

*М.С. БОГАТЫРЬ, Г.И. ЛЬВОВ*

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА И КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТА

Плетеные композиционные материалы находят всё возрастающее применение в различных областях современной техники. В отличие от композитов, армированных прямолинейными волокнами, они имеют более высокую прочность при нагружении касательными напряжениями и повышенные характеристики ударной вязкости. Тканые композиты обладают хорошими технологическими свойствами. Заготовки с углеродными или стеклянными тканями хорошо выкладываются на оснастку при изготовлении тонкостенных элементов конструкций сложных форм. Технологические преимущества тканых композиционных материалов обусловили экономическую целесообразность широкого использования их в авиационной промышленности и автомобилестроении. В работе изложена численная методика идентификации упругих и прочностных характеристик плетеного углепластика по результатам микромеханического анализа представительного объема на основе известных свойств матрицы и волокон. Проведены численные эксперименты на одноосное растяжение в направлениях осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Смоделированы сдвиг в трех координатных плоскостях. Определены прочностные характеристики представительского объема композита в условиях растяжения и сжатия в трех направлениях, сдвигов в трех плоскостях и трех биаксиальных растяжениях.

**Ключевые слова:** композитные материалы, упругие свойства, критерий прочности, представительный объем, матрица, волокна.

Плетені композиційні матеріали знаходять все зростаюче застосування у різних галузях сучасної техніки. На відміну від композитів, армованих прямолінійними волокнами, вони мають більш високу міцність при навантаженні дотичними напруженнями та підвищені характеристики ударної в'язкості. Ткані композити мають гарні технологічні властивості. Заготівлі з вуглецевими або скляними тканинами добре викладаються на оснастку при виготовленні тонкостінних елементів складних конструкцій форм. Технологічні переваги тканых композиційних матеріалів зумовили економічну доцільність широкого використання їх у авіаційній промисловості та автомобілебудуванні. У роботі викладено чисельну методику ідентифікації пружних та міцнісних характеристик плетеного вуглепластику за результатами микромеханічного аналізу представницького обсягу на основі відомих властивостей матриці та волокон. Проведено чисельні експерименти на одновісне розтяг у напрямках осей  $x$ ,  $y$  та  $z$ . Змодельовано зсув у трьох координатних площинах. Визначено міцнісні характеристики представницького обсягу композиту в умовах розтягування та стиснення у трьох напрямках, сдвигів у трьох площинах та трьох біаксіальних розтягах.

**Ключові слова:** композитні матеріали, пружні властивості, критерій міцності, представницький об'єм, матриця, волокна.

Woven composite materials are increasingly being used in various fields of modern technology. Unlike composites reinforced with straight fibers, they have a higher shear stress loading strength and improved impact strength characteristics. Woven composites have good technological properties. Blanks with carbon or glass fabrics are well laid out on tooling in the manufacture of thin-walled structural elements of complex shapes. The technological advantages of woven composite materials have determined the economic feasibility of their widespread use in the aviation industry and the automotive industry. The paper presents a numerical method for identifying the elastic and strength characteristics of woven carbon fiber based on the results of a micromechanical analysis of a representative volume based on the known properties of the matrix and fibers. Numerical experiments on uniaxial tension in the  $x$ ,  $y$ , and  $z$  axes directions have been carried out. Modeled shift in three coordinate planes. The strength characteristics of the representative volume of the composite under conditions of tension and compression in three directions, shifts in three planes, and three biaxial tensions are determined.

**Key words:** composite materials, elastic properties, strength criterion, representative volume, matrix, fibers.

**Вступ.** Композитні матеріали, які складаються з двох або більше складових матеріалів, зазвичай використовуються в передових галузях промисловості, наприклад, у аерокосмічній та автомобільній. Це пояснюється відповідними механічними властивостями, такими як висока питома міцність і жорсткість, низька щільність і висока стійкість до корозії. Однак обмежене розуміння поведінки композитного матеріалу вимагає додаткових досліджень. Це також ускладнюється тим, що поведінка цих матеріалів залежить від укладання, напрямку навантаження, розміру зразка та впливу навколишнього середовища, наприклад температури та вологості.

Один з найпопулярніших чисельних методів для проведення аналізу напружено-деформованого стану композитів у наш час є скінчено-елементний. Він до-

зволяє використовувати детальну геометричну модель конструкції, а також задати фізичні властивості всіх матеріалів, з яких виготовлені елементи конструкції.

**Літературний огляд.** Методи визначення макроскопічних статичних характеристик композитного матеріалу базуються на вирішенні задач визначення напружено-деформаційного стану (НДС) у мікроскопічних елементах структури, одержання наведених властивостей матеріалу та проведення досліджень на макроскопічному рівні.

Існує два способи визначення ефективних пружних характеристик композиційних матеріалів. Перший із них представляє із себе фізичні випробовування зразків композитів. Другий включає у себе застосування методів структурного аналізу. Макроскопічні фізичні

та механічні параметри композиційних матеріалів визначаються за допомогою використання аналогічних величин складових цього композиту, видів та умов їх з'єднання та інших мікроскопічних характеристик.

Другий спосіб є більш ефективним та економічним. Окрім точного визначення макроскопічних характеристик, він дозволяє прогнозувати міцнісні та інші характеристики під впливом різних видів експлуатації. Більш того такий спосіб дослідження композитів дає можливість створювати нові матеріали з використанням різних умов з'єднання їх складових таких, що у свою чергу може покращити характеристики різних конструкцій. Саме тому розробка нових теоретичних методів визначення НДС композиційних матеріалів є досить актуальною та сучасною темою для дослідження.

На сьогоднішній день запропонована велика кількість структурних моделей для композиційних матеріалів різних типів. Найбільш численний клас моделей для розроблено для регулярно армованих композитів. Класичним типом є метод осереднення. Його суть полягає у перетворенні коефіцієнтів диференціальних рівнянь у часткових похідних із змінних величин у константи. У задачах теорії пружності метод осереднення представляє із себе приведення задачі про неоднорідне тіло до її постановки для еквівалентного гомогенного матеріалу.

Як зазначено у [1] першими відомими моделями, які були запропоновані та використані для оцінки властивостей композитів, є моделі Voigt [2] та Reuss [3]. Модель Фойгта також відома як модель правила суміші, в той час як модель Рейсса також відома як модель, обернена до суміші, або модель ізонпруження. У методі Ваніна [4] використовуються комплексні функції для визначення ефективних пружних коефіцієнтів односпрямованих пластин.

Напівемпіричні моделі виникли для виправлення правила моделі суміші, де вводяться коригувальні коефіцієнти. Під цією категорією відмічено три важливі моделі: модифіковане правило суміші, модель Халпіна – Цай [5] і модель Шаміса [6]. Модель Халпіна – Цай виникла як напівемпірична модель, яка має тенденцію коригувати поперечний модуль Юнга та модуль позовжнього зсуву. Мікромеханічна модель Шаміса є найбільш використовуваною та надійною моделлю, яка дає формулювання для всіх п'яти незалежних пружних властивостей. Хашин і Розен [7] запропонували модель збірки композитного циліндра для оцінки еластичні властивості поперечно-шарових ламінатних композитів. Алфоотов [8] визначив механічні властивості поперечно-ламінатних армованих композитів з перпендикулярними волокнами. Крістенсен [9] запропонував узагальнену самоузгоджену модель, щоб краще оцінити модуль поперечного зсуву. Модель Морі – Танаки [10] часто застосовують для моделювання різних видів композиційних матеріалів. Волокна моделюються включеннями, вбудованими в однорідне середовище. Самоузгоджену модель запропонували Хілл [11] та Будянський [12] для прогнозування пружних властивостей композиційних матеріалів, армованими ізотропними сферичними частинками. Пізніше модель була представлена та використана для прогнозування пружних властивостей композитів з короткими волокнами [13]. Huang [14] запропонував нову мікромеханічну модель. Модель розроблена для прогнозування жорсткості та міц-

ності поперечно-шарових ламінатних композитів. Враховуючи структуру кубічної симетрії та використовуючи програмне забезпечення ANSYS, В роботі досліджено ефективні характеристики таких композитів. Для визначення ефективних пружних властивостей ортогонального нетканого композиту, армованого волокнами, проведено численні дослідження деяких напружених станів у типовій елементарній комірці. Застосування чисельних методів для вирішення різних задач механіки композитів досить поширене. Сьогодні можна знайти велику кількість результатів чисельних досліджень та різні стратегії для виконання чисельного аналізу різних моделей плетених композитів [15-19].

Найчастіше серед усіх чисельних методів використовують метод скінчених елементів. МСЕ – найбільш популярний у сучасних дослідженнях механіки суцільного середовища. За його допомогою можна побудувати модель конструкції довільної форми та структури. У основі методу скінчених елементів лежить поелементна апроксимація конструкції. Однією з основних переваг скінчено-елементних моделей є можливість отримання точного та детального поля напруження-деформації на складовому рівні для будь-якого переплетення. Ця інформація, у свою чергу, може бути використана при розробці та оптимізації матеріалів, а також у пошуку альтернативних/доповнюючих стратегій моделювання.

У роботі [20] наведено дослідження пружних властивостей композитів на основі математичної моделі, побудованої за допомогою методу скінчених елементів. Використовується представницький об'єм композиційного матеріалу. У цій моделі враховано стохастичне розташування волокон у матриці композиту. Було визначено фізичні характеристики композитного матеріалу та визначено розміри представлених елементів його об'єму. В результаті отримано залежності величин ефективних пружних постійних від геометричного розміру і пружних властивостей елементів композиту. Розглянутий тип КМ має властивість моноклінної симетрії із скінченим числом реалізацій випадкового розташування армуючих волокон.

У ще одній роботі цих самих авторів [21] проведено дослідження того, як дефекти розділу, які часто виникають між волокнами та матрицею, впливають на ефективну теплопровідність волокнистих композитів. Гомогенізація цього композиту математично сформульована та чисельно реалізована за допомогою методу скінчених елементів.

У роботі [22] теоретично досліджено механічні властивості тканих текстильних композитів з полімерною матрицею, посиленою карбоновими нанотрубками, та порівняно результати з експериментальними випробуваннями. Підхід Морі-Танаки був розглянутий для оцінки та тестування механічних властивостей епоксидної смоли, армованої карбоновими нанотрубками, а також три різні методи гомогенізації: Шаміса, Хана і Халпіна-Цая для композиту, виготовленого з вуглецевих тканин і збагаченої смоли. Порівняння показало добру узгодженість між теоретичними підходами та експериментальними результатами. Такі нові конфігурації можуть бути використані для подальшого чисельного моделювання з використанням методу скінчених елементів, щоб розробити

автомобільні конструктивні компоненти.

У роботі [23] проведено порівняння результатів пружних характеристик однонаправленого композиту, отриманих за допомогою МСЕ, та аналітичною напівемпіричною моделлю Халпіна-Цая.

У роботі [24] ефективні пружні властивості полістиролового композиту, армованого сизалем, були експериментально оцінені та підтверджені аналітично та чисельно з використанням підходу чисельної гомогенізації. Отриманий експериментальний результат порівнювався з феноменологічними моделями (правило сумішей і Халпіна-Цая). У результаті було виявлено, що на ефективні властивості пружності, такі як поздовжній модуль, поперечний модуль і коефіцієнт Пуассона в площині армованих сизалем полістирольних композитів впливають такі параметри, як навантаження на волокно, площа поперечного перерізу та вид представницького об'єму композиту.

У роботі [25] розглядається мікромеханічне моделювання пружно-пластичних композитів, армованих частинками, під дією загальних немонотонних історій навантаження. Використовується математична модель Морі-Танака для гомогенізації композита, вона застосована до кількох композиційних систем з пружно-пластичною матрицею та сферичними або еліпсоїдними вclusions, підданих різним навантаженням (розтягнення, плоска деформація, циклічний розтяг/стискання).

Ще одна робота [26] використовує гібридну модель Морі-Танака для моделювання композиційних матеріалів, армованих вclusions довільної форми та випадкової орієнтації. У статті розглядаються чисельні процедури, пов'язані з гібридною гомогенізацією як для лінійних, так і для нелінійних композитів. Гомогенізація в нелінійному режимі здійснюється шляхом поєднання моделі Морі-Танакі з скінченно-елементним методом розв'язку еквівалентної задачі включення за допомогою ітераційної процедури. Проаналізовано композити, що містять пружно-пластичну матрицю, армовану лінійно-пружними сферичними та кубічними вclusions. Результати, отримані за допомогою методу гібридної гомогенізації, порівнюються з чистим числовим рішенням, отриманим шляхом гомогенізації МСЕ на основі представницького об'єму композиту, що містить значну кількість включень. Результати, отримані за допомогою гібридної та чисельної гомогенізації, добре корелюють між собою.

У роботі [27] представлено нову методику прогнозування ефективних модулів пружності текстильних композитів за допомогою комбінованого підходу методів гомогенізації та скінчених елементів. Метод гомогенізації вперше застосовується для дослідження мезомікроскопічної поведінки матеріалу одноволокнистої пряжі на основі властивостей складових композитів. Потім за допомогою тривимірного скінченно-елементного аналізу чисельно отримано ефективний нелінійний тензор механічної жорсткості як функції елементних деформацій. Процедура наведена на прикладі скляного композиту гладкого переплетення та підтверджена шляхом порівняння з експерименталь-

ними даними.

У роботі [28] показано, що розв'язавши проблему осередку періодичності для армованого волокном композиту, можна отримати гомогенізований (також званий ефективним, загальним, макроскопічним) критерій міцності композиту (тобто критерій міцності складових елементів композиту в термінах гомогенізованих напружень або деформацій). Метод побудови гомогенізованого критерію міцності адаптовано для випадку, коли задачу аналізу комірки періодичності розв'язують чисельно. Для композиту, армованого ортогональними системами волокон, гомогенізований критерій міцності можна отримати в явному вигляді. Це можливо тому, що максимальні локальні напруження в композитах, армованих ортогональними системами волокон, виникають у певних ділянках і мають особливі форми. Наведено приклад для випадку, коли для волокон і матриці використовується критерій міцності Мізеса. Хоча критерій гомогенізованої міцності записується в явному вигляді, для обчислення констант у ньому все одно необхідні чисельні обчислення.

У роботі [29] використовується метод гомогенізації середнього поля. Це клас універсальних і точних методів, які використовуються для аналізу різних типів композитів, від односпрямованих чи текстильних композитів до композитів, армованих короткими волокнами, чи посиленних нанотрубками. У статті було представлено поглиблений огляд трьох кроків для композитів із різноманітною архітектурою армування, включаючи безперервні прямі, розривні короткі, розривні вигнуті або хвилясті (включаючи нанотрубки), текстильні та волокна.

Більшість композитних матеріалів, що застосовуються в реальних конструкціях, мають складну геометричну структуру. Це ускладнює створення аналітичних виразів і часто не дозволяє зводити поставлене завдання одного з класичних видів з фіксованим типом композиту, для якого є відоме аналітичне рішення. І само тому ефективно використовують чисельні методи. Найкраще себе показали у дослідженні НДС композитів – метод граничних елементів (МГЕ), метод скінчених різниць (МСП) і метод скінчених елементів (МСЕ).

Дослідження міцності композитів проводиться на основі двох підходів: класичного та структурного.

У класичному феноменологічному підході композит розглядається у вигляді макрооднорідного та анізотропного матеріалу. Цей напрямок представлений великою кількістю робіт [30-37] в яких запропоновані різні математичні моделі для оцінки міцності композитного матеріалу.

**Постановка задачі.** Для дослідження ефективних механічних властивостей композиту було розглянуто тривимірну модель представницького об'єму армованого композиту. Для проведення мікромеханічного аналізу необхідно:

- Розробити методику чисельного визначення ефективних пружних постійних армованих композиційних матеріалів;

- Провести чисельні моделювання напруженого стану представницького об'єму для необхідних базових експериментів.

- Визначити параметри, що входять до критерію міцності композиційного матеріалу на основі відомих границь міцності волокна та матриці.

**Ефективні пружні постійні композиційного матеріалу.** Для проведення розрахунків елементів конструкцій з композитних матеріалів композити розглядаються як гомогенні анізотропні матеріали з усередненими пружними характеристиками. Фізичні залежності анізотропного матеріалу в загальному випадку анізотропії мають вигляд:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = A_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (1)$$

де  $A_{ijkl}$  – пружні постійні еквівалентного гомогенного матеріалу;

$\langle \sigma_{ij} \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  – середні значення напружень та деформацій.

У більшості випадків структура композитного має певну симетрію. У багатьох випадках усереднення пружних властивостей композиту дозволяє розглядати його як ортотропний матеріал.

Якщо координатні площини прийнятої системи координат паралельні площинам симетрії пружних властивостей ортотропного матеріалу, то закон Гука зручно зобразити у матричній формі [38]:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Для прикладних розрахунків використовуються технічні пружні сталі

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{33} &= \frac{1}{E_z}; \\ a_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}; \\ a_{13} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_z} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}; \\ a_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_z} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y}; \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}; & a_{55} &= \frac{1}{G_{yz}}; & a_{66} &= \frac{1}{G_{zx}} \end{aligned} \quad (3)$$

Закон Гука у зворотній формі записується у вигляді лінійної залежності напружень від деформацій таким чином:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = B_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (4)$$

де  $B_{ijkl}$  – компоненти матриці жорсткості,  $[B]$  – обернена матриця пружних постійних,  $[B] = [A]^{-1}$ .

У разі ортотропного матеріалу закон Гука у зворотній формі має вигляд [38]:

$$\begin{bmatrix} \langle \sigma_x \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle \\ \langle \tau_{xy} \rangle \\ \langle \tau_{yz} \rangle \\ \langle \tau_{zx} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \langle \varepsilon_x \rangle \\ \langle \varepsilon_y \rangle \\ \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \gamma_{xy} \rangle \\ \langle \gamma_{yz} \rangle \\ \langle \gamma_{zx} \rangle \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Ортотропний композит характеризується дев'ятьма незалежними пружними постійними (технічні характеристики пружності – модуль Юнга, зсуву та коефіцієнти Пуассону у відповідних головних напрямках та площинах)  $E_x, E_y, E_z, G_{xy}, G_{yz}, G_{zx}, \nu_{xy}, \nu_{yx}, \nu_{yz}$  [39]

**Визначення пружних властивостей армованих композитів.** Розглянуто армований композиційний матеріал, представницький об'єм якого зображений на рис.1

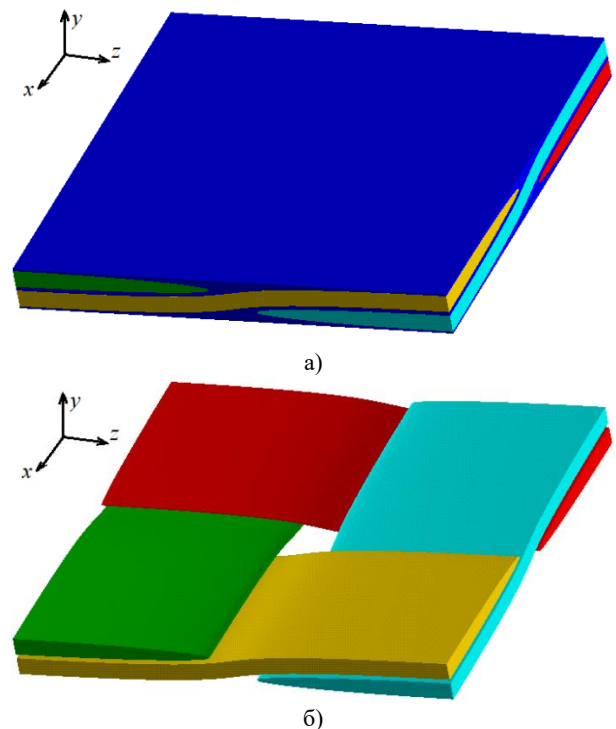


Рисунок 1 – Модель представницького об'єму армованого композиту: а) – представницький об'єм; б) – структура армування волокнами

Дане переплетення волокон відповідає [40] полотняному переплетенню ниток у тканинах.

Об'єм композиційного матеріалу може бути представлений як гомогенний ортотропний матеріал. Напружений стан цього матеріалу можна охарактеризувати наступним чином [41]:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (6)$$

де  $V$  – об'єм гомогенного матеріалу.

Аналогічним чином визначається деформований стан [41]:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (7)$$

Закон Гука у прямокутній декартовій системі координат визначається наступним чином у разі, якщо ця система збігається з площинами симетрії гомогенного ортотропного матеріалу [42]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_x \rangle &= b_{11} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{13} \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \sigma_y \rangle &= b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{22} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{23} \langle \varepsilon_z \rangle \\ \langle \sigma_z \rangle &= b_{31} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{32} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{33} \langle \varepsilon_z \rangle \end{aligned} \quad (8)$$

$$\langle \tau_{xy} \rangle = b_{44} \langle \gamma_{xy} \rangle; \quad \langle \tau_{yz} \rangle = b_{55} \langle \gamma_{yz} \rangle; \quad \langle \tau_{zx} \rangle = b_{66} \langle \gamma_{zx} \rangle$$

де  $b_{ij}$  – пружні постійні еквівалентного гомогенного матеріалу.

Матриця пружних постійних є симетричною:  $b_{ij} = b_{ji}$ . Якщо армування однаково у напрямках  $x$  і  $z$ , то пружні властивості у цих напрямках однакові. Через це у законі Гука мають місце рівності:

$$b_{11} = b_{33}; \quad b_{12} = b_{23}; \quad b_{44} = b_{66} \quad (9)$$

Для чисельного дослідження використовується мінімальний представницький об'єм (рис. 1), який у всьому об'ємі композиційного матеріалу періодично повторюється за трьома напрямками.

Для чисельного аналізу за допомогою скінченно-елементного методу використовується ПК ANSYS; геометрична модель представницького об'єму була розбита на елементи SOLID186 з 20-ма вузлами та трьома ступенями свободи в кожному вузлі. Скінченно-елементна модель має 82542 елементів та 265833 вузлів (рис. 2). Геометричні розміри моделі: вздовж осей

$x$  та  $z$ , відповідно,  $a = c = 4 \cdot 10^{-3}$  м, вздовж осі  $y$  –  $b = 0.4 \cdot 10^{-3}$  м. Початок системи координат знаходиться у точці  $x = 4 \cdot 10^{-3}$ ,  $y = 0.4 \cdot 10^{-3}$ ,  $z = 4 \cdot 10^{-3}$ .

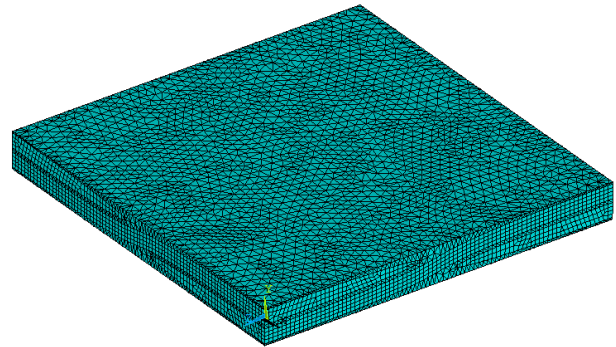


Рисунок 2 – Скінчено-елементна модель

При заданні механічних властивостей матеріалів вважається, що осі вздовж волокон збігаються з осями координат  $x$  і  $z$ . Було створено 3 матеріали, які відповідали волокнам уздовж осі  $x$  (матеріал 1); волокнам уздовж осі  $z$  (матеріал 2) та матриці (матеріал 3). Матеріал волокон – вуглець, матеріал матриці – епоксидна смола.

Характеристики для матеріалу 1 задавалися, як для ортотропного, армування у напрямку осі  $x$ . Відповідно; характеристики для матеріалу 2 (табл. 1) визначаються аналогічно але враховується, що вісь волокон для 2-го матеріалу спрямована вздовж осі  $z$ .

Таблиця 1 – Пружні характеристики волокон

№ мат-лу	$E_x$ , ГПа	$E_y$ , ГПа	$E_z$ , ГПа	$G_{xy}$ , ГПа	$G_{yz}$ , ГПа	$G_{xz}$ , ГПа	$\nu_{xy}$	$\nu_{yz}$	$\nu_{xz}$
1	160	9.82	9.82	4.68	3.8	4.68	0.02	0.29	0.02
2	9.82	9.82	160	3.8	4.68	4.68	0.29	0.02	0.02

Матеріал 3 є ізотропним та відповідає матриці (табл. 2)

Таблиця 2 – Пружні характеристики матриці

№ матеріалу	$E$ , ГПа	$\nu$
3	4.2	0.4

Для знаходження еквівалентних пружних постійних  $b_{ij}$  виконується аналіз НДС представницького об'єму композиту (рис. 1). Численними експериментами моделюються чотири виду деформування: одновісне розтягнення у напрямках  $x$ ,  $y$  та  $z$  зсув у площинах  $xy$ ,  $xz$ .

Граничні умови для аналізу НДС представницького об'єму, що відповідають цьому виду деформування композиту і надалі для всіх експериментів – умови симетрії щодо граничних площин.

**Перший чисельний експеримент** моделює одновісне розтягнення представницького об'єму у бік орієнтації волокон, осі  $x$ .

Величина деформації визначається  $\langle \varepsilon_x \rangle = \varepsilon = 10^{-3}$ .

Така деформація забезпечується переміщеннями  $u_x \Big|_{x=a} = \varepsilon \cdot a$ .

Середні значення компонентів тензора деформації мають значення:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x \rangle &= 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \\ \langle \gamma_{xy} \rangle &= 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{zx} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничні умови симетрії визначаються для перших трьох експериментів наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x = 0: \\ u_x = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y = 0: \\ u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ \text{на площині } z = 0: \\ u_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

На інших граничних поверхнях для першого експерименту переміщення задаються:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x = a: \\ u_x = \varepsilon \cdot a; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y = b: \\ u_y = 0; \quad \tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \\ \text{на площині } z = c: \\ u_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

У всіх шести експериментах при розрахунках у ANSYS задаються лише переміщення, а рівність нулю напружень виконуються автоматично за замовчуванням у цьому програмному комплексі.

Після завершення аналізу НДС у постпроцесорі визначено середні значення напружень  $\langle \sigma_x \rangle$ ,  $\langle \sigma_y \rangle$ ,  $\langle \sigma_z \rangle$ .

Результати першого чисельного експерименту дозволяють знайти на основі співвідношень (8) наступні пружні характеристики еквівалентного матеріалу:

$$b_{11} = \langle \sigma_x \rangle / \langle \varepsilon_x \rangle; b_{12} = \langle \sigma_y \rangle / \langle \varepsilon_x \rangle; b_{13} = \langle \sigma_z \rangle / \langle \varepsilon_x \rangle. \quad (13)$$

На рис. 3-8 представлені результати напружень та переміщень для першого чисельного експерименту.

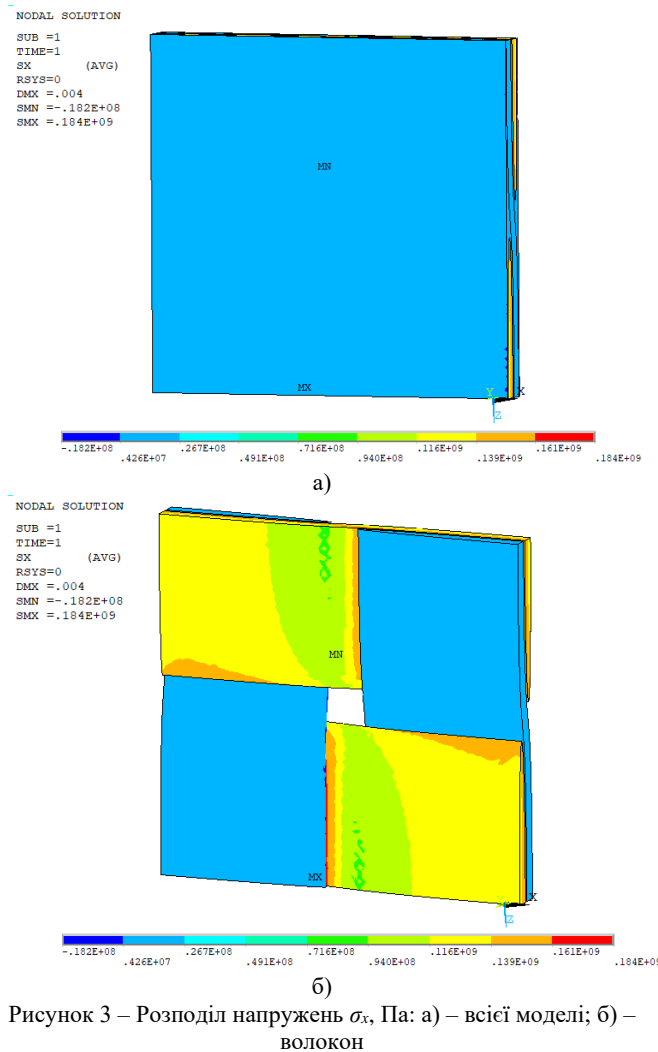


Рисунок 3 – Розподіл напружень  $\sigma_x$ , Па: а) – всієї моделі; б) – волокон

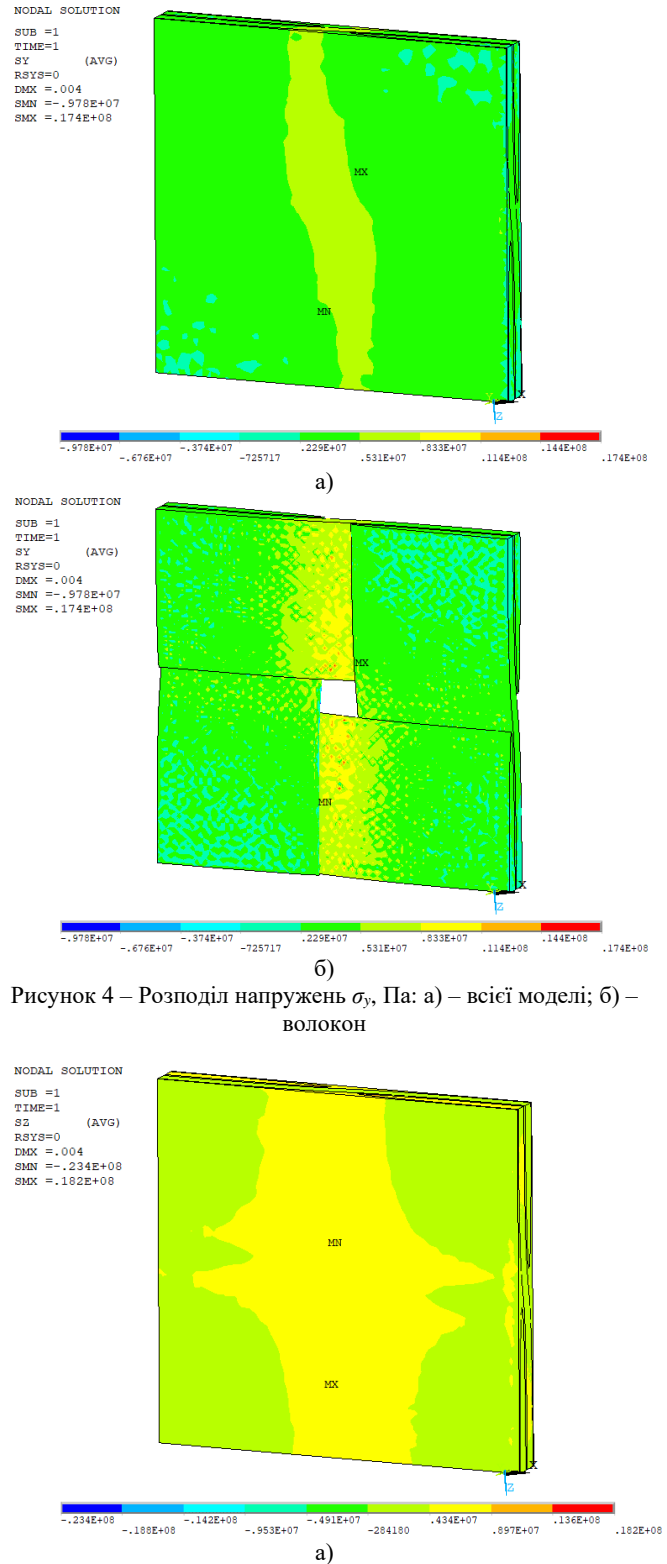


Рисунок 4 – Розподіл напружень  $\sigma_y$ , Па: а) – всієї моделі; б) – волокон

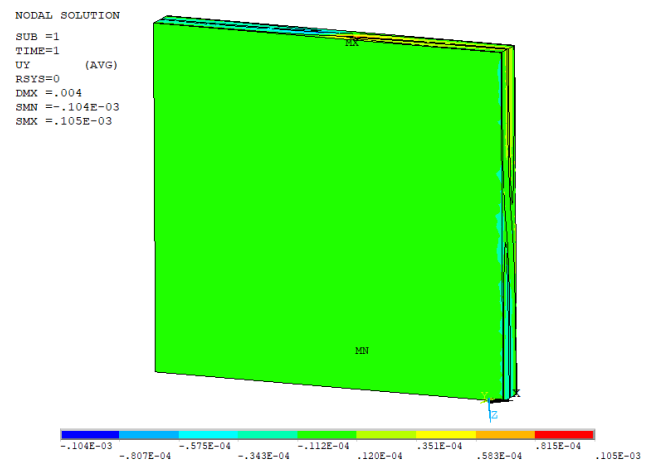
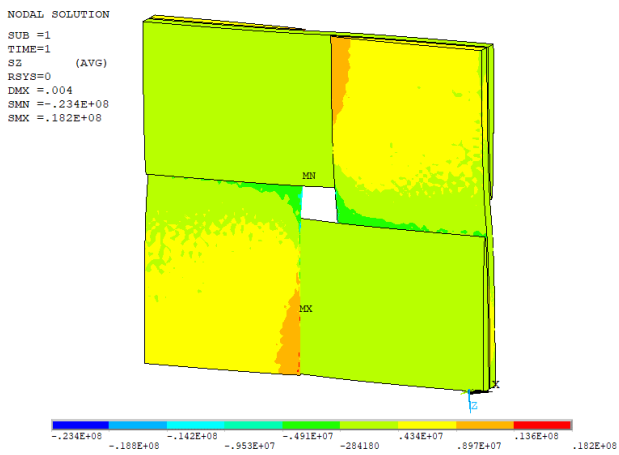


Рисунок 5 – Розподіл напружень  $\sigma_z$ , Па: а) – всієї моделі; б) – волокон

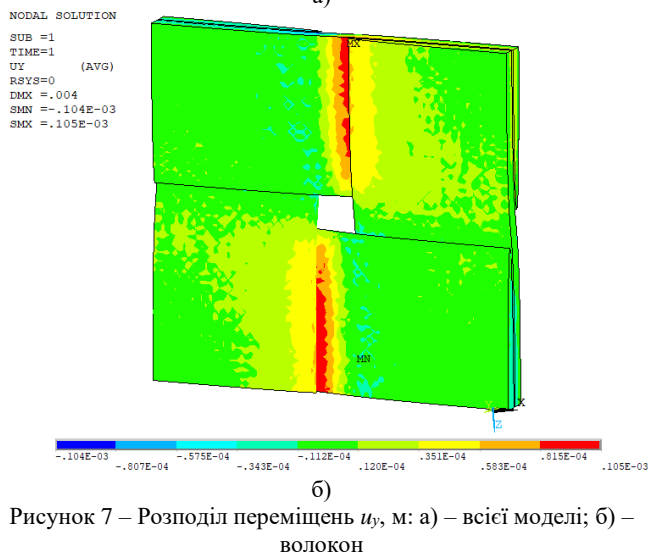
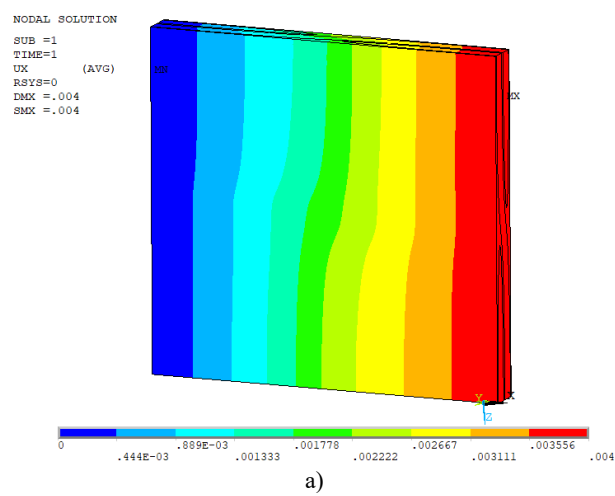


Рисунок 7 – Розподіл переміщень  $u_y$ , м: а) – всієї моделі; б) – волокон

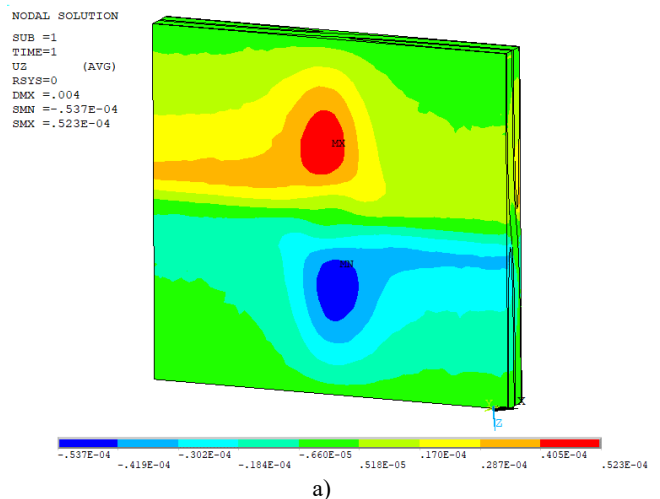
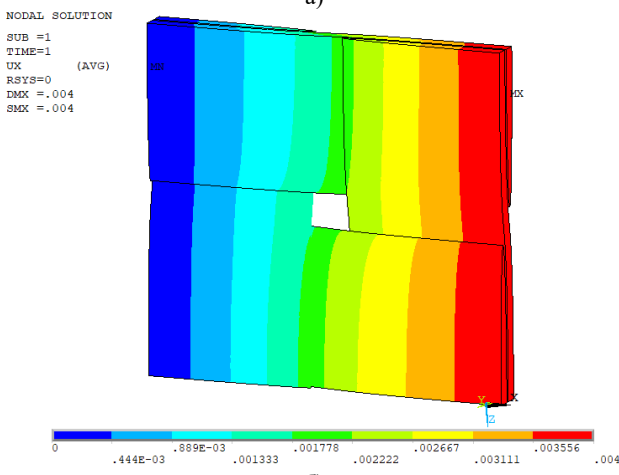


Рисунок 6 – Розподіл переміщень  $u_x$ , м: а) – всієї моделі; б) – волокон

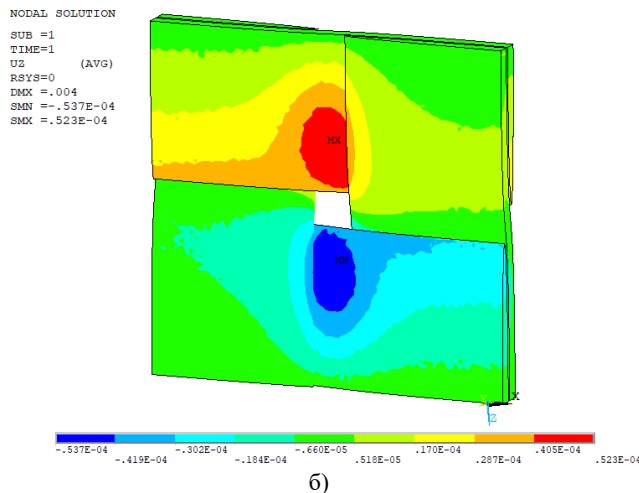


Рисунок 8 – Розподіл переміщень  $u_z$ , м: а) – всієї моделі; б) – волокон

**Другий чисельний експеримент** моделює одно-вісне деформування у іншому напрямку волокон – осі  $z$ .

**Третій чисельний експеримент** моделює одно-вісне розтягнення у напрямі, перпендикулярному площині орієнтації волокон, осі  $y$ .

**Четвертий чисельний експеримент** моделює поперечний зсув матеріалу у площині  $xy$ .

**П'ятий чисельний експеримент** моделює поперечний зсув матеріалу у площині  $yz$ .

**Шостий чисельний експеримент** моделює поперечний зсув матеріалу у площині  $xz$ .

В результаті 6-х розрахунків моделі з умовами симетрії отримані пружні постійні  $b_{ij}$  еквівалентного гомогенного матеріалу, наведені в таблиці 3. У таблиці 4 представлена матриця коефіцієнтів податливості  $a_{ij}$ , обернена матриці коефіцієнтів жорсткості  $b_{ij}$ :  $[A] = [B]^{-1}$ .

Таблиця 3 – Матриця коефіцієнтів  $b_{ij}$

4.5919e10	0.3811e10	0.3836e10
0.3811e10	0.9478e10	0.3811e10
0.3836e10	0.3811e10	4.5919e10

Таблиця 4 – Матриця коефіцієнтів  $a_{ij}$

0.0226e-9	-0.0086e-9	-0.0012e-9
-0.0086e-9	1.1243e-9	-0.0086e-9
-0.0012e-9	-0.0086e-9	0.0226e-9

Використовуючи співвідношення (3) отримуємо значення технічних пружних характеристик еквівалентного гомогенного матеріалу. Ці постійні матеріали наведені у табл. 5, 6.

Таблиця 5 – Модулі пружності гомогенного матеріалу

$E_x$ , Па	$E_y$ , Па	$E_z$ , Па	$G_{xy}$ , Па	$G_{yz}$ , Па	$G_{xz}$ , Па
$4.4267 \cdot 10^{10}$	$8.8942 \cdot 10^9$	$4.4267 \cdot 10^{10}$	$2.4223 \cdot 10^9$	$2.4223 \cdot 10^9$	$3.1664 \cdot 10^9$

Таблиця 6 – Коефіцієнти Пуассона гомогенного матеріалу

$\nu_{xy}$	$\nu_{yx}$	$\nu_{yz}$	$\nu_{zy}$	$\nu_{xz}$	$\nu_{zx}$
0.3813	0.0766	0.0766	0.3813	0.0519	0.0519

Для того, щоб оцінити міцність композиційного матеріалу необхідно визначити характеристики міцності композиту на основі експериментальних випробувань на міцність конкретного ортотропного матеріалу. У випадку для ортотропного композиту необхідно провести 12 фізичних експериментів. При чисельному моделюванні необхідно провести аналіз напруженого стану представницького об'єму в умовах розтягування (стиснення) у трьох напрямках, зсувах у трьох площинах та трьох біаксіальних навантажень. У разі, якщо структура має однакові властивості у двох напрямках ( $x$  та  $z$ ), кількість незалежних констант (та експериментів) скорочується до восьми.

Відмінність у границях міцності при розтягуванні та стисканні визначається при обробці результатів чисельних експериментів. Це дозволяє визначити всі константи в критерії міцності на основі таких досліджень напруженого стану представницького об'єму:

1 – одновісне розтягнення (стиснення) вздовж осі  $x$  (рис. 2), середнє напруження при цьому  $\langle \sigma_x \rangle = 1 \text{ МПа} = \sigma$ ;

2 – одновісне розтягнення (стиснення) вздовж осі  $y$ ,  $\langle \sigma_y \rangle = \sigma$ ;

3 – двохосьове розтягнення вздовж осей  $x$  та  $z$ ,  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \sigma$ ;

4 – двохосьове розтягнення вздовж осей  $y$  та  $z$ ,  $\langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \sigma$ ;

5 – зсув у площині  $xy$ :  $\langle \gamma_{xy} \rangle = \varepsilon = 10^{-3}$

6 – зсув у площині  $xz$ :  $\langle \gamma_{xz} \rangle = \varepsilon$ .

**Перший чисельний експеримент** за міцністю моделює одноосьовий напружений стан – розтяг уздовж осі  $x$  під дією  $\langle \sigma_x \rangle = \sigma$ . Таке навантаження буде відповідати наступним деформаціям (2):

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{11}; \langle \varepsilon_y \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{21}; \langle \varepsilon_z \rangle = \langle \sigma_x \rangle \cdot a_{31} \quad (14)$$

де  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) беруться із табл. 4.

Далі обчислюються переміщення, що відповідають цим деформаціям, на граничних площинах моделі:

$$\begin{aligned} \delta_x \Big|_{x=a} &= \langle \varepsilon_x \rangle \cdot a = \delta_x; \\ \delta_y \Big|_{y=b} &= \langle \varepsilon_y \rangle \cdot b = \delta_y; \\ \delta_z \Big|_{z=c} &= \langle \varepsilon_z \rangle \cdot c = \delta_z. \end{aligned} \quad (15)$$

Граничні умови для 1-го експерименту мають вигляд:

$$\begin{aligned} \text{на площині } x = 0: \\ u_x = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \\ \text{на площині } y = 0: \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &u_y = 0; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \\
 &\text{на площині } z = 0: \\
 &u_z = 0; \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = 0; \\
 &\text{на площині } x = a: \\
 &u_x = \delta_x; \tau_{xy} = 0; \tau_{xz} = 0; \\
 &\text{на площині } y = b: \\
 &u_y = \delta_y; \tau_{xy} = 0; \tau_{yz} = 0; \\
 &\text{на площині } z = c: \\
 &u_z = \delta_z; \tau_{yz} = 0; \tau_{xz} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Провівши розрахунок НДС і отримавши розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо локальне напруження окремо для волокон, розташованих уздовж осі  $x$  (осі навантаження),  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 9).

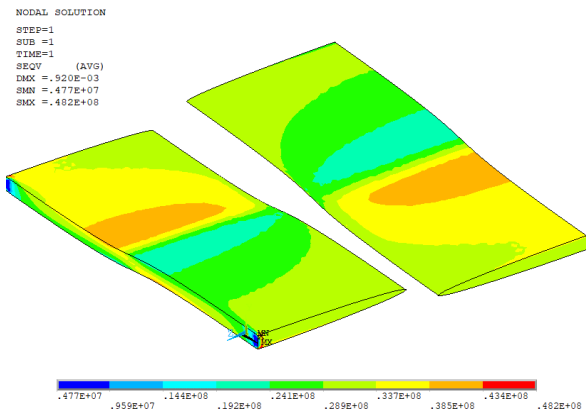


Рисунок 9 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$ , Па

- Границі міцності були прийняті такі:
- на розтяг волокон  $\sigma_f = 3950$  МПа;
  - на розтяг матриці  $\sigma_{pm} = 80$  МПа;
  - на стиск матриці  $\sigma_{cm} = 150$  МПа,

Коефіцієнт допустимого навантаження  $k_f$  для волокон можна визначити за наступною формулою:

$$\begin{aligned}
 k_f &= \frac{\sigma_f}{Seqv_{fibers}} \\
 k_f &= 822.9167
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Граничне напруження, що призводить до руйнування волокон при розтягуванні композиту вздовж осі  $x$ , визначається за наступною формулою:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{fx} &= k_f \cdot \sigma \\
 \sigma_{fx} &= 8.2292 \cdot 10^9 \text{ Па}
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Для матриці визначаємо максимальну еквівалентне напруження за Мізесом  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 10).

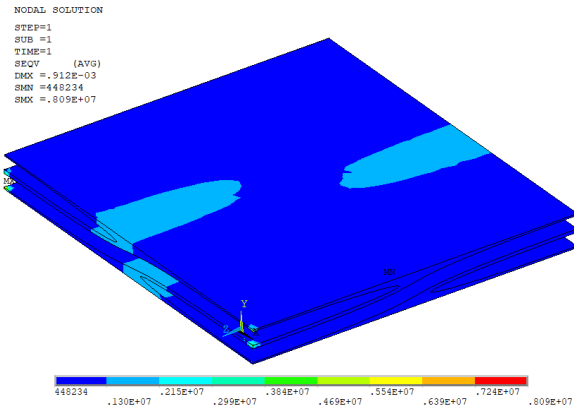


Рисунок 10 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$ , Па

Тепер визначаємо коефіцієнти навантаження  $k_m^+$  та  $k_m^-$  для матриці

$$k_m^+ = \frac{\sigma_{pm}}{Seqv_{matrix}}, \quad k_m^- = \frac{\sigma_{cm}}{Seqv_{matrix}}, \tag{19}$$

$$k_m^+ = 98.8875 \quad k_m^- = 185.4141$$

де тут і далі верхній індекс «+» означає розтяг, а «-» – стиснення.

Далі знаходимо граничне напруження, що призводить до руйнування матриці композиту при розтягуванні та стисненні вздовж осі  $x$ , відповідно:

$$\sigma_{mx}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad \sigma_{mx}^- = k_m^- \cdot \sigma. \tag{20}$$

$$\sigma_{mx}^+ = 9.8888 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

$$\sigma_{mx}^- = 1.8541 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

З двох значень  $\sigma_{fx}$  і  $\sigma_{mx}^+$  вибирається менше, яке є розрахунковою границею міцності композиту при розтягуванні  $\sigma_x^+$  вздовж осі  $x$ :

- якщо  $\sigma_{fx} < \sigma_{mx}^+$   $\sigma_x^+ = \sigma_{fx}$ ;
- якщо  $\sigma_{fx} > \sigma_{mx}^+$   $\sigma_x^+ = \sigma_{mx}^+$ .

Аналогічно з двох значень  $\sigma_{fx}$  та  $\sigma_{mx}^-$  вибираємо менше, щоб вважати його границею міцності композиту  $\sigma_x^-$  і при стисненні вздовж осі  $x$ :

- якщо  $\sigma_{fx} < \sigma_{mx}^-$   $\sigma_x^- = \sigma_{fx}$ ;
- якщо  $\sigma_{fx} > \sigma_{mx}^-$   $\sigma_x^- = \sigma_{mx}^-$ .

Таким чином, у першому експерименті визначаються  $\sigma_x^+$  та  $\sigma_x^-$ .

$$\sigma_{mx}^+ = 9.8888 \cdot 10^8 \text{ Па}$$

$$\sigma_{mx}^- = 1.8541 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

**Другий чисельний експеримент** за міцністю моделює одноосовий напружений стан – розтяг уздовж осі  $y$  під дією  $\langle \sigma_y \rangle = \sigma$ . Таке навантаження буде відповідати наступним деформаціям (2):

$$\langle \epsilon_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{21}; \langle \epsilon_y \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{22}; \langle \epsilon_z \rangle = \langle \sigma_y \rangle \cdot a_{23}. \tag{23}$$

Далі обчислюються переміщення, що відповідають цим деформаціям за формулами (14). Граничні умови – визначаються як (15).

Провівши розрахунок НДС і, отримавши розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , зна-

ходимо середнє напруження для всіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 11).

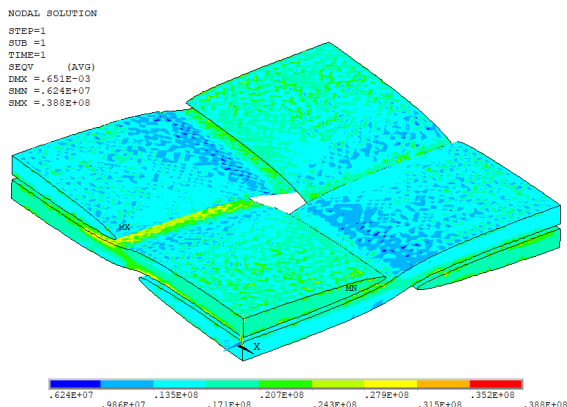


Рисунок 11 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$ , Па

Визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_f$  для волокон за формулою (17) і знаходимо границю міцності волокон при розтягуванні композиту вздовж осі у:

$$\sigma_{fy} = k_f \cdot \sigma. \quad (24)$$

Далі обчислюються переміщення, що відповідають цим деформаціям за формулами (15). Граничні умови – визначаються як (16).

Провівши розрахунок НДС і, отримавши розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо середнє напруження для всіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 11).

Для матриці визначаємо максимальне еквівалентне напруження по Мізесу  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 12).

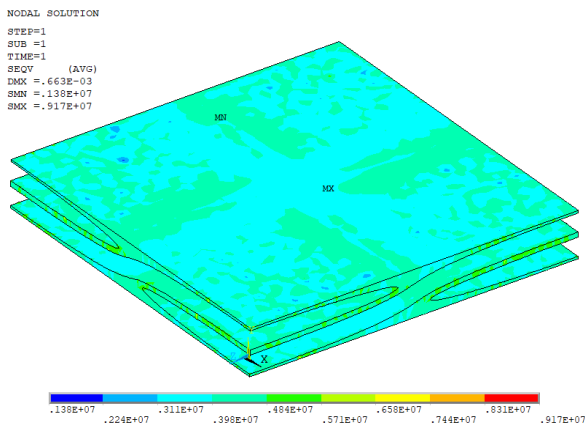


Рисунок 12 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$ , Па

Тепер визначаємо коефіцієнти навантаження  $k_m^+$  і  $k_m^-$  для матриці за формулами (17) і знаходимо границі міцності матриці при розтягуванні та стисненні композиту вздовж осі у:

$$\sigma_{my}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad \sigma_{my}^- = k_m^- \cdot \sigma. \quad (25)$$

Використовуючи формули (20) і (21) і замінюючи в них індекс «у» на «х, z», також визначаємо границі міцності композиту  $\sigma_{x,z}^+$  і  $\sigma_{x,z}^-$ , відповідно, на розтяг одночасно вздовж осей х і z.

**Третій чисельний експеримент** за міцністю моделює двовісно напружений стан – одночасне розтягнення вздовж осей х і z під дією  $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \sigma$ . Таке навантаження буде відповідати наступним деформаціям (3.2):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x \rangle &= \sigma \cdot (a_{11} + a_{13}); \\ \langle \varepsilon_y \rangle &= \sigma \cdot (a_{21} + a_{23}); \\ \langle \varepsilon_z \rangle &= \sigma \cdot (a_{31} + a_{33}). \end{aligned} \quad (26)$$

Далі обчислюються переміщення, що відповідають цим деформаціям за формулами (14). Граничні умови визначаються як (15).

Провівши розрахунок НДС і отримавши розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо середнє напруження для всіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 13).

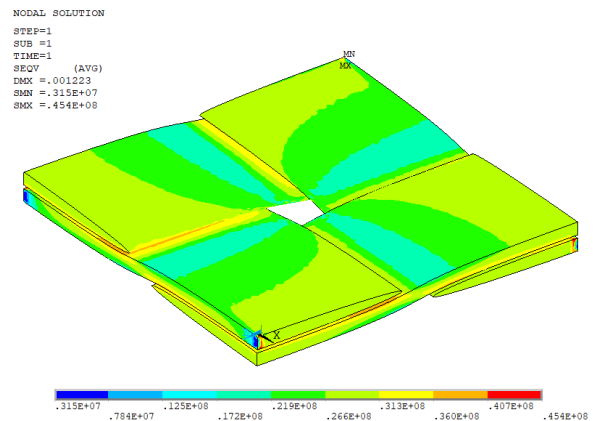


Рисунок 13 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$ , Па

Визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_f$  для волокон за формулою (16) і знаходимо границю міцності волокон при розтягуванні композиту вздовж осей х і z:

$$\sigma_{f,x,z} = k_f \cdot \sigma. \quad (27)$$

Для матриці визначаємо максимальне еквівалентне напруження по Мізесу  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 14).

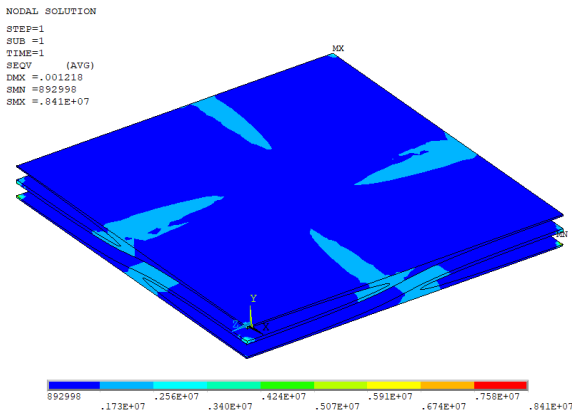


Рисунок 14 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$ , Па

Тепер визначаємо коефіцієнти навантаження  $k_m^+$  і  $k_m^-$  для матриці за формулами (18) і знаходимо границі міцності матриці при розтягуванні композиту вздовж осей  $x$  і  $z$ :

$$\sigma_{m\ x,z}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad (28)$$

Використовуючи формули (19) і (20) і замінюючи в них індекс « $y$ » на « $x,z$ », також визначаємо границі міцності композиту  $\sigma_{x,z}^+$  і  $\sigma_{x,z}^-$ , відповідно, на розтяг одночасно вздовж осей  $x$  і  $z$ .

**Четвертий чисельний експеримент** за міцністю моделює двовісно напружений стан – одночасне розтягнення вздовж осей  $z$  і  $y$  під дією  $\langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = \sigma$ . Таке навантаження буде відповідати наступним деформаціям (3.2):

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x \rangle &= \sigma \cdot (a_{12} + a_{13}); \\ \langle \varepsilon_y \rangle &= \sigma \cdot (a_{22} + a_{23}); \\ \langle \varepsilon_z \rangle &= \sigma \cdot (a_{32} + a_{33}). \end{aligned} \quad (29)$$

Далі обчислюються переміщення, що відповідають цим деформаціям за формулами (14). Граничні умови визначаються як (15).

Провівши розрахунок НДС і отримавши розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо середнє напруження для всіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$ . (рис. 15).

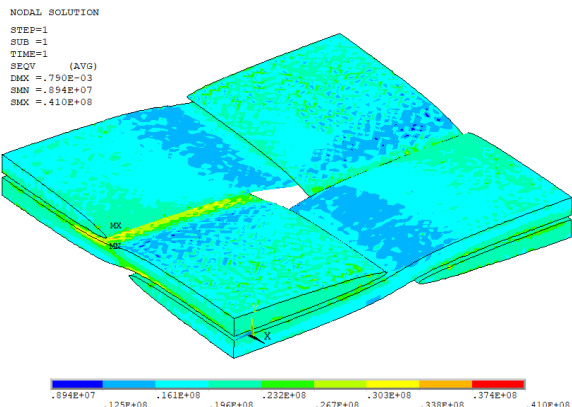


Рисунок 15 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень

$\langle Seqv_{fibers} \rangle$ , Па

Визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_f$  для волокон за формулою (16) і знаходимо границю міцності волокон при розтягуванні композиту вздовж осей  $y$  і  $z$ :

$$\sigma_{f\ y,z} = k_f \cdot \sigma. \quad (30)$$

Для матриці визначаємо максимальне еквівалентне напруження по Мізесу  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 16).

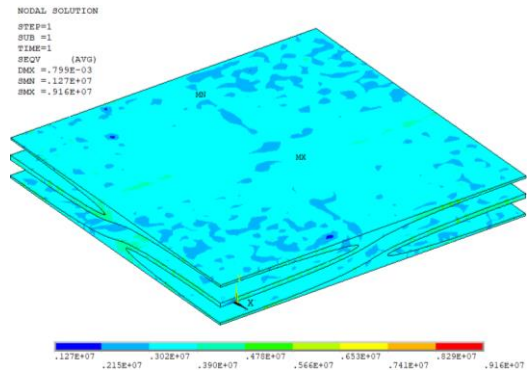


Рисунок 16 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$ , Па

Тепер визначаємо коефіцієнти навантаження  $k_m^+$  та  $k_m^-$  для матриці за формулами (18) і знаходимо границі міцності матриці при розтягуванні композиту вздовж осей  $y$  та  $z$ :

$$\sigma_{m\ y,z}^+ = k_m^+ \cdot \sigma, \quad (31)$$

Для **п'ятого чисельного експерименту** за міцністю, що моделює зсув у площині  $xy$ , використовуємо четвертий чисельний експеримент для визначення пружних постійних композитів. Навантаження визначається як деформації  $\langle \gamma_{xy} \rangle = \gamma = 10^{-3}$ , тобто переміщення  $u_x|_{y=b} = \gamma \cdot b$ .

Маючи розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо середнє напруження для усіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 17).

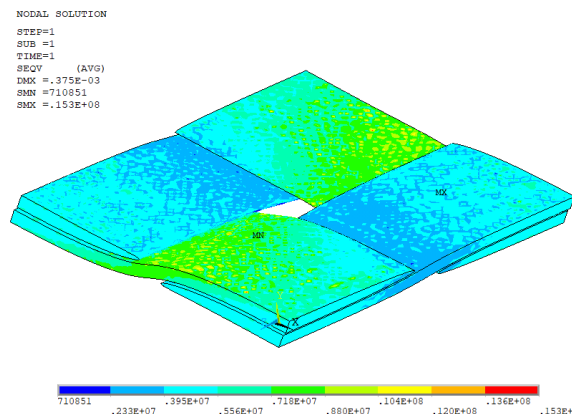


Рисунок 17 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень

$$\langle Seqv_{fibers} \rangle, \text{ Па}$$

Визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_f$  для волокон за формулою (17) та знаходимо границю міцності волокон при зсуві композиту в площині  $xz$ :

$$\tau_{f_{xy}} = k_f \cdot \gamma \cdot G_{xy}. \quad (32)$$

Для матриці визначаємо максимальне еквівалентне напруження по Мізесу  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 18).

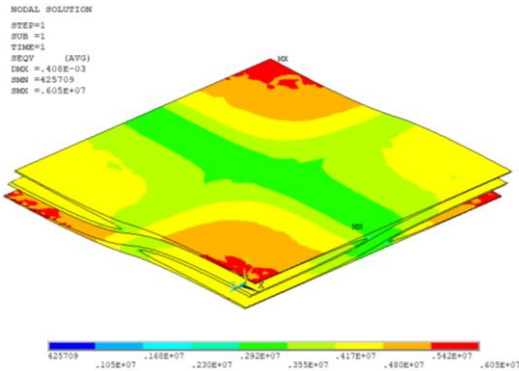


Рисунок 18 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle, \text{ Па}$

Тепер визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_m^+$  (через те, що використовується менший з границь на розтяг і стиснення  $\sigma_{pm} < \sigma_{cm}$ ) для матриці (32) і знаходимо границю міцності матриці при зсуві композиту в площині  $xz$ :

$$\tau_{m_{xy}} = k_m^+ \cdot \gamma \cdot G_{xy}. \quad (33)$$

Для шостого чисельного експерименту за міцністю, що моделює зсув у площині  $xz$ , використовуємо шостий чисельний експеримент для визначення пружних постійних композитів (розділ 4). Навантаження визначається як деформації  $\langle \gamma_{xz} \rangle = \gamma = 10^{-3}$ , тобто переміщення  $u_x|_{z=c} = \gamma \cdot c$ .

Маючи розподіл еквівалентних по Мізесу напружень  $Seqv$ , знаходимо середнє напруження для всіх волокон  $\langle Seqv_{fibers} \rangle$  (рис. 19).

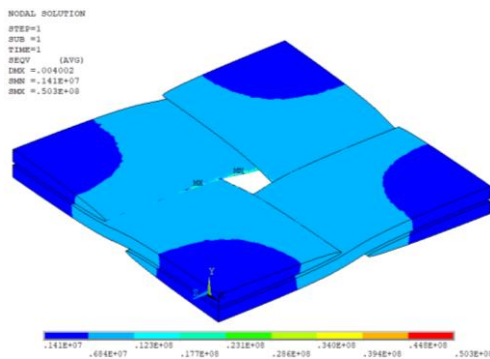


Рисунок 19 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень

$$\langle Seqv_{fibers} \rangle, \text{ Па}$$

Визначаємо коефіцієнт навантаження  $k_f$  для волокон за формулою (17) і знаходимо границю міцності волокон при зсуві композиту в площині  $xz$ :

$$\tau_{f_{xz}} = k_f \cdot \gamma \cdot G_{xz}. \quad (34)$$

Для матриці визначаємо максимальне еквівалентне напруження по Мізесу  $\langle Seqv_{matrix} \rangle$  (рис. 20).

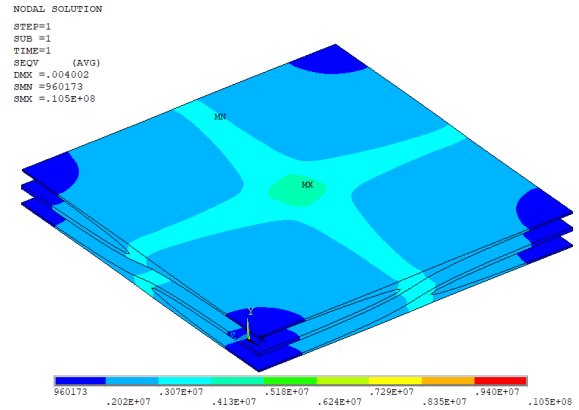


Рисунок 20 – Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень  $\langle Seqv_{matrix} \rangle, \text{ Па}$

Знаходимо коефіцієнт навантаження  $k_m^+$  (через те, що використовується менший з границь на розтяг і стиснення  $\sigma_{pm} < \sigma_{cm}$ ) для матриці (32) і границю міцності матриці при зсуві композиту в площині  $xz$ :

$$\tau_{f_{xz}} = k_m^+ \cdot \gamma \cdot G_{xz}. \quad (35)$$

**Результати визначення граничного напруження для композиту.** Нижче в табл. 7-10 приведені значення границь міцності.

Таблиця 7 – Границі міцності у базових експериментах при розтягуванні вздовж

осі $x$	осі $y$	осі $z$
$\sigma_x^+$	$\sigma_y^+$	$\sigma_z^+$
$9.8 \cdot 10^8 \text{ Па}$	$5.4 \cdot 10^8 \text{ Па}$	$9.8 \cdot 10^8 \text{ Па}$

Таблиця 8 – Границі міцності у базових експериментах при стисненні вздовж

осі $x$	осі $y$	осі $z$
$\sigma_x^-$	$\sigma_y^-$	$\sigma_z^-$
$-1.85 \cdot 10^9 \text{ Па}$	$-1.02 \cdot 10^9 \text{ Па}$	$-1.85 \cdot 10^9 \text{ Па}$

Таблиця 9 – Границі міцності у базових експериментах при біаксіальному розтягуванні вздовж

осей $x$ та $y$	осей $y$ та $z$	осей $x$ та $z$
$\sigma_{x+y}^+$	$\sigma_{y+z}^+$	$\sigma_{x+z}^+$
$8.72 \cdot 10^8 \text{ Па}$	$8.72 \cdot 10^8 \text{ Па}$	$9.45 \cdot 10^8 \text{ Па}$

Таблиця 10 – Границі міцності у базових експериментах при зсуві в площині

$xy$	$yz$	$xz$
$\tau_{xy}^+$	$\tau_{yz}^+$	$\tau_{xz}^+$
$3.2 \cdot 10^8$ Па	$3.2 \cdot 10^8$ Па	$2.4 \cdot 10^8$ Па

**Обробка результатів чисельних експериментів з міцності композиту.** Для визначення чисельних значень параметрів критерію міцності для композиційного матеріалу, що розглядається, використовуються дані з теоретичних границь міцності в базових експериментах, представлені в табл. 7-10. Параметри пов'язані з границями міцності у базових експериментах такими співвідношеннями:

$$C_{11} = \frac{1}{\sigma_x^+ \cdot \sigma_x^-}; \quad C_{22} = \frac{1}{\sigma_y^+ \cdot \sigma_y^-}; \quad C_{33} = \frac{1}{\sigma_z^+ \cdot \sigma_z^-}; \quad (36)$$

$$d_1 = \left( \frac{1}{\sigma_x^+} - \frac{1}{\sigma_x^-} \right); \quad d_2 = \left( \frac{1}{\sigma_y^+} - \frac{1}{\sigma_y^-} \right); \quad d_3 = \left( \frac{1}{\sigma_z^+} - \frac{1}{\sigma_z^-} \right);$$

$$C_{44} = \frac{1}{(\tau_{xy}^+)^2}; \quad C_{55} = \frac{1}{(\tau_{yz}^+)^2}; \quad C_{66} = \frac{1}{(\tau_{xz}^+)^2};$$

$$C_{12} = \frac{1}{(\sigma_{x+y}^+)^2} \left[ 1 - \sigma_{x+y}^+ (d_1 + d_2) - (\sigma_{x+y}^+)^2 (C_{11} + C_{22}) \right]; \quad (37)$$

$$C_{23} = \frac{1}{(\sigma_{y+z}^+)^2} \left[ 1 - \sigma_{y+z}^+ (d_2 + d_3) - (\sigma_{y+z}^+)^2 (C_{22} + C_{33}) \right];$$

$$C_{13} = \frac{1}{(\sigma_{x+z}^+)^2} \left[ 1 - \sigma_{x+z}^+ (d_1 + d_3) - (\sigma_{x+z}^+)^2 (C_{11} + C_{33}) \right].$$

Значення коефіцієнтів критерію міцності, підраховані за формулами (36)-(37), наведено у табл. 11.

Таблиця 11 – Коефіцієнти критерію міцності

$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{33}$	$d_1$	$d_2$	$d_3$
$5.4540 \cdot 10^{-19}$	$1.8 \cdot 10^{-18}$	$5.4540 \cdot 10^{-19}$	$4.7192 \cdot 10^{-10}$	$8.5750 \cdot 10^{-10}$	$4.7192 \cdot 10^{-10}$
$C_{44}$	$C_{55}$	$C_{66}$	$C_{12}$	$C_{23}$	$C_{13}$
$9.7471 \cdot 10^{-18}$	$9.7471 \cdot 10^{-18}$	$1.7182 \cdot 10^{-17}$	$-2.5561 \cdot 10^{-18}$	$-2.5561 \cdot 10^{-18}$	$-8.5878 \cdot 10^{-17}$

**Висновки.** У цій роботі досліджується міцність заданого вуглепластикового композиційного матеріалу на представницькому об'ємі. Вид армування волокон у даному композиті – полотняне переплетення.

У роботі для визначення міцності композиту були виконані наступні задачі:

- розроблено методику чисельного визначення ефективних пружних постійних композиційного матеріалу;

- відповідно до методики визначено пружні ефективні властивості ортотропного матеріалу заданої моделі;

- дана оцінка границь пропорційності та міцності композиційного матеріалу шляхом чисельних досліджень моделі на розтяг, стиснення, зсув та при біаксіальних навантаженнях.

В результаті обробки даних чисельного моделювання базових експериментів визначено параметри критерію міцності для даної моделі композиційного матеріалу.

#### Список літератури

1. Saeed DZ, Ivanivich LG. The calculation of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2015(3 (35)):60-8.
2. Voigt W. Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper. Wied. Ann, 1889, vol. 38, pp. 573-587
3. Reuss A. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik, 1929, no. 9, pp. 49-58.
4. Vanin G.A. Micro-Mechanics of Composite Materials. Kiev, Nauka Dumka Publ., 1985.
5. Halpin J.C, Kardos J.L. The Halpin-Tsai equations: A

review. Polymer Engineering and Science, 1976, May, vol. 16, no. 5.

6. Chamis C.C. Mechanics of composite materials: past, present and future. J. Compos. Technol. Res. ASTM, 1989, no. 11, pp. 3-14.

7. Hashin Z., Rosen B.W. The elastic moduli of fiber reinforced materials. Journal of Applied Mechanics, Trans ASME, 1964, vol. 31, pp. 223-232.

8. Alfootov N.A. Calculation of laminated plates and shells made of composite materials. Moscow, Mashinostroitelni Publ., 1984.

9. Christensen R.M. A critical evaluation for a class of micromechanical models. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1990, vol. 38, no. 3, pp. 379-404.

10. Mori T., Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. Acta Metall., 1973, vol. 21, pp. 571-574.

11. Hill R. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials-3. Self-consistent model. Journal of Mechanics and Physics of Solids, 1965, vol. 13, pp. 189-198.

12. Bubiensky B. On the elastic moduli of some heterogeneous materials. Journal of Mechanics and Physics of solids, 1965, vol. 13, pp. 223-227.

13. Chou Tw., Nomura S., Taya M. A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites. J. Compos. Mater., 1980, vol. 14, pp. 178-188.

14. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites. International Journal of Solids and Structures, 2001, vol. 38, pp. 4147-4172.

15. Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model. Composites: Part A, 2001, vol. 32, pp. 143-172.

16. Potter E, Pinho ST, Robinson P, Iannucci L, McMillan AJ. Mesh generation and geometrical modelling of 3D woven composites with variable tow crosssections. Comput Mater Sci 2012;51(1):103-11.

17. Lomov SV, Ivanov DS, Verpoest I, Zako M, Kurashiki T, Nakai H, et al. Meso-FE modelling of textile composites: road

map, data flow and algorithms. *Compos Sci Technol* 2007;67(9):1870–91.

18. *Li LY, Wen PH, Aliabadi MH*. Meshfree modeling and homogenization of 3D orthogonal woven composites. *Compos Sci Technol* 2011;71(15):1777–88.

19. *Gager J, Pettermann HE*. FEM homogenization of textile composites based on shell element discretization. In 16th International conference on composite structures, ICCS 16, 2011.

20. *Kaminski M. M*. Computational Mechanics of Composite Materials Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour / *M. M. Kaminski*. – Springer, 2006. – 418 с.

21. *Kamiński M, Ostrowski P*. Homogenization of heat transfer in fibrous composite with stochastic interface defects. *Composite Structures*. 2021 Apr 1;261:113555

22. *Fantuzzi N, Bacciocchi M, Agnelli J, Benedetti D*. Three-phase homogenization procedure for woven fabric composites reinforced by carbon nanotubes in thermal environment. *Composite Structures*. 2020 Dec 15;254:112840

23. *Bhaskar P, Mohamed RH*. Analytical estimation of elastic properties of polypropylene fiber matrix composite by finite element analysis. *Advances in Materials Physics and Chemistry*. 2012 Mar 19;2012

24. *Adeniyi AG, Adeoye SA, Onifade DV, Ighalo JO*. Multi-scale finite element analysis of effective elastic property of sisal fiber-reinforced polystyrene composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021 May 17;28(12):1245-53

25. *Brassart L, Doghri I, Delannay L*. Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. *International Journal of Solids and Structures*. 2010 Mar 1;47(5):716-29

26. *Ogierman W*. Hybrid Mori-Tanaka/finite element method in homogenization of composite materials with various reinforcement shape and orientation. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2019;17(3)

27. *Peng X, Cao J*. A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites. *Composites Part B: Engineering*. 2002 Jan 1;33(1):45-56

28. *Kolpakov AG, Rakin SI*. Homogenized strength criterion for composite reinforced with orthogonal systems of fibers. *Mechanics of Materials*. 2020 Sep 1;148:103489

29. *Jain A*. Micro and mesomechanics of fibre reinforced composites using mean field homogenization formulations: A review. *Materials Today Communications*. 2019 Dec 1;21:100552

30. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия машиностроительных материалов / *Е. К. Ашкенази*. – М.: Машиностроение, 1969. – 112 с.

31. *Ашкенази Е. К.* К вопросу об анизотропии прочности конструкционных материалов. / *Е. К. Ашкенази*. – М.: Журнал технической физики. – 1961. – Т. XXXI, Вып. 5 – С. 374-380.

32. *Ашкенази Е. К.* Анизотропия конструкционных материалов : справочник / *Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов*. – М.: Машиностроение, 1972. – 216 с.

33. *Малмейстер А. К.* Геометрия теорий прочности, механика полимеров / *А. К. Малмейстер* // *Механика полимеров*. – М.: 1966. – № 4. – С. 519–534.

34. *Ершов Н. П.* Некоторые вопросы оценки прочности конструкций из композиционных материалов. / *Н. П. Ершов*. – М.: Механика полимеров. – 1977. – № 4. – С. 731-732.

35. *Tsai S. W.* A general theory of strength for anisotropic materials / *S. W. Tsai, E. M Wu* // *J. Compos. Mater.* – 1971. – Vol. 5. – P. 58-80.

36. *Ашкенази Е. К.* Экспериментальная проверка применимости полинома четвертой степени для описания пове-

рности равностных плоских напряженных состояний стеклопластиков. / *Е. К. Ашкенази, Ф. П. Пеккер*. – М.: Механика полимеров. – 1970. – № 2. – С. 784-295.

37. *Тенисов Р. С.* Приложение кубического условия прочности к анализу разрастания слоистых композитов / *Р. С. Тенисов, Г. Э. Варам, Г. Элиот*. – М.: Прочность и разрастание композиционных материалов. Под ред. Дж. К. Си, В. П. Тамужа. – Рига: Зинатне, 1983. – № 2. – С. 127-135

38. *Dvorak G. J.* Micromechanics of Composite Materials / *G. J. Dvorak*. – Springer, 2013. – 442 p.

39. *Ромащенко В. А.* Конкретизация квадратичного критерия прочности ортотропного материала / *В. А. Ромащенко* // *Проблемы прочности*. – 2013. – №5. – С. 28-38. – Режим доступа: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/PPT\\_2013\\_5\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/PPT_2013_5_5)

40. *De Carvalho, N. V., S. T. Pinho, and P. Robinson.* "Numerical modelling of woven composites: Biaxial loading." *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43.8 (2012): 1326-1337.7

41. *Дария заде С.* Численная методика определения эффективных характеристик однонаправлено армированных композитов гексагональной структуры / *С. Дария заде, Г. И. Львов* // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2014. – № 2 (109). – С. 59-66.8

42. *Победра Б. Е.* Механика композиционных материалов / *Б. Е. Победра*. – М.: Изд-во Москва ун-та, 1984. – 336 с.

#### References (transliterated)

1. *Saeed DZ, Ivanivich LG*. The calculation of effective elastic constants in a composite with 3D orthogonal nonwoven fibers. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2015(3 (35)):60-8.

2. *Voigt W.* Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten Isotroper Körper. *Wied. Ann*, 1889, vol. 38, pp. 573-587

3. *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Zeitschrift Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1929, no. 9, pp. 49-58.

4. *Vanin G.A.* Micro-Mechanics of Composite Materials. Kiev, Nauka Dumka Publ., 1985.

5. *Halpin J.C, Kardos J.L.* The Halpin-Tsai equations: A review. *Polymer Engineering and Science*, 1976, May, vol. 16, no. 5.

6. *Chamis C.C.* Mechanics of composite materials: past, present and future. *J. Compos. Technol. Res. ASTM*, 1989, no. 11, pp. 3-14.

7. *Hashin Z., Rosen B.W.* The elastic moduli of fiber reinforced materials. *Journal of Applied Mechanics, Trans ASME*, 1964, vol. 31, pp. 223-232.

8. *Alfootov N.A.* Calculation of laminated plates and shells made of composite materials. Moscow, Mashinostroitelni Publ., 1984.

9. *Christensen R.M.* A critical evaluation for a class of micromechanical models. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1990, vol. 38, no. 3, pp. 379-404.

10. *Mori T., Tanaka K.* Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall.*, 1973, vol. 21, pp. 571-574.

11. *Hill R.* Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials-3. Self-consistent model. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1965, vol. 13, pp. 189-198.

12. *Bubiansky B.* On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *Journal of Mechanics and Physics of solids*, 1965, vol. 13, pp. 223-227.

13. *Chou Tw., Nomura S., Taya M.* A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites. *J. Compos. Mater.*, 1980, vol. 14, pp. 178-188.

14. Huang Z.M. Micromechanical prediction of ultimate strength of transversely isotropic fibrous composites. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, vol. 38, pp. 4147-4172.
15. Huang Z.M. Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model. *Composites: Part A*, 2001, vol. 32, pp. 143-172.
16. Potter E, Pinho ST, Robinson P, Iannucci L, McMillan AJ. Mesh generation and geometrical modelling of 3D woven composites with variable tow crosssections. *Comput Mater Sci* 2012;51(1):103-11.
17. Lomov SV, Ivanov DS, Verpoest I, Zako M, Kurashiki T, Nakai H, et al. Meso-FE modelling of textile composites: road map, data flow and algorithms. *Compos Sci Technol* 2007;67(9):1870-91.
18. Li LY, Wen PH, Aliabadi MH. Meshfree modeling and homogenization of 3D orthogonal woven composites. *Compos Sci Technol* 2011;71(15):1777-88.
19. Gager J, Pettermann HE. FEM homogenization of textile composites based on shell element discretization. In 16th International conference on composite structures, ICCS 16, 2011.
20. Kaminski M. M. Computational Mechanics of Composite Materials Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour / M. M. Kaminski. – Springer, 2006. – 418 c.
21. Kamiński M, Ostrowski P. Homogenization of heat transfer in fibrous composite with stochastic interface defects. *Composite Structures*. 2021 Apr 1;261:113555
22. Fantuzzi N, Bacciochi M, Agnelli J, Benedetti D. Three-phase homogenization procedure for woven fabric composites reinforced by carbon nanotubes in thermal environment. *Composite Structures*. 2020 Dec 15;254:112840
23. Bhaskar P, Mohamed RH. Analytical estimation of elastic properties of polypropylene fiber matrix composite by finite element analysis. *Advances in Materials Physics and Chemistry*. 2012 Mar 19;2012
24. Adeniyi AG, Adeoye SA, Onifade DV, Ighalo JO. Multi-scale finite element analysis of effective elastic property of sisal fiber-reinforced polystyrene composites. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2021 May 17;28(12):1245-53
25. Brassart L, Doghri I, Delannay L. Homogenization of elasto-plastic composites coupled with a nonlinear finite element analysis of the equivalent inclusion problem. *International Journal of Solids and Structures*. 2010 Mar 1;47(5):716-29
26. Ogierman W. Hybrid Mori-Tanaka/finite element method in homogenization of composite materials with various reinforcement shape and orientation. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 2019;17(3)
27. Peng X, Cao J. A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites. *Composites Part B: Engineering*. 2002 Jan 1;33(1):45-56
28. Kolpakov AG, Rakin SI. Homogenized strength criterion for composite reinforced with orthogonal systems of fibers. *Mechanics of Materials*. 2020 Sep 1;148:103489
29. Jain A. Micro and mesomechanics of fibre reinforced composites using mean field homogenization formulations: A review. *Materials Today Communications*. 2019 Dec 1;21:100552
30. Ashkenazi Ye. K. Anizotropiya mashinostroitel'nykh materialov / Ye. K. Ashkenazi. – M.: Mashinostroyeniye, 1969. – 112 s.
31. Ashkenazi Ye. K. K voprosu ob anizotropii prochnosti konstruksionnykh materialov. / Ye. K. Ashkenazi. – M.: Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. – 1961. – T. XXXI, Vyp. 5 – S. 374-380.
32. Ashkenazi Ye. K. Anizotropiya konstruksionnykh materialov : spravochnik / Ye. K. Ashkenazi, E. V. Ganov. – M.: Mashinos-troyeniye, 1972. – 216 s.
33. Malmeyster A. K. Geometriya teorii prochnosti, mekhanika polimerov / A. K. Malmeyster // *Mekhanika polimerov*. – M.: 1966. – № 4. – S. 519-534.
34. Yershov N. P. Nekotoryye voprosy otsenki prochnosti kons-truktsiy iz kompozitsionnykh materialov. / N. P. Yershov. – M.: Mekhanika polimerov. – 1977. – № 4. – S. 731-732.
35. Tsai S. W. A general theory of strength for anisotropic materials / S. W. Tsai, E. M Wu // *J. Compos. Mater.* – 1971. – Vol. 5. – P. 58-80.
36. Ashkenazi Ye. K. Eksperimental'naya proverka primenimo-sti polinoma chetvertoy stepeni dlya opisaniya poverkhnos-ti revnostnykh ploskikh napryazhennykh sostoyaniy steklop-lastikov. / Ye. K. Ashkenazi, F. P. Pekker. –M.: Mekhanika polimerov. – 1970. – № 2. – S. 784-295.
37. Tenisov R. S. Prilozheniye kubicheskogo usloviya prochnosti k analizu razrashcheniya sloistykh kompozitov / R. S. Teni-sov., G E. Varam., G. Eliot. – M.: Prochnost' i razrashcheniye kompozitsionnykh materialov. Pod. red. Dzh. K. Si, V. P. Tamuzha. – Riga: Zinatne, 1983. – № 2. – S. 127-135
38. Dvorak G. J. Micromechanics of Composite Materials / G. J. Dvorak. – Springer, 2013. – 442 p.
39. Romashchenko V. A. Konkretizatsiya kvadratichnogo kriteriya prochnosti ortotropnogo materiala / V. A. Romashchenko // *Problemy prochnosti*. – 2013. - №5. – C. 28-38. – URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/PPT\\_2013\\_5\\_5](http://nbuv.gov.ua/UJRN/PPT_2013_5_5)
40. De Carvalho, N. V., S. T. Pinho, and P. Robinson. "Numerical modelling of woven composites: Biaxial loading." *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43.8 (2012): 1326-1337.7
41. Dariya zade S. Chislennaya metodika opredeleniya effekti-vnykh kharakteristik odnonapravleno armirovannykh kom-pozitov geksagonal'noy struktury / S. Dariya zade, G. I. L'vov // *Aviatsionno-kosmicheskaya tekhnika i tekhnologiya*. – 2014. – № 2 (109). – C. 59-66.8
42. Pobedrya B. Ye. Mekhanika kompozitsionnykh materialov / B. Ye. Pobedrya. – M.: Izd-vo Moskva un-ta, 1984. – 336 c.,

Поступила (received) 09.09.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Богатир Михайло Сергійович (Богатырь Михаил Сергеевич, Mukhailo Bohatyr)** – аспірант кафедри «Динаміка та міцність машин» НТУ «ХПІ», тел. (057) 707-68-79; e-mail: mbogatyr@outlook.com

**Львов Геннадій Іванович (Львов Геннадий Иванович, Gennadiy I. Lvov)** – професор, доктор технічних наук, професор кафедри, «Динаміка та міцність машин» НТУ «ХПІ», тел. (057) 707-63-43; e-mail: lvovdpm@ukr.net