання вузлів там же у формулах (1).

Тестування та розрахунки за наведеним алгоритмом. Для налагодження програми, що реалізує розроблений алгоритм, було розглянуто наступний приклад (рис. 3).

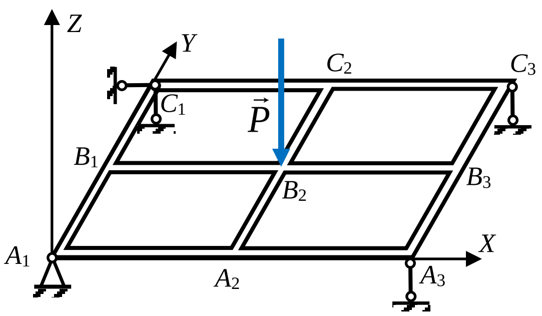

Рисунок 3 – Віконна рама, що завантажена у середині

Тут представлена квадратна сталева рама $A_1A_3C_3C_1$ зі стороною 1 *м*, що складається із трубок квадратного перерізу 20х20х2 *мм* з симетричним перехрестям $B_1B_2B_3A_2C_2$. Рама навантажена у центрі зосередженою силою P =100 *Н* і спирається у т. A_1 на нерухомий сферичний шарнір, а у точках A_3, C_1 і C_3 – на рухомі сферичні шарніри, що допускають рухатись точкам кріплення відповідно – у горизонтальній площині (тт. A_3 та C_3), та вздовж осі A_1Y (т. C_1). Визначити координати вузлів у положенні рівноваги.

Рішення. Раму представимо складеною з 12-ти сталевих балок перерізу 20х20х2 *мм* кожна довжиною по 0,5 *м*. Відповідно до ГОСТ 8639-82 [11] визначаємо площу перерізу $F = 1{,}37\cdot10^{-4}$ *м*^{2}, осьовий геометричний момент інерції перерізу $I_x = I_z = 0{,}723\cdot10^{-8}$ *м*^{4}, погонну масу 1,075 *кг/м*. Модуль пружності для сталі приймемо рівним $E = 2{,}1\cdot10^{11}$ *Н/м*^{2}, а модуль зсуву $G = 8{,}1\cdot10^{10}$ *Н/м*^{2}.

Підготуємо вихідні дані розрахунку мовою ССКА КіДиМ. У кожному вузлу розташуємо точкове тверде тіло і зв'язану з ним локальну СК з осями, паралельними до основної системи A_1XYZ (див. рис. 3). Враховуючи очевидну деформацію конструкції, будемо задавати орієнтацію пов'язаних систем координат кутами Крилова – послідовністю: поворот навколо осі ординат (ψ), поворот навколо осі абсцис (θ), поворот навколо осі аплікат (γ). Зосередимо масу конструкції у вузлах шляхом поділу маси балок навпіл на кінці. Представимо таким чином у вузлах конструкції масивні точки, які крім маси мають і моменти інерції. Це потрібно для того, щоб задача була динамічно визначеною. Для розв'язання поставленої задачі статики величини інерційних властивостей введених твердих тіл у вузлах особливого значення не мають і впливають лише на швидкість отримання результату.

Таким чином, у системі 48 узагальнених координат – 27 кутів (9 вузлів по 3 кути) та 21 картезіанська координата (9 вузлів по 3 координати – 7 умов на межах **`xA1=0; yA1=0; zA1=0; zA3=0; xC1=0, zC1=0; zC3=0`**;).

Вигляд базових даних для розв'язання задачі:

```
# Опишемо вузли рами #
Ai | Sx(xAi), Sy(yAi), Sz(zAi), Ry(psiAi), Rx(tetaAi), Rz(gammaAi) | m(mAi), Jx(J), Jy(J), Jz(J);
B$i | Sx(xBi), Sy(yBi), Sz(zBi), Ry(psiBi), Rx(tetaBi), Rz(gammaBi) | m(mBi), Jx(J), Jy(J), Jz(J);
Ci | Sx(xCi), Sy(yCi), Sz(zCi), Ry(psiCi), Rx(tetaCi), Rz(gammaCi) | m(mCi), Jx(J), Jy(J), Jz(J);
xA1=0; yA1=0; zA1=0; zA3=0; zC1=0; xC1=0; zC3=0;
# маси балок розносимо навпіл на вузли і сумуємо: #
mp=1.075; L=0.5; mb=L*mp; mA1=mA3=mC1=mC3=mb;
mA2=mB1=mB3=mC2=1.5*mb; mB2=2*mb; J=0.01;
РОЗМНОЖИТИ: = i(1,3), j(1,2), k(2,3);
# Опишемо балки рами #
F=1.37e-4; Ix=0.723e-8; E=2e11; G=8.4e10;
Ai_Bi || | | L(l),F(F),Ix(Ix),Iy(Ix),E(E),G(G);
Bi_Ci || | | L(l),F(F),Jx(Jx),Jy(Jx),J,E(E),G(G);
Aj_Ak||Rz(-pi/2)| Rz(-pi/2) | L(L), F(F), Ix(Ix), Iy(Ix), E(E), G(G);
Bj_Bk||Rz(-pi/2) | Rz(-pi/2) | L(L), F(F), Ix(Ix), Iy(Ix), E(E), G(G);
Cj_Ck||Rz(pi/2) | Rz(pi/2) | L(L),F(F), Ix(Ix), Iy(Ix), E(E), G(G);
# Опишемо силу P: # P.zB2=-P; P = 100;
```

Для скорочення записів тут використано нижні індекси i, j, k границі значень яких вказано в інструкції РОЗМНОЖИТИ. Це дає змогу ССКА КіДиМ побудувати повний комплект даних [12].

Такий комплект дозволяє ССКА КиДиМ автоматично побудувати динамічні рівняння руху обраної моделі і провести розрахунки. Для того, щоб отримати координати вузлів у положенні рівноваги треба мати у моделі демпфуючі елементи і обрати величини інерційних параметрів. Ще треба задати початкові значення узагальнених координат. Це дасть змогу отримати необхідний перехідний процес. Сили дисипації мають вплив на швидкість динамічного процесу переходу системи з початкового положення до урівноваженого. Достатньо їх задати у лінійному вигляді [2. Треба тільки підібрати значення коефіцієнтів дисипації. Початкові умові логічно обирати в положенні недеформованої конструкції. На рис. 4 і 5 показано закон зміни аплікати центральної точки рами для двох наборів значень коефіцієнтів дисипації.

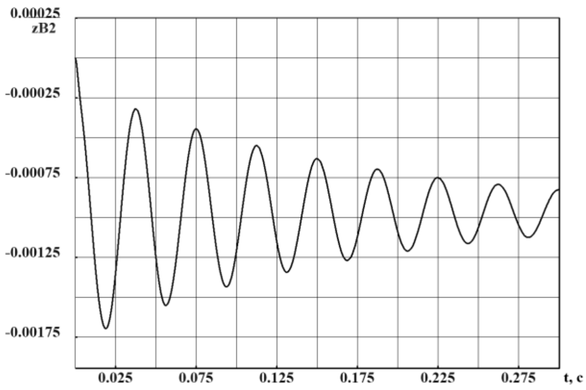

Рисунок 4 – Апліката т. B_2 для коефіцієнтів дисипації – по кутах 10 *кгм/с*, по координатах 10 *кг/с*

Таким чином, для задач статики потрібно підбирати величину дисипації так, щоб отримати аперіодичний процес.

Для об'єктивної перевірки отриманих динамічним методом результатів цей же приклад було розраховано за висхідним алгоритмом за методикою, що викладена в статті [13]. У таблиці 1 наведено розраховані обома методами дані порівняння значень координат та кутів повороту вузлів. Тут жирним шрифтом вказані результати динамічного методу. Бачимо практичний збіг даних.

Таблиця 1 – Дані порівняння суттєвих значень координат та кутів повороту вузлів

Вузол	Z, *м*	ROTX, *рад*	ROTY, *рад*
A1		-0.12063e-2	0.12063e-2
		-0.12712e-2	**0.12712e-2**
B1	-0.38553e-3		0.15571e-2
	-0.40357e-3		**0.15739e-2**
C1		0.12063e-2	0.12063e-2
		0.127125e-2	**0.12712e-2**
A2	-0.38553e-3	-0.15571e-2	
	-0.40357e-3	**-0.157393e-2**	
B2	-0.94271e-3		
	-0.96857e-3		
C2	-0.38553e-3	0.15571e-2	
	-0.40357e-3	**0.15739e-2**	
A3		-0.12063e-2	-0.12063e-2
		-0.12712e-2	**-0.12712e-2**
B3	-0.38553e-3		-0.15571e-2
	-0.40357e-3		**-0.15739e-2**
C3		0.12063e-2	-0.12063e-2
		0.12712e-2	**-0.12712e-2**

Висновки. Для балочних гратчастих конструкцій запропоновано універсальний опис механічної моделі на підставі введення нового елементу «Beam», що задає положення систем координат, пов'язаних з крайніми перерізами, геометричні та фізичні параметри балок моделі. Пружні, дисипативні властивості таких балок отримуються програмно використовуючи розроблений алгоритм. Інерційні та силові властивості моделі записуються традиційно що відповідно можливостям ССКА КіДиМ.

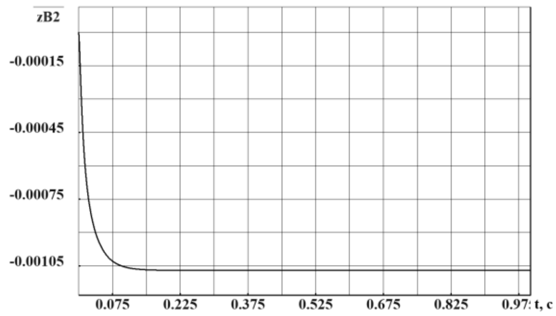

Рисунок 5 – Апліката т. B_2 для коефіцієнтів дисипації – по кутах 100 *кгм/с*, по координатах 1000 *кг/с*

На базі цього програмно будуються динамічні та статичні рівняння, за допомогою яких формуються математичні моделі статичних, кінематичних, кінетостатичних та динамічних розрахунків та проводяться самі розрахунки.

Такий опис дозволяє задавати та розрахунковим шляхом отримувати положення та просторову орієнтацію вузлів решітки при статичному та динамічному аналізі. Опис заснований на поданні стрижнів решітки у вигляді балок, що зазнають деформації загального виду – розтяг, кручення, вигин у двох площинах. При цьому маси балок і прикладені до них сили розносяться по вузлах ґрат. Орієнтація вузлів у просторі визначається кутами Крилова, надалі можуть використовуватися кватерніони. Передбачена можливість індексації вузлів решітки, що суттєво зменшує обсяг даних, що готуються дослідником.

Чисельними розрахунками на простих моделях перевірено ефективність такого опису механічної моделі, отримана задовільна точність статичних розрахунків.

В подальшому передбачається включити в алгоритм автоматичне визначення інерційних та дисипативних властивостей балок, що дасть змогу проводити чисто динамичні розрахункі (перехідних процесів, вільних та вимушених коливань, які встановилися, визначення положень рівноваги та напружено-деформованого стану при статичних та динамічних навантаженнях тощо) за пропонованою методікою.

Список літератури

1. *Горбачев В. И.* О постановке задач в общей теории Бернулли-Эйлера неоднородных анизотропных стержней / В. И. Горбачев, Т. М. Мельник // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1., Математика. Механика. 2018, №1, с. 43-51.

2. *Зылев В. Б.* Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций / В. Б. Зылев. – М.: Науч.-изд. центр "Инженер", 1999. – 145 с.

3. *Митин В. Н.* К расчету перемещений и внутренних усилий в балочных конструкциях / В. Н. Митин, В. М. Халыпа, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин: респ. межведом. науч.-техн. сб. – Х.: Вища шк. Изд-во при

Харк. ун-те, 1981. – Вып. 34. – С. 36-41.

4. *Кравец В. В.* Исследование параметров пространственного движения свободного твердого тела в нелинейной постановке / В. В. Кравец, Е. П. Крышко // Прикл. механика. – 1984. – Т. 20, №11. – С. 122–125.

5. *Андреев Ю. М.* Моделирование стержневых и балочных конструкций в специальной системе компьютерной алгебры / Ю. М. Андреев // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2007. – №1/1 (25). – С. 63–66.

6. *Андреев Ю.М., Морачковский О.К.* О динамике голономных систем твердых тел. Прикладная механика. 2005. Т. 41, №7. С. 130-138.

7. *Андреев Ю. М., Морачковский О. К.* Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел. Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. КИЕВ: ИПП им. Писаренко Г.С. Ассоц. «Надежность машин и сооружений». 2006. Вып. 26. С. 11-18.

8. *Мяченков В. И.* Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов : справочник / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др.; под общ. ред. В. И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.

9. *Павловський М. А.* Теоретична механіка: Підручник. / М.А. Павловський – К.: Техніка, 2002. – 512 с.

10. *Андреев Ю. М.* Реализация и использование алгоритма Левенберга-Марквардта в задачах калибровки роботов-манипуляторов / Ю. М. Андреев // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 2 (2021). – С. 86 – 93.

11. ГОСТ 8639-82. Трубы стальные квадратные. Сортамент [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://internet-law.ru/gosts/gost/3826/ вільний. – Загол. з екрану – Мова рос.

12. *Андреев Ю. М.* Метод подсистем для аналитического динамического анализа и синтеза / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Физические и компьютерные технологии : 12-я Междунар. конф. : труды. — Харьков : ХНПК “ФЭД”, 2006. – С. 123–131.

13. *Бреславський Д. В.* Комп’ютерне моделювання деформованого стану та міцності рамної конструкції важкого БПЛА / Д. В. Бреславський, В. М. Конкін, В. І. Кортунов, О. М. Марусенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2021. – № 2 (2022). – С. 17 – 22.

References (transliterated)

1. *Gorbachev V. I.* O postanovke zadach v obshchej teorii Bernulli-Ejlera neodnorodnyh anizotropnyh sterzhnej / V. I. Gorbachev, T. M. Mel'nik // Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1., Matematika. Mekhanika. 2018, №1, P. 43-51.

2. *Zylev V. B.* Vychislitel'nye metody v nelinejnoj mekhanike konstrukcij / V. B. Zylev. – M.: Nauch.-izd. centr "Inzhener", 1999. – 145 p.

3. *Mitin V. N.* K raschetu peremeshchenij i vnutrennih usilij v balochnyh konstrukciyah / V. N. Mitin, V. M. Halypa, L. I. SHtejnvol'f // Dinamika i prochnost' mashin: resp. mezhotvod. nauch.-tekhn. sb. – Kh.: Vishcha shk. Izd-vo pri Hark. un-te, 1981. – Vyp. 34. – P. 36-41.

4. *Kravec V. V.* Issledovanie parametrov prostranstvennogo dvizheniya svobodnogo tverdogo tela v nelinejnoj postanovke / V. V. Kravec, E. P. Kryshko // Prikl. mekhanika. – 1984. – T. 20, №11. – P. 122–125.

5. *Andrieiev Yu. M.* Modelirovanie sterzhnevyh i balochnyh konstrukcij v special'noj sisteme komp'yuternoj algebry / Yu. M. Andrieiev // Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tekhnologij. – Khar'kov, 2007. – №1/1 (25). – P. 63–66.

6. *Andrieiev Yu. M., Morachkovskij O. K.* O dinamike golonomnyh sistem tverdyh tel. Prikladnaya mekhanika. 2005. T. 41, №7. P. 130-138.

7. *Andrieiev Yu. M., Morachkovskij O.K.* Novaya sistema komp'yuternoj algebry dlya issledovaniya kolebanij strukturno-slozhnyh golonomnyh i negolonomnyh sistem tverdyh tel. Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzhenij: mezhd. nauch.-tekhn. sb. NAN Ukrainy. KIEV: IPP im. Pisarenko G.S. Assoc. «Nadezhnost' mashin i sooruzhenij». 2006. Vyp. 26. P. 11-18.

8. *Myachenkov V. I.* Raschety mashinostroitel'nyh konstrukcij metodom konechnyh elementov : spravochnik / V. I. Myachenkov, V. P. Mal'cev, V. P. Majboroda i dr.; pod obshch. red. V. I. Myachenkova. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 520 p.

9. *Pavlovs'kij M. A.* Teoretichna mekhanika: Pidruchnik. / M.A. Pavlovs'kij – K.: Tekhnika, 2002. – 512 s.

10. *Andrieiev Yu. M.* Realizaciya i ispol'zovanie algoritma Levenberga-Markvarda v zadachah kalibrovki robotov-manipulyatorov / Yu. M. Andrieiev // Visnik NTU «KHPI». Seriya: Dinamika ta micnist' mashin. – Kharkiv : NTU «KHPI», 2021. – № 2 (2021). – P. 86 – 93.

11. GOST 8639-82. Truby stal'nye kvadratnye. Sortament [Elektronnij resurs] – Rezhim dostupu: https://internet-law.ru/gosts/gost/3826/ vil'nij. – Zagol. z ekranu – Mova ros.

12. *Andrieiev Yu. M.* Metod podsistem dlya analiticheskogo dinamicheskogo analiza i sinteza / Yu. M. Andrieiev, O. K. Morachkovskij // Fizicheskie i komp'yuternye tekhnologii : 12-ya Mezhdunar. konf. : trudy. — Khar'kov : HNPK “FED”, 2006. – P. 123–131.

13. *Breslavs'kij D. V.* Komp’yuterne modelyuvannya deformovanogo stanu ta micnosti ramnoї konstrukciї vazhkogo BPLA / D. V. Breslavs'kij, V. M. Konkin, V. I. Kortunov, O. M. Marusenko // Visnik NTU «KHPI». Seriya: Dinamika ta micnist' mashin. – Kharkiv : NTU «KHPI», 2021. – № 2 (2022). – P. 17 – 22

Надійшла (received) 24.12.2022

Відомості про авторів / About the Authors

Андрєєв Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп’ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3213-8496; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Andrieiev Yuriy – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3213-8496; e-mail: andrjejev@gmail.com.

Марусенко Олексій Миколайович – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», асистент кафедри комп’ютерного моделювання процесів та систем; м. Харків, Україна; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6911-2500; e-mail: Oleksii.Marusenko@khpi.edu.ua.

Marusenko Oleksii – Assistant of the Department of Computer Modelling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6911-2500; e-mail: Oleksii.Marusenko@khpi.edu.ua.