

*О. М. ПИГНАСТЫЙ, М. О. СОБОЛЬ*

## АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЯ В КОНВЕЙЕРНОЙ ЛЕНТЕ ДЛЯ MAXWELL-МОДЕЛИ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА

Рассмотрен механизм распространения продольных динамических напряжений в конвейерной ленте, материал которой соответствует Maxwell модели упругого элемента. Рассмотрены особенности возникновения продольных колебаний в материале конвейерной ленты для секции транспортной системы, оснащенной асинхронными двигателями. Показано, что ускорение конвейерной ленты возникает в результате скачкообразного изменения тягового момента асинхронного электродвигателя при изменении потребляемой мощности участка конвейера. Процесс ускорения/торможения ленты конвейера носит периодический характер и определяется неравномерностью распределения материала вдоль транспортного маршрута. Это накладывает дополнительные ограничения на синтез алгоритмов оптимального управления скоростью конвейерной ленты. Для анализа распространения динамических напряжений в конвейерной ленте использована Maxwell модель упругого элемента. Учет неравномерности распределения материала вдоль транспортного маршрута основан на аналитической PiKh-модели конвейерной секции. Для анализа продольных колебаний в конвейерной ленте секции транспортной системы записано волновое уравнение и обоснованы граничные условия. Дана оценка скорости распространения продольных колебаний в ленте конвейера. Получено решение волнового уравнения, основанное на методе последовательных приближений, определяющее динамику распространения динамических напряжений вдоль конвейерной ленты. Дана оценка значения характерного времени ускорения ленты, определяющая непрерывный режим функционирования секции транспортного конвейера. Научная новизна полученных результатов заключается в усовершенствовании систем управления потоковыми параметрами транспортной системы при наличии ограничений, связанных с возникновением продольных колебаний в конвейерной ленте. Практическая значимость полученных результатов состоит в построении методики расчета ограничений режима ускорения/торможения конвейерной ленты, неравномерно загруженной материалом вдоль транспортного маршрута.

**Ключевые слова:** конвейер, распределенная система, регулирование скорости ленты, конвейер, PDE-модель, Maxwell element, Hookean element.

Розглянуто механізм поширення поздовжньої динамічної напруги в конвеєрній стрічці, матеріал якої відповідає Maxwell моделі пружного елемента. Розглянуто особливості виникнення поздовжніх коливань у матеріалі конвеєрної стрічки для секції транспортної системи, що оснащена асинхронними двигунами. Показано, що прискорення конвеєрної стрічки виникає в результаті стрибкоподібної зміни тягового моменту асинхронного електродвигуна при зміні споживаної потужності ділянки конвеєра. Процес прискорення/гальмування стрічки конвеєра має періодичний характер і визначається нерівномірністю розподілу матеріалу вздовж транспортного маршруту. Це накладає додаткові обмеження синтезу алгоритмів оптимального управління швидкістю конвеєрної стрічки. Для аналізу поширення динамічних напруг у конвеєрній стрічці використана Maxwell модель пружного елемента. Облік нерівномірності розподілу матеріалу вздовж транспортного маршруту ґрунтується на PiKh-аналітичній моделі конвеєрної секції. Для аналізу поздовжніх коливань у конвеєрній стрічці секції транспортної системи записано хвильове рівняння та обґрунтовано граничні умови. Дана оцінка швидкості поширення поздовжніх коливань у стрічці конвеєра. Отримано рішення хвильового рівняння, засноване на методі послідовних наближень, що визначає динаміку поширення динамічних напруг уздовж конвеєрної стрічки. Дано оцінку значення характерного часу прискорення стрічки, що визначає безперервний режим функціонування секції транспортного конвеєра. Наукова новизна одержаних результатів полягає в удосконаленні систем керування потоковими параметрами транспортної системи за наявності обмежень, пов'язаних із виникненням поздовжніх коливань у конвеєрній стрічці. Практична значущість одержаних результатів полягає у побудові методики розрахунку обмежень режиму прискорення (гальмування) конвеєрної стрічки, нерівномірно завантаженої матеріалом уздовж транспортного маршруту.

**Ключевые слова:** конвеєр, розподілена система, регулювання швидкості стрічки, конвеєр, PDE-модель, Maxwell element, Hookean element.

The mechanism of propagation of longitudinal dynamic stresses in a conveyor belt, the material of which corresponds to the Maxwell model of an elastic element, is considered. The features of the occurrence of longitudinal vibrations in the material of the conveyor belt for the section of the transport system equipped with asynchronous motors are considered. It is shown that the acceleration of the conveyor belt occurs as a result of an abrupt change in the traction moment of the asynchronous electric motor when the power consumption of the conveyor section changes. The process of acceleration/deceleration of the conveyor belt is periodic and is determined by the uneven distribution of material along the transport route. This imposes additional restrictions on the synthesis of algorithms for optimal control of the conveyor belt speed. Accounting for uneven distribution of material along the transport route is based on an analytical PiKh-model of the conveyor section. To analyze the longitudinal vibrations in the conveyor belt section of the transport system, the wave equation is written and the boundary conditions are substantiated. An estimate of the propagation velocity of longitudinal vibrations in the conveyor belt is given. A solution of the wave equation based on the method of successive approximations is obtained, which determines the dynamics of the propagation of dynamic stresses along the conveyor belt. An estimate of the value of the characteristic acceleration time of the belt, which determines the continuous mode of operation of the transport conveyor section, is given. The scientific novelty of the results obtained lies in the improvement of the control systems for the flow parameters of the transport system in the presence of restrictions associated with the occurrence of longitudinal vibrations in the conveyor belt. The practical significance of the results obtained lies in the construction of a methodology for calculating the limitations of the acceleration/deceleration mode of a conveyor belt unevenly loaded with material along the transport route.

**Keywords:** conveyor, distributed system, belt speed control, conveyor, PDE model, Maxwell element, Hookean element.

**Введение.** Транспортные системы конвейерного типа находят широкое применение в горнодобывающей промышленности [1]. Это объясняется прежде всего тем, что а) конвейер – это один из самых экономичных способов транспортировки материала с места добычи до места отгрузки или переработки; б) конвейер позволяет перемещать материал через труднопроходимые пересеченные местности [2, 3]. Транспортные затраты составляют до 20% от

себестоимости добытого материала [4] при коэффициенте загрузки материала в транспортной системе 0.5–0.7[5]. При увеличении длины транспортной системы и снижении коэффициента загрузки рост удельных транспортных затрат является нелинейным, что может привести к увеличению затрат в несколько раз [6]. Для снижения затрат электроэнергии используются системы управления скоростью ленты [7, 8], величиной входного потока

материала [9, 10], комбинированные методы и методы, основанные на методологии энергетического менеджмента [11]. Регулирование скорости ленты позволяет снизить удельные потери электроэнергии на транспортировку материала до 30% [12]. Разделение транспортной системы на отдельные секции [13] и применение мульти-двигательных систем позволяет перемещать материал по транспортной системе с разной скоростью ленты для разных секций [14], что дает экономию энергии. Особо важное значение это приобретает для многосекционных транспортных систем большой протяженности [2]. Регулирование скорости ленты или величины входного потока приводит к изменению коэффициента заполнения секции, а следовательно к изменению мощности, необходимой для функционирования секции конвейера в нормативном режиме. Наличие режимов переключения мощности приводит к возникновению динамических напряжений в ленте, что может быть причиной ее повреждения. В связи с этим, при проектировании систем управления, определяющих режимы переключения мощности, актуальным является вопрос учета ограничений, связанных с возникновением динамических напряжений, которые могут превышать предельное значение и привести к разрушению ленты.

**Постановка проблемы.** Изменение режима мощности конвейерной секции приводит к изменению тягового момента, и соответственно, к последующему ускорению (торможению) конвейерной ленты. Для асинхронного двигателя с фазовым ротором зависимость тягового момента электродвигателя  $M_{eng}$  от частоты вращения  $n_{eng}$  при номинальных значениях момента  $M_{eng0}$  и частоты вращения  $n_{eng0}$  электродвигателя представлена на Рис. 1 [15].

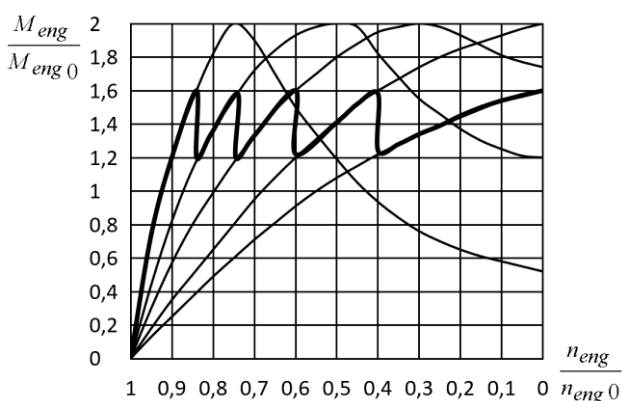


Рис. 2 – Механическая характеристика асинхронного двигателя с фазовым ротором

Процесс ускорения (торможения) конвейерной ленты с материалом происходит в несколько этапов, каждый из которых характеризуется скачкообразным изменением тягового момента электродвигателя. Такое пилообразное изменение тягового момента в зависимости от изменения частоты вращения

двигателя (Рис. 1) является источником существования динамических напряжений в ленте. Наличие динамических напряжений накладывает дополнительные ограничения на режимы ускорения(торможения) конвейерной ленты. Данные ограничения необходимо учитывать при синтезе алгоритмов оптимального управления потоковыми параметрами транспортной системы. Линейная плотность материала  $[\chi]_0(t, S)$  вдоль транспортного маршрута в момент времени  $t$  в точке секции конвейера с координатой  $S \in [0, S_d]$ , может быть рассчитана из соотношения [6]

$$\theta_0(\tau, \xi) = (H(\xi) - H(\xi_G)) \frac{\gamma_1(\tau_\xi)}{g(\tau_\xi)} + H(\xi_G) \psi(\xi_G),$$

где

$$G(\tau) = \int_0^\tau g(\alpha) d\alpha, \quad \tau_\xi = \tau - \Delta\tau_\xi, \quad \xi_G = \xi - G(\tau),$$

$$\tau = t/T_d, \quad \xi = S/S_d, \quad H(S_d \xi) = H(S),$$

$$\psi(\xi) = \Psi(S)/[\chi]_{0\max}, \quad \gamma_1(\tau) = \lambda_1(t)T_d/S_d/[\chi]_{0\max},$$

$$g(t) = \mu_\psi(t)T_d/S_d, \quad \theta_0(\tau, \xi) = [\chi]_0(t, S)/[\chi]_{0\max}.$$

Выражение  $\theta_0(\tau, \xi)$  определяет взаимосвязь линейной плотности материала  $[\chi]_0(t, S)$ , скорости движения ленты  $\mu_\psi(t)$  и входного потока материала  $\lambda_1(t)$  при начальном распределении материала с плотностью  $\Psi(S)$ . В качестве характерного времени процесса принято среднее время  $T_d$  прохождения материала вдоль транспортного маршрута длиной  $S_d$  секции конвейера. Значение  $[\chi]_{0\max}$  соответствует предельно допустимой линейной плотности материала для конвейерной секции. Выбор характерных величин  $T_d, S_d, [\chi]_{0\max}$  является условным.

Анализ распространения динамических напряжений в конвейерной ленте выполним для Maxwell модели упругого элемента [16] (Рис. 2) с модулем упругости элемента  $E$  и вязкостью  $\eta$

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma(t, S)}{dt} + \frac{\sigma(t, S)}{\eta} = \frac{d\varepsilon(t, S)}{dt}. \quad (1)$$

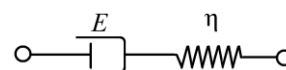


Рис. 2 – Maxwell element

Maxwell модель упругого элемента может быть использована для конвейерных лент, в состав которых входит резина, нейлон и полиэстер [17]. При изменении тяговой нагрузки в результате переключения мощности элемент Гука деформируется на величину  $\sigma_0/E$ , а вязкий элемент деформируется с

постоянной скоростью  $\sigma_0/\eta$ . Общая деформация  $\varepsilon(t, S)$  определяется интегрированием уравнения (1)

$$\frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t = \varepsilon(t, S), \quad \varepsilon(0, S) = \sigma_0 / E.$$

При длительном времени наличия напряжения деформация  $\varepsilon(t, S)$  становится достаточно существенной. Для постоянной скорости деформации  $v_\varepsilon \approx const$  решение уравнения (1) имеет вид

$$\sigma(t, S) = \eta v_\varepsilon (1 - e^{-t/t_0}),$$

$$\frac{d\varepsilon(t, S)}{dt} = v_\varepsilon, \quad t_0 = \eta / E.$$

При длительном времени процесса деформации напряжение в конвейерной ленте стремится к постоянному значению.

Решения уравнения (1) демонстрируют характерное поведение материала ленты (Maxwell element), находящегося в нагруженном состоянии. Для изучения распространения динамических напряжений в конвейерной ленте построено уравнение, которое учитывает граничные условия, представленные зависимостью между тяговым моментом и скоростью движения ленты конвейера.

**Обзор литературы.** Свойства материала, из которого изготовлена конвейерная лента, определяют процесс распространения динамических напряжений. Характерные особенности моделей упругих элементов (Hookean element, Newtonian element, Maxwell element, Kelvin element, Venant element, CDI geometric beam element, CDI five-element) для анализа распространения динамических возмущений вдоль конвейерной ленты рассмотрены в [17]. С использованием finite element method (FEM) выполнен расчет динамических напряжений, возникающих в процессе старта и остановки действующей транспортной системы протяженностью 9 км. В статье [18] дан сравнительный анализ моделей Vogit element и Maxwell element и с использованием уравнений Лагранжа выполнен расчет динамики распространения напряжений вдоль конвейерной ленты для различных режимов ускорения/торможения. Расчет скоростных режимов секции конвейера для модели упругого элемента Maxwell element и модели транспортной системы Winkler foundation представлен в [19] Упругий элемент Kelvin-Voigt element использован в модели, содержащей уравнения Лагранжа [20], для расчета зависимостей Belt stretch curve, Velocity curves. В статье [21] исследуются модели упругого элемента Kelvin-Voigt element, комбинация Hookean и Kelvin-Voigt element, а также комбинация двух Kelvin-Voigt element. Generalized maxwell material model представлена в [22]. Длинноволновые колебания в конвейерной ленте для модели упругого элемента Hookean element и аналитической PkK-модели

детально исследованы в [23]. Результаты экспериментальных исследований механических свойств композиционных материалов для изготовления конвейерной ленты с картриджами из полиэстера и полиамида приведены в [24].

**Уравнение распространения динамических напряжений.** Уравнение, описывающее движение элемента  $dS$  в точке  $S$  ленты с эффективной массой  $dm$  и ускорением  $d\mu(t, S)/dt$  имеет вид

$$\frac{d\mu(t, S)}{dt} dm = \sigma(t, S + dS)Bh - \sigma(t, S)Bh - dF_w.$$

Сила сопротивления движению ленты  $F_w$  является суммой сопротивлений [23, 25]

$$F_w = F_H + F_N + F_{St} + F_S.$$

Первичные сопротивления  $F_H$  в предположении линейного отношения между сопротивлениями и транспортируемой нагрузкой определяются выражением

$$dF_H = dSf_c g_m ([\chi]_{0R} + ([\chi]_0(t, S) + [\chi]_{0C}) \cos \delta_C),$$

где  $f_c$  – коэффициент сопротивления качения ведущих роликов и сопротивления вдавливания ленты;

$g_m = 9.81$  (m/sec<sup>2</sup>);

$[\chi]_{0C}$  – линейная плотность ленты;

$[\chi]_{0R}$  – линейная нагрузка от вращающихся частей;

$\delta_C$  – угол наклона участка секции конвейера.

Для конвейера, расположенного горизонтально

$$\cos \delta_C = 1.$$

Сила  $F_N$ , учитывающая влияние на движение вторичных сопротивлений, выражается через величину первичных сопротивлений движению  $F_H$  [25]

$$F_N = (C - 1)F_H.$$

Для протяженных конвейерных систем  $C \approx 1.05$ . Градиентное сопротивление ленты и транспортируемого материала определяется выражением [25]

$$dF_{St} = dS \sin \delta_C g_m ([\chi]_0(t, S) + [\chi]_{0C}).$$

Для горизонтально расположенных секций отсутствует,  $\sin \delta_C = 0$ . Для большинства конвейерных секций предполагается, что сила  $F_S$ , связанная со специальными сопротивлениями, определяемыми особенностями проектирования конвейера, мала,  $F_S \ll F_H$ . С учетом указанных допущений выражение для силы сопротивления движению ленты запишем в виде

$$dF_w = dS C f_c g_m ([\chi]_{0R} + [\chi]_0(t, S) + [\chi]_{0C}).$$

Эффективная масса  $dm$  элемента  $dS$  в точке  $S$  конвейерной ленты определяется через эффективную плотность  $[\chi]_{ef}(t, S)$  движущего элемента

$$dm = [\chi]_{ef}(t, S) dS,$$

$$[\chi]_{0ef}(t, S) = [\chi]_{0R} + [\chi]_0(t, S) + [\chi]_{0C},$$

что позволяет записать исходное уравнение движение элемента  $dS$  в точке  $S$  ленты в виде

$$\frac{d\mu(t, S)}{dt} = \frac{Bh}{[\chi]_{0ef}(t, S)} \frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial S} - C f_c g_m, \quad (2)$$

Введем абсолютное удлинение конвейерной ленты  $W(t, S)$  в момент времени  $t$  для координаты  $S$ . Отношение удлинения  $dW(t, S)$  к длине отрезка  $dS$  есть относительная деформация элемента

$$\varepsilon(t, S) = \frac{\partial W(t, S)}{\partial S},$$

$$\varepsilon(t, S) \approx 10^{-2}, \quad dS \gg dW(t, S).$$

Скорость движения  $\mu(t, S)$  ленты конвейера с материалом, состоит из скорости ленты в равновесном состоянии  $\mu_\psi(t)$  и колебательной части

$$\mu(t, S) = \mu_\psi(t) + \frac{dW(t, S)}{dt},$$

$$|\mu(t, S)\varepsilon(t, S)| \ll \left| \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} \right|,$$

$$\frac{dW(t, S)}{dt} = \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} + \mu(t, S)\varepsilon(t, S),$$

откуда следует

$$\mu(t, S) \approx \mu_\psi(t) + \frac{\partial W(t, S)}{\partial t}.$$

При изменении длины отрезка  $dS$  транспортного маршрута изменяется эффективная плотность

$$[\chi]_{0ef} = [\chi]_{0ef}(t, S).$$

Пусть длина отрезка  $dS$  изменится и станет равной  $dS + dW(t, S)$ . При этом эффективная плотность  $[\chi]_{0ef}$  изменится и станет равной  $[\chi]_{0ef} + \Delta[\chi]_{0ef}$ . Тогда для данного отрезка транспортного маршрута имеем соотношение

$$dS[\chi]_{0ef} = (dS + dW(t, S))([\chi]_{0ef} + \Delta[\chi]_{0ef}).$$

Пренебрегая величиной порядка малости  $dW\Delta[\chi]_{0ef}$ , получим

$$|\partial W(t, S)/\partial S| \approx |\Delta[\chi]_{0ef}/[\chi]_{0ef}| \approx \varepsilon,$$

что позволяет выражение для эффективной линейной плотности

$$[\chi]_{0ef}(t, S) \approx [\chi]_{0\psi ef}(t, S)(1 + \varepsilon) \approx [\chi]_{0\psi ef}(t, S),$$

записать через линейную эффективную плотность  $[\chi]_{0\psi ef}$  в отсутствие динамических напряжений. С учетом указанных допущений представим уравнение (1) и (2) следующим образом

$$\frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial t} + \frac{E}{\eta} \sigma(t, S) = E \frac{\partial \varepsilon(t, S)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 W(t, S)}{\partial t^2} = \frac{Bh}{[\chi]_{0\psi ef}(t, S)} \frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial S} - C f_c g_m - \frac{d\mu_\psi(t)}{dt}, \quad (4)$$

При выводе уравнений (3) и (4) предполагать, что недопустимо для функции  $\sigma(t, S)$ ,  $\varepsilon(t, S)$  иметь большой градиент, приводящий к разрушению ленты:

$$\frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial S} \mu \ll \frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varepsilon(t, S)}{\partial S} \mu \ll \frac{\partial \varepsilon(t, S)}{\partial t}.$$

Проинтегрируем уравнение (3) по времени  $t$

$$\sigma(t, S) + \frac{E}{\eta} \int \sigma(t, S) dt = E\varepsilon(t, S) + \sigma_0(S), \quad (5)$$

Случай  $E/\eta \rightarrow 0$  соответствует закону Гука

$$\sigma(t, S) = E\varepsilon(t, S),$$

откуда

$$\sigma(t, S) = E\varepsilon(t, S).$$

Подставим (5) в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W(t, S)}{\partial t^2} + \frac{C_\psi^2(t, S)}{\eta} \int \frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial S} dt + C f_c g_m + \frac{d\mu_\psi(t)}{dt} = \\ = C_\psi^2(t, S) \frac{\partial \varepsilon(t, S)}{\partial S}, \end{aligned}$$

$$C_\psi^2(t, S) = BhE/[\chi]_{0\psi ef}(t, S).$$

где  $C_\psi$  – скоростью распространения возмущений вдоль конвейерной ленты [26].

Проинтегрировав выражение

$$\begin{aligned} \frac{Bh}{[\chi]_{0\psi ef}(t, S)} \int \frac{\partial \sigma(t, S)}{\partial S} dt = \\ = \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} - \frac{\partial W(0, S)}{\partial t} + C f_c g_m t + \mu_\psi(t) - \mu_\psi(0), \end{aligned}$$

получим волновое уравнение для описания продольных колебаний в конвейерной ленте

$$\frac{\partial^2 W(t, S)}{\partial t^2} + \frac{1}{t_0} \left( \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} - \frac{\partial W(0, S)}{\partial t} \right) =$$

$$= C f_C g_m \left( \frac{t}{t_0} + 1 \right) - \frac{\mu_\psi(t) - \mu_\psi(0)}{t_0} - \frac{d\mu_\psi(t)}{dt} + C_\psi^2(t, S) \frac{\partial W^2(t, S)}{\partial S^2}. \quad (6)$$

**Граничные и начальные условия.** Дополним уравнение (6) граничными условиями (Рис. 3)

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=0} = \frac{T_4}{EBh},$$

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=S_d} = \frac{T_1}{EBh},$$

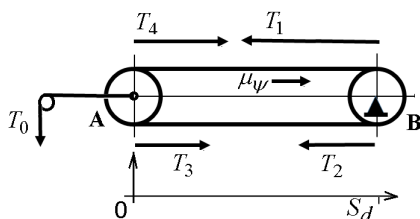


Рис. 3 – Схема сил натяжения конвейерной ленты

Сила натяжения  $T_4$  определяется из условия

$$T_4 + T_3 = T_0, \quad T_4 = k_s T_3,$$

при динамической нагрузке

$$T_0 = M_w g_m + M_w \frac{\partial^2 W(t, 0)}{\partial t^2},$$

где  $M_w$  – масса подвешенного груза, который обеспечивает предварительное натяжение ленты.

Для транспортных конвейеров коэффициент потерь на барабане “А”  $k_s \approx 1,03$  [15]. Используя соотношение

$$T_4 + \frac{1}{k_s} T_4 = M_w g_m + M_w \frac{\partial^2 W(t, 0)}{\partial t^2},$$

запишем первое граничное условие

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=0} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w}{EBh} \left( g_m + M_w \frac{\partial^2 W(t, 0)}{\partial t^2} \right).$$

Если ускорение подвешенного груза мало и принимая во внимание, что

$$k_s / (k_s + 1) \approx 0.5,$$

граничное условие может быть представлено в форме

$$\frac{\partial^2 W(t, 0)}{\partial t^2} = \frac{M_w g_m}{2EBh}.$$

Для построения второго граничного условия, определяющего силу натяжения  $T_1$  конвейера, оснащенного асинхронным двигателем с фазовым ротором, воспользуемся соотношением между

тяговым моментом и угловой скоростью вращения, при заданной механической характеристике электродвигателя (Рис. 1). Для диапазона  $n_{eng}/n_{eng0} \in [0,0;0,4]$  определим соотношение между тяговым моментом и скоростью вращения ротора с механической характеристикой, представленной на Рис. 1

$$\frac{M_{eng}}{M_{eng0}} = a - b \frac{n_{eng}}{n_{eng0}}, \quad a = 1.6, \quad b = 1.$$

Последнее уравнение представим в форме

$$\frac{T_1 - T_2}{M_{eng0}/r} = a - b \frac{\mu_\psi(t)}{\mu_0}, \quad T_1 - T_2 = M_{eng}/r \quad (7)$$

где нормативная скорость движения ленты

$$\mu_0 = n_{eng0} 2\pi r$$

соответствует нормативной скорости вращения ротора  $n_{eng0}$  с барабаном радиусом  $r$ . Силу натяжения  $T_1$  определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \exp(k_b \alpha), \\ T_4 = k_s T_3, \\ T_3 = T_2 + F_{H(2-3)} + F_{N(2-3)} + F_{\psi(2-3)}, \\ T_1 = T_4 + F_{H(4-1)} + F_{N(4-1)} + F_{\psi(4-1)} \end{cases} \quad (8)$$

где  $k_b$  – эмпирический коэффициент сцепления между барабаном и лентой.

Значение этих функций для интервалов, заданных точками приложения сил  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , определены выражениями

$$F_{H23} = S_d f_C g_m ([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}),$$

$$F_{N23} = (C - 1) F_{H23},$$

$$F_{\psi23} = \int_0^{S_d} \frac{d\mu}{dt} ([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}) dS = f_{\psi}(t) ([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}) S_d,$$

$$F_{H41} = F_{H23} + f_C g_m \int_0^{S_d} [\chi]_0(t, S) dS,$$

$$F_{N41} = (C - 1) F_{H41},$$

$$F_{\psi41} = F_{\psi23} + \int_0^{S_d} \frac{d\mu}{dt} [\chi]_0(t, S) dS.$$

За характерное время ускорения конвейерной ленты  $\Delta T_f$  материал проходит путь

$$\Delta T_f \mu_0 \ll S_d,$$

что позволяет считать значение  $M$  медленно меняющимся со временем

$$\int_0^{S_d} [\chi]_0(t, S) dS = M, \quad \frac{M}{t_\mu} \gg \frac{dM}{dt}.$$

Из того, что скорость ленты много меньше скорости распространения возмущений, следует

$$\int_0^{t_\mu} \int_0^{S_d} \frac{d\mu}{dt} [\chi]_0(t, S) dS dt \approx M \int_0^{t_\mu} f_\psi(t) dt.$$

Решение системы уравнений (8) дает выражение для силы натяжения  $T_1$

$$T_1 = (k_s CF_{H23} + k_s F_{\psi 23} + CF_{H41} + F_{\psi 41}) \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - k_s}.$$

Воспользуемся выражением (7), получим второе граничное условие

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=S_d} = \frac{T_1}{EBh} = a_w - b_w \mu_\psi(t). \quad (9)$$

$$a_w = \frac{M_{eng0}}{r} \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - 1} \frac{a}{EBh},$$

$$b_w = \frac{a_w}{a} \frac{b}{\mu_0}.$$

Граничное условие (9) зависит от линейной скорости вращения барабана  $\mu_\psi(t)$ . Для определения величины скорости  $\mu_\psi(t)$  воспользуемся уравнением (7). Введем коэффициенты

$$c_{w1} = \frac{k_s + 1}{EBh} \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - k_s} Cf_C g_m ([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}) S_d,$$

$$c_{w2} = \frac{1}{EBh} \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - k_s} Cf_C g_m M,$$

$$d_{w1} = \frac{k_s + 1}{EBh} \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - k_s} ([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}) S_d,$$

$$d_{w2} = \frac{1}{EBh} \frac{\exp(k_b \alpha)}{\exp(k_b \alpha) - k_s} M,$$

$$a_0 = \frac{a_w - c_{w1} - c_{w2}}{d_{w1} + d_{w2}},$$

$$b_0 = \frac{b_w}{d_{w1} + d_{w2}},$$

с учетом которых уравнение (9) примет вид

$$\frac{d\mu_\psi(t)}{dt} = a_0 - b_0 \mu_\psi(t),$$

$$\mu_\psi(0) = 0.$$

Для протяженных конвейерных систем за характерное время ускорения (торможения)  $t_\mu$  масса

транспортируемого груза является квазистационарной величиной, что позволяет считать

$$a_0 = const, \quad b_0 = const.$$

в течении процесса ускорения. Решение последнего уравнения имеет вид

$$\mu_\psi(t) = \frac{a_0}{b_0} (1 - e^{-b_0 t}), \quad t_\mu = b_0^{-1},$$

$$\mu_{st} = \mu_\psi(\infty) = \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_w - c_{w1} - c_{w2}}{b_w} = \frac{a}{b} \mu_0 - \frac{Cf_C g_m}{b_0}.$$

Характерное время ускорения, за которое конвейерная лента с материалом достигнет значения нормативной скорости  $\mu_0$  при нормативном значении тягового момента  $M_{eng0}$ , может быть оценено следующим выражением

$$t_\mu^{-1} = b_0 \Big|_{k_s \rightarrow 1} = \frac{M_{eng0}}{r} \frac{b}{2\pi r n_{eng0}} \frac{1}{M_\mu},$$

$$M_\mu = 2([\chi]_{0R} + [\chi]_{0C}) S_d + M.$$

Решение  $\mu_\psi(t)$  представлено на Рис. 4. Конвейерная лента достигает скорости  $\mu_{st}$  за время  $t \approx 5t_\mu$ . Ускорение ленты имеет максимальное значение на промежутке  $t \in [0, t_\mu]$ . Через промежуток времени  $t \approx 5t_\mu$  движение ленты становится равномерным. При скорости ленты  $\mu_{st}$  ускорение отсутствует. Если скорость  $\mu_{st}$  меньше или больше требуемого значения нормативной скорости конвейерной линии, то изменение значения  $\mu_{st}$  может быть достигнуто через уменьшение или увеличение мощности двигателя в результате переключения режима мощности (Рис. 1). Дополним уравнение (6) начальными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial W(0, S)}{\partial S} \right|_{t=0} &= \frac{1}{EBh} \left( T_4 + \frac{T_1 - T_4}{S_d} S \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} + \left( a_w - b_w \mu_\psi(t) - \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} \right) \frac{S}{S_d} \Big|_{t=0}, \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

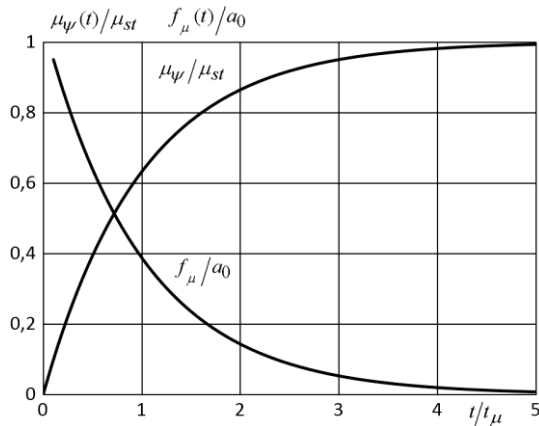


Рис. 4 – Скорость и ускорение ленты конвейера

Для позиций  $S = 0$ ,  $S = S_d$  начальные условия соответствуют граничным

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=0} = \frac{T_4}{EBh} \Big|_{t=0},$$

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=S_d} = \frac{T_1}{EBh} \Big|_{t=0}.$$

**Анализ решения уравнения распространения динамических напряжений.** При построении решения будем предполагать, что характерное время процесса  $t_w$  много меньше времени  $t_0$ , в течение которого происходит значительное уменьшение напряжения (Maxwell element)

$$\varepsilon_w = t_w/t_0 \ll 1, t \in [0, t_w].$$

При невыполнении этого условия конвейерная лента в течение незначительного времени работы получила бы существенное удлинение, которое приводило бы к остановке конвейера. Также будем предполагать, что материал равномерно распределен вдоль транспортного маршрута с плотностью  $[\chi]_{\text{вэф}}$  и скорость конвейерной ленты в начальный момент времени равна нулю. Тогда уравнение распространения динамических напряжений (6) представим в виде

$$\frac{\partial^2 W(t, S)}{\partial t^2} - C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 W(t, S)}{\partial S^2} + \frac{d\mu_\psi(t)}{dt} + C f_c g_m =$$

$$= -\varepsilon_w \left( \frac{1}{t_w} \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} + C f_c g_m \frac{t}{t_w} + \frac{\mu_\psi(t)}{t_w} \right), \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=0} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} \left( g_m + \frac{\partial^2 W(t, 0)}{\partial t^2} \right),$$

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial S} \right|_{S=S_d} = a_w - b_w \mu_\psi(t),$$

и начальными условиями

$$\frac{\partial W(0, S)}{\partial S} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} \left( 1 - \frac{S}{S_d} \right) + a_w \frac{S}{S_d},$$

$$\left. \frac{\partial W(t, S)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

$$\mu_\psi(t) = \frac{a_0}{b_0} \left( 1 - e^{-b_0 t} \right), \mu_\psi(0) = 0.$$

Решение уравнения (10) представим в виде

$$W(t, S) = W_0(t, S) + W_1(t, S) + \dots + W_n(t, S). \quad (11)$$

Подставляя ряд (11) в уравнение (10) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon_w$ , получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 W_0(t, S)}{\partial t^2} - C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 W_0(t, S)}{\partial S^2} = -C f_c g_m - \frac{d\mu_\psi(t)}{dt}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 W_1(t, S)}{\partial t^2} - C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 W_1(t, S)}{\partial S^2} =$$

$$= -\frac{1}{t_w} \frac{\partial W_0(t, S)}{\partial t} - C f_c g_m \frac{t}{t_w} - \frac{\mu_\psi(t)}{t_w};$$

$$\frac{\partial^2 W_k(t, S)}{\partial t^2} - C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 W_k(t, S)}{\partial S^2} = -\frac{\partial W_{k-1}(t, S)}{t_w \partial t}, \quad k = 2..n.$$

Остановимся на решении первого уравнения, которое определяется нулевым приближением по параметру  $\varepsilon_w$ . Будем искать решение в виде

$$W_0(t, S) = V_S(t, S) + V(t, S), \quad (13)$$

$$V_S(t, S) = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} S +$$

$$+ \left( a_w - b_w \mu_\psi(t) - \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} \right) \frac{S^2}{2S_d}.$$

Функция  $V_S(t, S)$  определяет статический прогиб ленты в отсутствии динамических напряжений (невозмущенное состояние конвейерной ленты). Функция  $V(t, S)$  есть отклонение от невозмущенного состояния в результате возникновения динамических напряжений. Введем обозначения

$$A_{m0} = \frac{1}{EBh} \frac{M_{eng0}}{r} \frac{\exp(k_b \alpha)}{(\exp(k_b \alpha) - 1)},$$

$$A_0 = \left( \frac{a}{a_w} \right) \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{\frac{M_{eng0}}{r} \frac{\exp(k_b \alpha)}{(\exp(k_b \alpha) - 1)}}$$

с учетом которых запишем выражение для величины напряжений в невозмущенном состоянии

$$\frac{a}{a_w} \frac{\partial V_s(t, S)}{\partial S} = A_0 \left( 1 - \frac{S}{S_d} \right) + \left( a - b \frac{\mu_{st}}{\mu_0} (1 - e^{-bt}) \right) \frac{S}{S_d}.$$

График функции  $Q(t/t_\mu)$

$$Q(t/t_\mu) = \left( \frac{a}{a_w} \right) \frac{\partial V_s(t, S)}{\partial S} \Big|_{S=S_d} = a - b \frac{\mu_{st}}{\mu_0} (1 - e^{-t/t_\mu}),$$

характеризующий напряжение в точке  $S = S_d$  для значений  $\mu_{st}/\mu_0 = \{0.1; 0.2; 0.3; 0.4\}$  при  $a = 1.6$ ,  $b = 1.0$  (7) представлен на Рис. 5

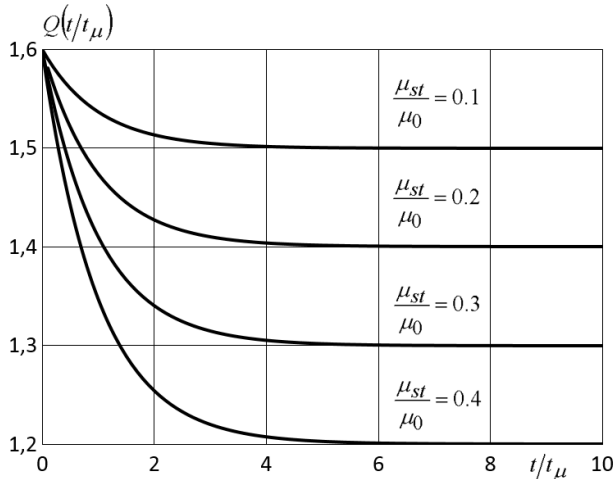


Рис. 5 – Относительные напряжения конвейерной ленты при отсутствии динамических напряжений

Относительное напряжение  $Q(t/t_\mu)$  экспоненциально уменьшается, достигает постоянного значения в соответствии с уравнением (7). Относительные напряжения для невозмущенного состояния соответствуют диапазону изменения скорости движения ленты  $\mu_{eng}/\mu_{eng0} \in [0.0; 0.4]$  и величины тягового момента  $M_{eng}/M_{eng0} \in [1.6; 1.2]$ .

Подставим решение (13) в уравнение для нулевого приближения  $\varepsilon_w$  (12) и принимая во внимание

$$C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 V_s(t, S)}{\partial S^2} = Cf_c g_m + \frac{d\mu_\psi(t)}{dt},$$

$$\frac{\partial V_s(t, S)}{\partial S} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} +$$

$$+ \left( a_w - b_w \mu_\psi(t) - \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w g_m}{EBh} \right) \frac{S}{S_d},$$

$$\frac{\partial^2 V_s(t, S)}{\partial t^2} \approx \left( \frac{S_d / t_\mu}{C_{\psi 0}} \right)^2 \frac{d\mu_\psi}{dt},$$

получаем систему уравнений для функции  $V(t, S)$

$$\frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial t^2} = C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 V(t, S)}{\partial S^2}, \quad (14)$$

с граничными условиями:

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \Big|_{S=0} = \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w}{EBh} \frac{\partial^2 V(t, 0)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \Big|_{S=S_d} = 0,$$

и начальными условиями:

$$\frac{\partial V(0, S)}{\partial S} = 0,$$

$$\frac{\partial V(t, S)}{\partial t} \Big|_{t=0} = b_w a_0 \frac{S^2}{2S_d}.$$

При выводе уравнения (14) принято допущение о равномерном распределении материала вдоль маршрута (как следствие,  $C_{\psi 0}$  постоянная величина) и

$$C_{\psi 0}^2 \frac{\partial^2 V_s(t, S)}{\partial S^2} \gg \frac{\partial^2 V_s(t, S)}{\partial t^2} \approx \left( \frac{S_d / t_\mu}{C_{\psi 0}} \right)^2 \frac{d\mu_\psi}{dt}.$$

Отношение  $S/t_\mu$  для различных действующих конвейеров представлено в табл. 1. Скорость распространения возмущений оценена величиной  $C_{\psi 0} \approx 2000$  m/sec [26]. Отсюда следует

$$\left( S_d / t_\mu / C_{\psi 0} \right)^2 \approx (60 / 2000)^2 \approx 0.001.$$

Таблица 1 – Время режима ускорения конвейерной ленты

Наименование	$S_d$ , m	$t_\mu$ , sec	$\frac{S_d}{t_\mu}$
Conveyor at the Zimbabwe Iron & Steel Co [27]	15600	500	1.2
Conveyor C3, Indo Kodeco System Layout [27]	8600	250	4.4
North Shaft decline conveyor [28]	1350	30	5.0
Experimental conveyor [29]	3620	60	1.0
Conveyor CV002B, El Brocal [30]	2781	80	4.8

В настоящей работе уделим основное внимание исследованию собственных частот колебаний напряжений, возникающих в конвейерной ленте. Для этого найдем решение поставленной задачи, представленное в виде произведения

$$V(t, S) = T(t)X(S).$$

Подставляя  $V(t, S)$  в уравнение (14) и воспользовавшись граничными условиями, получим после разделения переменных для амплитуды стоячих волн:

$$\frac{d^2 X_n(S)}{dS^2} + \lambda_n^2 X_n(S) = 0,$$



$$X_n(S) = \sin(\lambda_n S_d) (\sin(\lambda_n S) + B_n \cos(\lambda_n S)),$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial X_n(S)}{\partial S} \right|_{S=0} = -c_0 \lambda_n^2 X(t, 0),$$

$$c_0 = C_{\psi 0}^2 \frac{k_s}{k_s + 1} \frac{M_w}{EBh},$$

$$\left. \frac{\partial X_n(S)}{\partial S} \right|_{S=S_d} = 0.$$

Из граничных условий находим

$$1 = -c_0 \lambda_n B_n,$$

$$ctg(\lambda_n S_d) = B_n,$$

$$tg(\lambda_n S_d) = -c_0 \lambda_n, \quad (15)$$

откуда

$$X_n(S) = \cos(\lambda_n S - \lambda_n S_d).$$

Условия ортогональности функций  $X_n(S)$  принимают вид

$$\int_0^{S_d} X_n(S) X_m(S) dS + c_0 X_n(0) X_m(0) = 0,$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^{S_d} X_n^2(S) dS + c_0 X_n^2(0).$$

Будем искать решение задачи (14) в виде разложения по оси  $S$

$$V(t, S) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cos(\lambda_n y),$$

$$y = S - S_d,$$

рассматривая при этом время  $t$  как параметр. Значение  $\lambda_n$  находится из решения трансцендентного уравнения. Используя начальные условия

$$\left. \frac{\partial V(t, S)}{\partial S} \right|_{t=0} = -\lambda_n \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \lambda_n \sin(\lambda_n y) = 0,$$

$$\left. \frac{\partial V(t, S)}{\partial t} \right|_{t=0} = b_w a_0 \frac{S^2}{2S_d} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(0)}{dt} \cos(\lambda_n y),$$

определим:

$$T_n(0) = 0,$$

$$\frac{dT_n(0)}{dt} = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_{-S_d}^0 \cos(\lambda_n y) (y + S_d)^2 dy.$$

Для случая, когда вес натяжного груза очень большой по сравнению с перемещаемой массой

$$M_w \gg [\chi]_{0 \leq y \leq S_d},$$

справедливо равенство

$$c_0 \lambda_n \gg 1,$$

которое позволяет условия (15) записать в виде

$$ctg(\lambda_n S_d) \rightarrow 0.$$

Из последнего соотношения следует

$$B_n = 0, \quad \lambda_n = \frac{\pi}{S_d} (n - 1/2), \quad X_n(0) = 0.$$

Полученное граничное условие соответствует случаю жесткого закрепления в точке  $S=0$ . Решение  $X_n(S)$ ,  $V(t, S)$  для рассмотренного случая будет искать в виде

$$X_n(S) = \sin(\lambda_n S),$$

$$V(t, S) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin(\lambda_n S),$$

где начальные условия для  $T_n(t)$  определим из системы уравнений

$$\frac{\partial V(0, S)}{\partial S} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial V(t, S)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dT_n(0)}{dt} \sin(\lambda_n S).$$

Используя разложения в ряд Фурье, получим

$$T_n(0) = 0,$$

$$\frac{dT_n(0)}{dt} = b_w a_0 S_d \left( \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n - \pi/2} - \frac{1}{(\pi n - \pi/2)^2} \right),$$

решение уравнения при заданных начальных условиях примет вид

$$T_n(t) = c_n \sin(\omega_n t),$$

$$\omega_n = C_{\psi 0} \frac{\pi}{S_d} \left( n - \frac{1}{2} \right),$$

$$c_n = \frac{1}{\omega_n} \frac{dT_n(0)}{dt}.$$

Решение, определяющее динамические натяжения конвейерной ленты представим в виде

$$V(t, S) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t) \sin(\lambda_n S).$$

Полное напряжение в конвейерной ленте определяется выражение

$$\frac{\partial W_0(t, S)}{\partial S} = \frac{\partial V_S(t, S)}{\partial S} + \frac{\partial V(t, S)}{\partial S}.$$

Используя обозначения  $A_0, a_w, a$ , рассмотрим распространения динамических напряжений для  $n=1$ :

$$Q_1(\tau, \xi) = \frac{a}{A_0 a_w} \frac{\partial W_0(t, S)}{\partial S} \Big|_{n=1} = \frac{B_0}{A_0} \sin(\omega_w \tau) \cos(\lambda_w \xi) + (1 - \xi) + \left( \frac{a}{A_0} - \frac{b}{A_0} \frac{\mu_{st}}{\mu_0} (1 - \exp(-\tau)) \right) \xi,$$

$$B_0 = 0.64 \frac{S_d b \mu_{st}}{C_{\psi 0} t_\mu \mu_0},$$

$$\xi = \frac{S}{S_d}, \tau = \frac{t}{t_\mu},$$

$$\omega_w = \omega_1 t_\mu \approx 1.57 C_{\psi 0} t_\mu / S_d, \lambda_w = \lambda_1 S_d \approx 1.57.$$

Оценочный расчет показывает, что для режимов ускорения, представленных в табл. 1  $A_0 \gg B_0$  и, следовательно, динамические напряжения в конвейерной ленте будут значительно меньше статического напряжения. Оценка характерного времени ускорения, при котором  $A_0 \approx B_0$ , определяется выражением

$$t_\mu \approx \frac{1}{A_0} \frac{S_d \mu_{st}}{C_{\psi 0} \mu_0}, \omega_w = \omega_1 t_\mu \approx \frac{1.57 \mu_{st}}{A_0 \mu_0}.$$

Для значений

$$S_d \approx 10000, C_{\psi 0} \approx 2000, A_0 \approx 10,$$

$$b \approx A_0, a \approx 2.5 A_0, \mu_{st} / \mu_0 \approx 0.4,$$

получаем

$$t_\mu \approx 0.1, \omega_w = \omega_1 t_\mu \approx \pi, \lambda_w = \pi / 2,$$

и соответственно

$$Q_1(\tau, \xi) \approx 1 + \xi - 0.4(1 - \exp(-\tau))\xi + \sin(\pi \tau) \cos\left(\frac{\pi}{2} \xi\right).$$

При  $S = S_d$  функция  $Q_1(\tau, \xi)$  переходит в функцию  $Q(\tau) / A_0$  (Рис. 5)

$$Q_1(\tau, 1) \approx (2 - 0.4(1 - \exp(\tau)))\xi.$$

Динамика напряжения в конвейерной ленте для случая, определяемого функцией  $Q_1(\tau, \xi)$  представлены на Рис. 6. Семейство кривых характеризуют величину напряжений в конвейерной ленте для различных моментов времени. При  $B_0 / A_0 = 1$  (Рис. 6) величина напряжений вдоль конвейерной ленте не превышает максимального значения напряжения  $Q_1(0, 1)$  в момент старта конвейерной ленты. В последующие интервалы времени происходит спад величины напряжения в конвейерной ленты. Максимальная амплитуда колебаний величины напряжений достигается в

начале конвейерной ленты  $\xi = 0$ , что может приводить к эффектам провисания ленты.

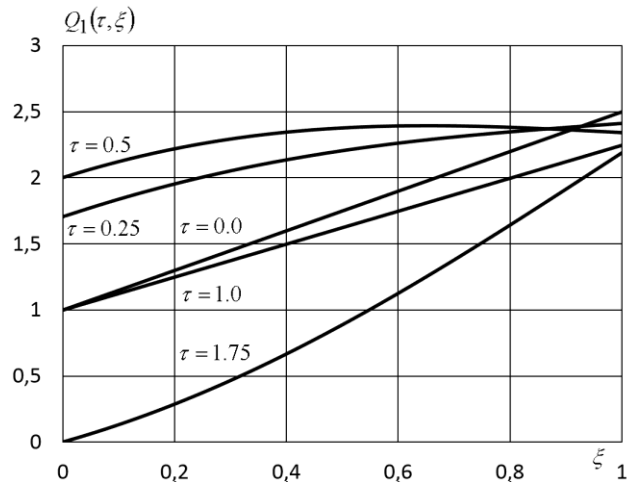


Рис. 6 – Относительные напряжения конвейерной ленты при наличии динамических напряжений  $B_0 = A_0$

Увеличение соотношения  $B_0 / A_0$  приводит к возникновению напряжений с максимальным значением в середине транспортной секции. Наличие напряжений с максимальным значением, превышающим значения напряжения  $Q_1(0, 1)$  в момент времени  $\tau = 0$  для граничной точки конвейерной ленты  $\xi = 1$ , представлено на Рис. 7. Анализ функции  $Q_1(\tau, \xi)$  позволяет сделать вывод о том, что при ускорении ленты наиболее опасным является начальный момент ускорения, определяемый промежутком  $\tau \in [0, 1]$ . Амплитуда продольных колебаний для последующих периодов времени  $\tau \in [1, 2], \tau \in [2, 3] \dots$  уменьшается, что связано с увеличением скорости движения ленты.

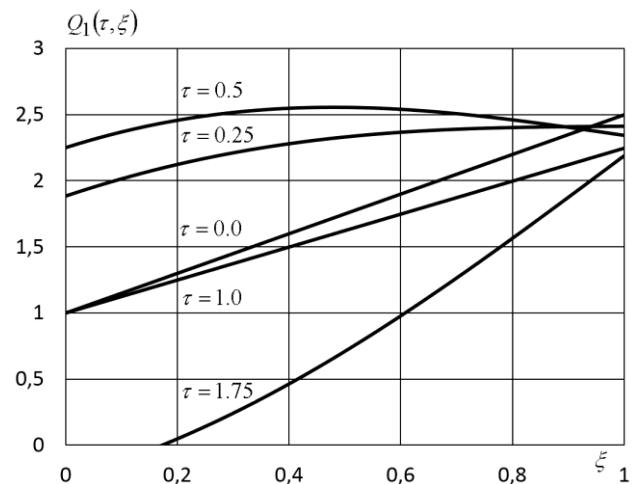


Рис. 7 – Относительные напряжения конвейерной ленты при наличии динамических напряжений  $B_0 = 1.25 A_0$

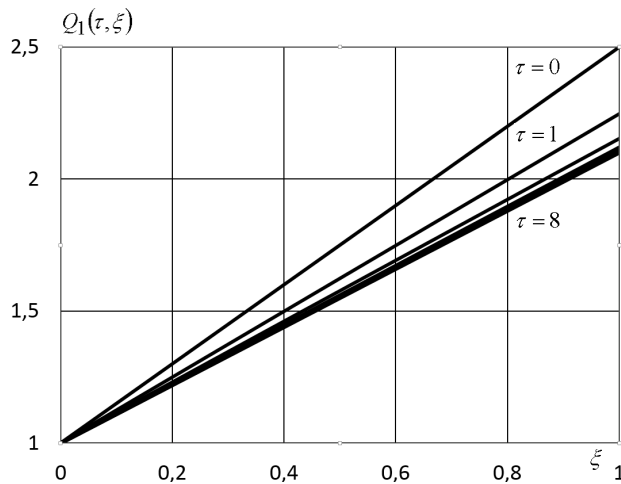


Рис. 8 – Относительные напряжения конвейерной ленты при наличии динамических напряжений  $B_0 = 1.25 A_0$

Оценка снижения величины напряжений при переходе к нормативному значению скорости движения ленты  $\mu_{st}$  может быть получена из анализа семейства зависимостей, представленных на Рис. 8. Для указанных моментов времени динамические напряжения в конвейерной ленте отсутствуют. Напряжения в конвейерной ленте задаются соотношением

$$Q_1(\tau, \xi) \approx 1 + \xi - 0.4(1 - \exp(-\tau))\xi,$$

которое записано с учетом того, что для моментов времени  $\tau = 0, 1, 2, \dots$  динамические напряжения в конвейерной ленте отсутствуют,  $\sin(\pi\tau) = 0$ . Существенное уменьшение величины напряжений происходит в начальный период ускорения конвейерной ленты  $\tau \in [0, 1]$ .

**Висновки.** Проведен анализ причин возникновения динамических напряжений в конвейерной ленте, материал которой соответствует модели Maxwell-element. Определена величина характерного времени процесса, для которого существенно влияние свойств материала. С использованием метода последовательных приближений разработана система уравнений, позволяющая провести анализ возникновения динамических напряжений с учетом специфических свойств материала. Распространения динамических возмущений с учетом особенностей, характерных для модели Maxwell-element, могут быть детально исследованы для установившегося режима функционирования конвейерной ленты. При этом характерное время процесса значительно превышает характерное время ускорения или торможения конвейерной ленты. Это позволяет сделать вывод: при анализе динамических напряжений, возникающих в период времени, определяющем процесс ускорения или торможения конвейерной ленты, эффекты, связанные с поведением материала, свойства которого соответствуют модели Maxwell-element, являются несущественными. Для интервала времени, соответствующему времени ускорения конвейерной

ленты, при анализе причин возникновения динамических возмущений с достаточной степенью точности может быть использована модель упругого элемента (Hookean element). Интервал времени ускорения значительно меньше времени релаксации напряжений для материала, соответствующего модели Maxwell-element.

Другая важная часть исследования связана с влиянием граничных условий на процесс распространения динамических напряжений в конвейерной ленте. Рассмотрен случай распространения динамических возмущений, когда граничные условия заданы в виде зависимости, определяющей связь между тяговым моментом асинхронного двигателя и скоростью движения конвейерной ленты. Для натяжения конвейерной ленты использован механизм с грузом на входе в секцию. Представленный анализ распространения динамических возмущений демонстрирует возможность возникновения предельно допустимых напряжений вдоль секции, которые могут привести к разрушению конвейерной ленты. Величина напряжений непосредственно связана с величиной характерного времени ускорения ленты.

Полученные результаты исследований предоставляют хорошую возможность для изучения релаксационных процессов, возникающих в конвейерной ленте, материал которой соответствует модели Maxwell-element

#### Список літератури

1. Siemens. *SIMINE for conveyors*. Available at: [www.siemens.com/mining](http://www.siemens.com/mining). (accessed 04.09.2022)
2. Alspaugh M. Longer Overland Conveyors with Distributed Power. *Rockwell Automation Fair*, 2005. Available at: [http://www.overlandconveyor.cn/uploadfile/pdf/13-Longer-Overland-Conveyors-with-Distributed-Power\[1\].pdf](http://www.overlandconveyor.cn/uploadfile/pdf/13-Longer-Overland-Conveyors-with-Distributed-Power[1].pdf) (accessed 04.09.2022)
3. Conveyor Dynamics. *Curragh Project*. Available at: <http://conveyordynamics.com/index.php/project/curragh/> (accessed 04.09.2022)
4. Razumnyj Ju., Ruhlov A., Kozar A. Improving the energy efficiency of conveyor transport of coal mines. *Mining Electromechanics and Automation*. no. 76, pp. 24–28.
5. Mathaba T., Xia X. A parametric energy model for energy management of long belt conveyors. *Energies*. 2015, no. 8(12), pp. 13590-13608. Available at: <https://doi.org/10.3390/en81212375> (accessed 04.09.2022)
6. Pihnastyi O. Control of the belt speed at unbalanced loading of the conveyor. *Scientific bulletin of National Mining University*. 2019, no. 6, pp. 122–129. Available at: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-6/18> (accessed 04.09.2022)
7. Antonia J. Energy-saving belt conveyors installed in polish collieries. *Transport Problems*. 2010, no. 5, pp. 5–14. Available at: [http://transportproblems.polsl.pl/Archiwum/2010/zeszyt4/2010z5z4\\_01.pdf](http://transportproblems.polsl.pl/Archiwum/2010/zeszyt4/2010z5z4_01.pdf) (accessed 04.09.2022)
8. Halepoto I., Shaikh M., Chowdhry B. Design and Implementation of Intelligent Energy Efficient Conveyor System Model Based on Variable Speed Drive Control and Physical Modeling. Control and Physical Modeling. *Journal of Control and Automation*. 2016, no. 9(6), pp. 379–388
9. Pihnastyi O., Khodusov V. The optimal control problem for output material flow on conveyor belt with input accumulating bunker. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2019, no. 12(2),

- pp. 67–81. Available at: <http://dx.doi.org/10.14529/mmp190206> (accessed 04.09.2022)
10. Bardzinski P., Walker P., Kawalec W. Simulation of random tagged ore flow through the bunker in a belt conveying system. *International Journal of Simulation Modelling*. 2018, no. 4, pp. 597–608. Available at: [https://doi.org/10.2507/IJSIMM17\(4\)445](https://doi.org/10.2507/IJSIMM17(4)445) (accessed 04.09.2022)
  11. Marais J., Mathews E. Pelzer R. Analysing DSM opportunities on mine conveyor systems. *Industrial and commercial use of energy conference*. Cape Town, South Africa. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.469.574&rep=rep1&type=pdf> (accessed 04.09.2022)
  12. Kiria R & Shyrin, L. Reducing the energy consumption of the conveyor transport system of mining enterprises. *International Conference Essays of Mining Science and Practice*. 2019, no. 109. Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900036> (accessed 04.09.2022)
  13. Marasova D., Andrejiova M., Grincova A. Creation of the project of a logistic system for transportation of minerals - case study. *TEM Journal*. 2017, no. 6(2), pp. 205–213. Available at: <https://doi.org/10.18421/TEM62-03> (accessed 04.09.2022)
  14. Pihnastyi O., Khodusov V. Calculation of the parameters of the composite conveyor line with a constant speed of movement of subjects of labour. *Scientific bulletin of National Mining University*. 2018, no. 4(166), pp. 138–146. Available at: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2018-4/18> (accessed 04.09.2022)
  15. Spivakovskiy A., Dyachkov V. Transporting machines, *Mechanical Engineering, Moscow*, 487 p
  16. Roylance D. Engineering Viscoelasticity. MA 02139. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology. 2001, pp. 37. Available at: <http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/visco.pdf> (accessed 04.09.2022)
  17. Nordell L., Ciozda Z. Transient Belt Stresses During Starting and Stopping: Elastic Response Simulated by Finite Element Methods. *Bulk Solids Handling*. 1984, no. 4(1), pp. 99–104. Available at: <http://www.ckit.co.za/secure/conveyor/papers/troughed/transient/transient-belt-stresses.htm> (accessed 04.09.2022)
  18. Yang G. Dynamics analysis and modeling of rubber belt in large mine belt conveyors. *Sensors & Transducers*. 2014, no. 81(10), pp. 210–218. Available at: [https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/P\\_2492.htm](https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/P_2492.htm) (accessed 04.09.2022)
  19. Lu Yan, Lin Fu-Yan, Wang Yu-Chao. Investigation on influence of speed on rolling resistance of belt conveyor based on viscoelastic properties. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015, no. 45(3), pp. 53–68. Available at: <https://doi.org/10.1515/jtam-2015-0017> (accessed 04.09.2022)
  20. Sakharwade S., Nagpal S. Analysis of transient belt stretch for horizontal and inclined belt conveyor system. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2019, no. 4(5), pp. 1169–1179. Available at: <https://dx.doi.org/10.33889/IJMEMS.2019.4.5-092> (accessed 04.09.2022)
  21. Kulinowski P. Simulation method of designing and selecting tensioning systems for mining belt conveyors. *Archives of Mining Sciences*. 2014, no. 4(59(1)), pp. 123–138. Available at: <https://dx.doi.org/10.2478/amsc-2014-0009> (accessed 04.09.2022)
  22. Rudolphi T., Reicks A. Viscoelastic Indentation and Resistance to Motion of Conveyor Belts using a Generalized Maxwell Model of the Backing Material. *Rubber Chemistry and Technology*. 2006, no. 2, pp. 307–319. Available at: <https://dx.doi.org/10.5254/1.3547939> (accessed 04.09.2022)
  23. Pihnastyi O. Khodusov V. Hydrodynamic model of transport system. *East European Journal of Physics*, 2020, no. 1, pp. 121–136. Available at: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2020-1-11> (accessed 04.09.2022)
  24. Manjgo M., Piric E., Vuherer T., Burzic M. Determination of mechanical properties of composite materials-the rubber conveyor belt with cartridges made of polyester and polyamide. *Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara*. 2018, no. 16(1), pp. 141–144. Available at: <http://annals.fih.upt.ro/pdf-full/2018/ANNALS-2018-1-22.pdf> (accessed 04.09.2022)
  25. DIN 22101:2002-08. Continuous conveyors. Belt conveyors for loose bulk materials. Basics for calculation and dimensioning, *DIN Deutsches Institut für Normung*, 2002, 5 p
  26. Pascual R., Meruane V., Barrientos G. Analysis of transient loads on cable-reinforced conveyor belts with damping consideration, *XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2005, pp. 1–15. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.494.34&rep=rep1&type=pdf> (accessed 04.09.2022)
  27. Cornet J. Head and tail controls in long overland conveyors. *Bulk Materials Handling by Conveyor Belt*, 2002, no. 4, pp. 55–67.
  28. Lodewijks G. Two decades dynamics of belt conveyor systems. *Bulk Solids Handl.* 2002, no. 22 (2), pp. 124–132
  29. Karolewski B., Ligocki P. Modelling of long belt conveyors. *Maintenance and Reliability*. 2014, no. 16(2), pp. 179–187.
  30. Lawson B. Overland Conveyor: Control System Re-design and Implementation. *PeruMin*. 2017, pp. 1–10. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/Overland-Conveyor-%3A-Control-System-Re-design-and-Lawson/a4d3dda013402e1e5b98aa5c4547d886b84a4983> (accessed 04.09.2022)

#### References (transliterated)

1. Siemens. *SIMINE for conveyors*. Available at: [www.siemens.com/mining](http://www.siemens.com/mining). (accessed 04.09.2022)
2. Alsbaugh M. Longer Overland Conveyors with Distributed Power. *Rockwell Automation Fair*, 2005. Available at: <http://www.overlandconveyor.cn/uploadfile/pdf/13-Longer-Overland-Conveyors-with-Distributed-Power11.pdf> (accessed 04.09.2022)
3. Conveyor Dynamics. *Curragh Project*. Available at: <http://conveyordynamics.com/index.php/project/curragh/> (accessed 04.09.2022)
4. Razumnyj Ju., Ruhlov A., Kozar A. Improving the energy efficiency of conveyor transport of coal mines. *Mining Electromechanics and Automation*. no. 76, pp. 24–28.
5. Mathaba T., Xia X. A parametric energy model for energy management of long belt conveyors. *Energies*. 2015, no. 8(12), pp. 13590–13608. Available at: <https://doi.org/10.3390/en81212375> (accessed 04.09.2022)
6. Pihnastyi O. Control of the belt speed at unbalanced loading of the conveyor. *Scientific bulletin of National Mining University*. 2019, no. 6, pp. 122–129. Available at: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-6/18> (accessed 04.09.2022)
7. Antonia J. Energy-saving belt conveyors installed in polish collieries. *Transport Problems*. 2010, no. 5, pp. 5–14. Available at: [http://transportproblems.polsl.pl/pl/Archiwum/2010/zeszyt4/20105z4\\_01.pdf](http://transportproblems.polsl.pl/pl/Archiwum/2010/zeszyt4/20105z4_01.pdf) (accessed 04.09.2022)
8. Halepoto I., Shaikh M., Chowdhry B. Design and Implementation of Intelligent Energy Efficient Conveyor System Model Based on Variable Speed Drive Control and Physical Modeling. Control and Physical Modeling. *Journal of Control and Automation*. 2016, no. 9(6), pp. 379–388
9. Pihnastyi O., Khodusov V. The optimal control problem for output material flow on conveyor belt with input accumulating bunker. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*. 2019, no. 12(2), pp. 67–81. Available at: <http://dx.doi.org/10.14529/mmp190206> (accessed 04.09.2022)
10. Bardzinski P., Walker P., Kawalec W. Simulation of random tagged ore flow through the bunker in a belt conveying system. *International Journal of Simulation Modelling*. 2018, no. 4, pp. 597–608. Available at: [https://doi.org/10.2507/IJSIMM17\(4\)445](https://doi.org/10.2507/IJSIMM17(4)445) (accessed 04.09.2022)
11. Marais J., Mathews E. Pelzer R. Analysing DSM opportunities on mine conveyor systems. *Industrial and commercial use of energy conference*. Cape Town, South Africa. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.469.574&rep=rep1&type=pdf> (accessed 04.09.2022)
12. Kiria R & Shyrin, L. Reducing the energy consumption of the conveyor transport system of mining enterprises. *International Conference Essays of Mining Science and Practice*. 2019, no. 109. Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900036> (accessed 04.09.2022)
13. Marasova D., Andrejiova M., Grincova A. Creation of the project of a logistic system for transportation of minerals - case study. *TEM Journal*. 2017, no. 6(2), pp. 205–213. Available at: <https://doi.org/10.18421/TEM62-03> (accessed 04.09.2022)

14. Pihnastyi O., Khodusov V. Calculation of the parameters of the composite conveyor line with a constant speed of movement of subjects of labour. *Scientific bulletin of National Mining University*. 2018, no. 4(166), pp. 138–146. Available at: <https://doi.org/10.29202/nvngu/2018-4/18> (accessed 04.09.2022)
15. Spivakovsky A., Dyachkov V. Transporting machines, *Mechanical Engineering, Moscow*, 487 p
16. Roylance D. Engineering Viscoelasticity. MA 02139. Cambridge, Massachusetts Institute of Technology. 2001, pp. 37. Available at: <http://web.mit.edu/course/3/3.11/www/modules/visco.pdf> (accessed 04.09.2022)
17. Nordell L., Ciozda Z. Transient Belt Stresses During Starting and Stopping: Elastic Response Simulated by Finite Element Methods. *Bulk Solids Handling*. 1984, no. 4(1), pp. 99–104. Available at: <http://www.ckit.co.za/secure/conveyor/papers/troughed/transient/transient-belt-stresses.htm> (accessed 04.09.2022)
18. Yang G. Dynamics analysis and modeling of rubber belt in large mine belt conveyors. *Sensors & Transducers*. 2014, no. 81(10), pp. 210–218. Available at: [https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/P\\_2492.htm](https://www.sensorsportal.com/HTML/DIGEST/P_2492.htm) (accessed 04.09.2022)
19. Lu Yan, Lin Fu-Yan, Wang Yu-Chao. Investigation on influence of speed on rolling resistance of belt conveyor based on viscoelastic properties. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2015, no. 45(3), pp. 53–68. Available at: <https://doi.org/10.1515/jtam-2015-0017> (accessed 04.09.2022)
20. Sakharwade S., Naggal S. Analysis of transient belt stretch for horizontal and inclined belt conveyor system. *International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences*. 2019, no. 4(5), pp. 1169–1179. Available at: <https://dx.doi.org/10.33889/IJMEMS.2019.4.5-092> (accessed 04.09.2022)
21. Kulinowski P. Simulation method of designing and selecting tensioning systems for mining belt conveyors. *Archives of Mining Sciences*. 2014, no. 4(59(1)), pp. 123–138. Available at: <https://dx.doi.org/10.2478/amsc-2014-0009> (accessed 04.09.2022)
22. Rudolphi T., Reicks A. Viscoelastic Indentation and Resistance to Motion of Conveyor Belts using a Generalized Maxwell Model of the Backing Material. *Rubber Chemistry and Technology*. 2006, no. 2, pp. 307–319. Available at: <https://dx.doi.org/10.5254/1.3547939> (accessed 04.09.2022)
23. Pihnastyi O., Khodusov V. Hydrodynamic model of transport system. *East European Journal of Physics*, 2020, no. 1, pp. 121–136. Available at: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2020-1-11> (accessed 04.09.2022)
24. Manjgo M., Piric E., Vuherer T., Burzic M. Determination of mechanical properties of composite materials-the rubber conveyor belt with cartridges made of polyester and polyamide. *Annals of the Faculty of Engineering Hunedoara*. 2018, no. 16(1), pp. 141–144. Available at: <http://annals.fih.upt.ro/pdf-full/2018/ANNALS-2018-1-22.pdf> (accessed 04.09.2022)
25. DIN 22101:2002-08. Continuous conveyors. Belt conveyors for loose bulk materials. Basics for calculation and dimensioning, *DIN Deutsches Institut für Normung*, 2002, 5 p
26. Pascual R., Meruane V., Barrientos G. Analysis of transient loads on cable-reinforced conveyor belts with damping consideration, *XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, 2005, pp. 1–15. Available at: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.494.34&rep=rep1&type=pdf> (accessed 04.09.2022)
27. Cornet J. Head and tail controls in long overland conveyors. *Bulk Materials Handling by Conveyor Belt*, 2002, no. 4, pp. 55–67.
28. Lodewijks G. Two decades dynamics of belt conveyor systems. *Bulk Solids Handl.* 2002, no. 22 (2), pp. 124–132
29. Karolewski B., Ligocki P. Modelling of long belt conveyors. *Maintenance and Reliability*. 2014, no. 16(2), pp. 179–187.
30. Lawson B. Overland Conveyor: Control System Re-design and Implementation. *PeruMin*. 2017, pp. 1–10. Available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/Overland-Conveyor-%3A-Control-System-Re-design-and-Lawson/a4d3dda013402e1e5b98aa5c4547d886b84a4983> (accessed 04.09.2022)

Надійшла (received) xx.09.2022

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Пігнастий Олег Михайлович (Pihnastyi Oleh Mykhailovych)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», e-mail: [pihnastyi@gmail.com](mailto:pihnastyi@gmail.com), ORCID: 0000-0002-5424-9843

**Соболь Максим Олегович (Sobol Maksym Olehovych)** – кандидат технічних наук, старший преподаватель, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», e-mail: [sobol.mo@gmail.com](mailto:sobol.mo@gmail.com), ORCID: 0000-0002-7853-4390