

Л.В. КУРПА, К.І. ЛЮБИЦЬКА, Г.Б. ЛІННИК, І.О. МОРАЧКОВСЬКА

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНОГО ЗГИНУ БАГАТОКУТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ

Для чисельного дослідження нелінійного згину функціонально-градієнтних тонкостінних пластинчатих конструкцій, які знаходяться на пружній основі, запропоновано використання варіаційно-структурного методу (RFM). Математичне моделювання поставленої проблеми виконано в рамках класичної геометрично нелінійної теорії пластин. Для розв'язання послідовності лінійних крайових задач, що отримано внаслідок лінеаризації вихідної нелінійної системи рівнянь методом послідовних навантажень і методом Ньютона, використано метод R-функцій. Тестування, а також порівняння з результатами інших авторів дозволили встановити достовірність і ефективність розробленого підходу та застосувати його для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонкостінних пластин складної форми. Проведено обчислювальний експеримент для тонкої шестикутної пластини з мішаними крайовими умовами при різних типах зовнішнього навантаження та характеристик пружної основи. Одержано залежність між максимальним прогином пластини та навантаженням. Результати подано у вигляді графіків.

Ключові слова: функціонально-градієнтні тіла, пружна основа, теорія R-функцій, нелінійність.

Для численного исследования нелинейного изгиба функционально-градиентных тонкостенных пластинчатых конструкций, находящихся на упругом основании, предложено использовать вариационно-структурный метод (RFM). Математическое моделирование поставленной проблемы выполнено в рамках классической геометрически нелинейной теории пластин. Для решения последовательности линейных краевых задач, полученных в результате линеаризации исходной нелинейной системы уравнений методом последовательных нагружений и методом Ньютона, был применен метод R-функций. Тестирование, а также сравнение полученных результатов с результатами других авторов, позволили установить достоверность и эффективность разработанного подхода и применить его для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных пластин сложной формы. Проведен вычислительный эксперимент для тонких пластин шестиугольной формы со смешанными краевыми условиями при различных типах внешней нагрузки и характеристик упругого основания. Получена зависимость между максимальным прогибом пластины и нагрузкой. Результаты представлены в виде графиков.

Ключевые слова: функционально-градиентные пластины, упругое основание, теория R-функций, нелинейность.

To investigate nonlinear bending of the functionally graded (FGM) plates with complex shape and resting on elastic foundation a variational-structural method (RFM) is proposed. Mathematical statement of nonlinear boundary value problems of plate bending is carried out in the framework of the classical geometrically nonlinear plate theory. To solve a sequence of linear boundary value problems obtained as a result of the linearization of the original nonlinear system of equations by the method of successive loadings and the Newton method, the method of R-functions was applied. Testing, as well as comparison of the obtained results with the results of other authors, made it possible to establish the reliability and effectiveness of the developed approach and apply it to study the stress-strain state (SSS) of thin plates with complex shape. A computational experiment was carried out for thin hexagonal plates with mixed boundary conditions for various types of external load and elastic foundation characteristics. The relationship between the greatest deflection of the plate and the load is obtained. The results are presented in the form of graphs.

Keywords: functionally graded plates, elastic foundation, the R-functions theory, nonlinear bending

Вступ. Функціонально-градієнтні композитні матеріали (ФГМ) є найбільш ефективними для виготовлення різних елементів сучасних тонкостінних конструкцій. Широке використання функціонально-градієнтних матеріалів призводить до необхідності розробки ефективних та універсальних методів розрахунку ФГМ елементів. Особлива увага в сучасній літературі приділяється нелінійним задачам згину, коливань і стійкості пластин та оболонок, як основних елементів багатьох авіаційних і машинобудівних конструкцій. В останні роки питанням розрахунку пластин і оболонок з ФГМ з урахуванням їх нелінійного деформування присвячена величезна кількість монографій і статей. Досить повний огляд робіт, що присвячені даній проблемі, представлено, наприклад, в роботах [1-3]. Аналіз методів дослідження НДС пластин і оболонок з ФГМ дозволив з'ясувати, що запропоновані аналітичні методи дозволяють досліджувати пластини і оболонки з прямокутним планом та обмеженими типами граничних умов. Зазвичай чисельні методи щодо розрахунку ФГМ тонких пластин зі складною формою засновані на методі скінченних елементів (МСЕ). Проте в відомій авторам літературі відсутні, отримані на цій підставі, чисельні результати для

ФГМ пластин зі складною формою з урахуванням пружної основи, які знаходяться під дією поперечного навантаження.

У сучасних дослідженнях [4–8] вивчено термофізичні властивості високотемпературних твердих матеріалів, а також надано аналіз НДС та властивостей матеріалу при нелінійному згині ФГМ плит, що підлягають комбінованому навантаженню та обпираються на пружну основу. Аналіз нелінійного перехідного термопружного процесу у керамічно-металевих пластинах в теплових середовищах, на які діє поперечне навантаження виконано в роботах [4, 9-11]. Моделювання ФГМ за сігмоїдальним законом розглянуто в [12,13].

В дослідженні [14] вивчався нелінійний прогин ФГМ еліптичних пластин що спираються на двопараметричну пружну основу та знаходяться під поперечним навантаженням та навантаженнями в серединній площині.

Метод, який базується на використанні теорії R-функцій [13], для задач про вільні геометрично-нелінійні коливання пластин та пологих оболонок було застосовано в роботах [14,15,16]. Для розв'язання задач про нелінійний згин ортотропних пластин в роботі [17] запропоновано метод, який

також суттєво використовував теорію R-функцій, метод послідовного навантаження та Ньютона.

В даній роботі цей метод, розвинуто на ФГМ пластини практично довільної геометричної форми, які перебувають під дією рівномірного або нерівномірного навантаження та знаходяться на пружній основі типу Вінклера-Пастернака. Метод проілюстровано на прикладі шестикутної ФГМ пластини з мішаними граничними умовами.

Постановка задачі. Розглянемо ФГМ пластину, виготовлену з суміші кераміки та металу. Властивості матеріалу неперервно змінюються вздовж товщини пластини. Припустимо, що верхня поверхня ($z = h/2$) пластини є керамічною, а нижня ($z = -h/2$) – металевою.

Ефективні матеріальні властивості ФГМ визначаються за формулами [2,3]:

$$E(z, T) = (E_c(T) - E_m(T))V_c + E_m(T),$$

$$\rho(z, T) = (\rho_c(T) - \rho_m(T))V_c + \rho_m(T).$$

При цьому вважаємо, що коефіцієнт Пуассона не залежить від температури T , та є однаковим і постійним для складових матеріалу.

Прийmemo, що частка кераміки V_c змінюється вздовж товщини пластини за степеневим законом :

$$V_c = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^k.$$

Показник степеня k ($0 \leq k < \infty$) позначає показник об'ємної частки кераміки, z – відстань між поточною точкою і серединною площиною. В окремому випадку, коли $k=0$, ми отримуємо однорідний матеріал – керамічний, а якщо $k \rightarrow \infty$ – металевий.

Пластина знаходиться під дією розподіленого навантаження $q(x, y)$ та спирається на пружну основу типу Вінклера-Пастернака, реакція p якого, визначається за формулою:

$$p(x, y) = K_1 w + K_2 \nabla^2 w,$$

де K_1 і K_2 – коефіцієнти жорсткості Вінклера та Пастернака відповідно, w – прогин пластини.

У цій роботі передбачається, що температура на верхній і нижній поверхнях однакова. Тоді згідно класичній геометрично-нелінійній теорії пластин, рівняння рівноваги для FGM пластин [9] можуть бути представлені наступним чином:

$$d_{11}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) + 2(d_{12} + 2d_{66})w_{,xxyy} - b_{12}(F_{,xxxx} + F_{,yyyy}) + 2(b_{66} - b_{11})F_{,xxyy} = q(x, y) + L(w, F), \quad (1)$$

$$a_{11}(F_{,xxxx} + F_{,yyyy}) + (2a_{12} + a_{66})F_{,xxyy} - b_{12}(w_{,xxxx} + w_{,yyyy}) - 2(b_{11} - b_{66})w_{,xxyy} = -\frac{1}{2}L((w, w)), \quad (2)$$

де $F(x, y)$ – функція напруг, нелінійні оператори $L(R, \Psi)$ визначаються як:

$$L(R, \Psi) = R_{,xx} \Psi_{,yy} - 2R_{,xy} \Psi_{,xy} + \Psi_{,xx} R_{,yy}.$$

У формулах (1), (2) $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ та $[d_{ij}]$ визначаються наступним чином :

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E_1}, \quad a_{66} = 2(1 + \nu)a_{11},$$

$$b_{11} = b_{66} = -\frac{E_2}{E_1}, \quad b_{12} = 0,$$

$$d_{11} = \frac{1}{1-\nu^2} \left(E_3 - \frac{E_2^2}{E_1} \right), \quad d_{12} = \nu d_{11}, \quad d_{66} = \frac{1-\nu}{2} d_{11}.$$

У цих виразах значення E_1, E_2, E_3 визначаються за формулами [18]:

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m)kh^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+1)} \right) \right) h^3.$$

Система (1) – (2) доповнюється відповідними граничними умовами. Наприклад, для умов, що відповідають ковзаючому шарніру, граничні умови будуть наступними:

$$W = 0, \quad M_n = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (3)$$

У разі ковзаючого закріплення граничні умови мають вигляд:

$$W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0, \quad T_n = 0, \quad N_n = 0. \quad (4)$$

У співвідношеннях (3), (4) вирази для M_n, T_n, N_n мають такий вигляд:

$$M_n = M_x l^2 + M_y m^2 + M_{xy} lm,$$

$$N_n = N_x l^2 + N_y m^2 + N_{xy} lm,$$

$$T_n = N_{xy}(l^2 - m^2) + (N_x + N_y)lm.$$

Тут $l = \cos \alpha$, $m = \cos \beta = \sin \alpha$, α – кут між зовнішньою нормаллю n до межі області та віссю Ox .

Метод розв'язання. Лінеаризацію нелінійних рівнянь (1) – (2) виконуватимемо методом послідовних навантажень (МПН) [19]. Відповідно до цього методу вихідне навантаження розбивається на n малих навантажень $\delta q^{(r)}$ ($r=1, 2, \dots, n$), які визначають малі прогини пластини [17]. На кожному r -му кроці навантаження для розв'язання лінеаризованої системи рівнянь будемо використовувати RFM. Можна показати, що функціонал, що відповідає лінеаризованій системі рівнянь, є наступним:

$$\Pi(\delta w^{(r)}, \delta \phi^{(r)}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ d_{11}(\delta w_{,xx}^{(r)})^2 - a_{11}(\delta \phi_{,yy}^{(r)})^2 + (\delta w_{,x}^{(r)})^2 \phi_{,yy}^{(r-1)} - 2\delta w_{,x}^{(r)} \delta w_{,y}^{(r)} \phi_{,xy}^{(r-1)} + (\delta w_{,y}^{(r)})^2 \phi_{,xx}^{(r-1)} + 2(\delta w_{,y}^{(r)} \delta \phi_{,y}^{(r)} w_{,xx}^{(r-1)} + \delta w_{,x}^{(r)} \delta \phi_{,x}^{(r)} w_{,yy}^{(r-1)}) - 2w_{,xy}^{(r-1)} (\delta w_{,x}^{(r)} \delta \phi_{,y}^{(r)} + \delta w_{,y}^{(r)} \delta \phi_{,x}^{(r)}) + K_1(\delta w^{(r)})^2 + K_2(\nabla \delta w^{(r)})^2 - 2\delta q^{(r)} \delta w^{(r)} \right\} d\Omega$$

Тут $w^{(r-1)}$ та $\phi^{(r-1)}$ – сумарні прогин та функція напруг, що відповідають навантаженню $q^{(r)}$ на $(r-1)$ -му кроці навантаження.

Згідно з методом Ритца, невідомі прирости $\delta w^{(r)}, \delta \phi^{(r)}$ мають вигляд:

$$\delta w^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_1} c_i w_i, \quad \delta \phi^{(r)} = \sum_{i=1}^{N_2} c_i \phi_i,$$

де c_i – невідомі коефіцієнти, $\{w_i\}$, $\{\phi_i\}$ – послідовності координатних функцій, що задовольняють принаймні кінематичним граничним умовам. Для побудови таких послідовностей у разі складної геометрії пластини в роботі використовується теорія R -функцій. Прогин і функція напруги, після виконання n кроків по навантаженню, знаходяться підсумуванням отриманих приростів:

$$w^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta w^{(r)}, \quad F^{(n)} = \sum_{r=1}^n \delta \phi^{(r)}.$$

Щоб уточнити розв’язок МПН, у роботі пропонується через певну кількість кроків застосовувати метод Ньютона [20]. Можна показати, що варіаційна постановка задачі для методу Ньютона зводиться до знаходження точки стаціонарності наступного функціоналу:

$$P(w^{(s+1)}, F^{(s+1)}) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ d_{11} (w_{,xx}^{(s+1)})^2 - a_{11} (F_{,yy}^{(s+1)})^2 + (w_{,x}^{(s+1)})^2 F_{,yy}^{(s)} - 2w_{,x}^{(s+1)} w_{,y}^{(s+1)} F_{,xy}^{(s)} + (w_{,y}^{(s+1)})^2 F_{,xx}^{(s)} + 2(w_{,y}^{(s+1)} F_{,y}^{(s+1)} w_{,xx}^{(s)} + w_{,x}^{(s+1)} F_{,x}^{(s+1)} w_{,yy}^{(s)}) - 2w_{,xy}^{(s)} (w_{,x}^{(s+1)} F_{,y}^{(s+1)} + w_{,y}^{(s+1)} F_{,x}^{(s+1)}) + K_1 (w^{(s+1)})^2 + K_2 (\nabla w^{(s+1)})^2 - 2(q^{(s+1)} + L(w^{(s)}, F^{(s)})) w^{(s+1)} + L(w^{(s)}, F^{(s)}) F^{(s+1)} \} d\Omega.$$

Збіжність ітераційного процесу контролюється за допомогою наступної нерівності:

$$\left\| \frac{w^{(s+1)} - w^{(s)}}{w^{(s)}} \right\|^2 + \left\| \frac{F^{(s+1)} - F^{(s)}}{F^{(s)}} \right\|^2 \leq \varepsilon,$$

де ε – задана величина відносної похибки.

Чисельні результати.

Вірогідність запропонованого методу було перевірено на великій кількості тестових задач для квадратних пластин. Для ілюстрації запропонованого підходу розглянемо геометрично-нелінійний згин шестикутної пластини під дією трьох варіантів поперечного навантаження: лінійне вздовж осі OX , параболічне, частинне – рівномірно розподілене по прямокутній області (див. рис.1, 2).

Геометричні параметри прийнято наступними: $h = 0.02$ м, $a = 0.5$ м, $b = 0.2$ м, $c = 0.6$ м.

Коефіцієнти пружності:

$$k_1 = \frac{K_1 a^4}{E_m h^3}, \quad k_2 = \frac{K_2 a^2}{E_m h^3}.$$

Матеріал пластини – сплав титана та цирконія $ZrO_2/Ti-6Al-4V$, значення градієнтного індексу прийнято як $k = 3$. Умови спирання – мішані (ковзаюче закріплення та ковзаючий шарнір на окремих частинах контуру).

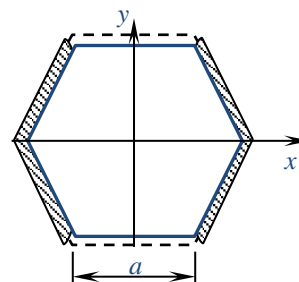


Рис. 1 – Геометрична форма пластини

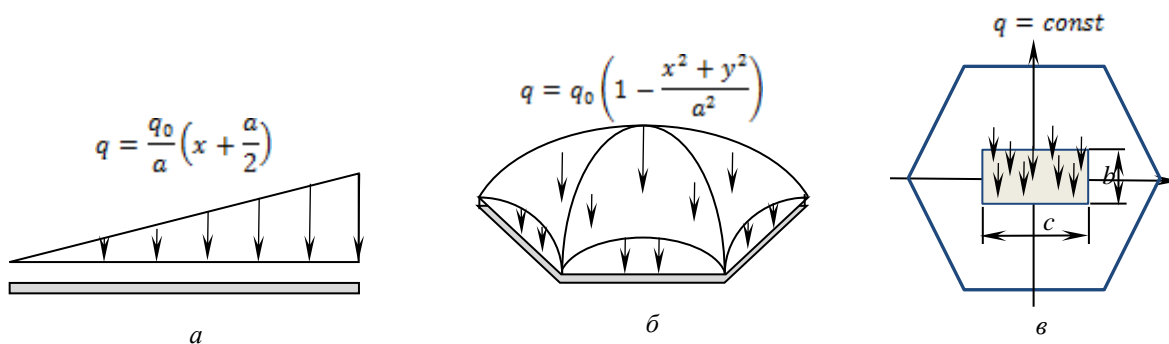


Рис. 2 – Види навантаження

Для побудови системи координатних функцій згідно з RFM спочатку необхідно вивести відповідні структурні формули. Для пластини, що зображена на рис. 1, де штрихова лінія відповідає ковзаючому закріпленню, пунктирна лінія – ковзаючому шарніру, структурні формули, що задовольняють тільки головним (кінематичним) граничним умовам, мають такий вигляд:

$$\delta w^{(r)} = \omega_1 \omega P_1$$

$$\delta \phi^{(r)} = \omega^2 P_2.$$

В наведених структурних формулах P_1 , P_2 це невизначені компоненти, які є розкладаються в ряд

за деякою повною системою функцій $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$ (в даній роботі використано степеневі поліноми), функція

$$\omega(x, y) = f_1 \wedge_0 (f_2 \wedge_0 f_3 \wedge_0 f_4 \wedge_0 f_5) = 0$$

– описує рівняння всієї межі області та побудована за допомогою теорії R - функцій, аналогічно, функція

$$\omega_1(x, y) = f_2 \wedge_0 f_3 \wedge_0 f_4 \wedge_0 f_5 = 0$$

описує рівняння закріпленої ділянки границі.

Функція $f_1(x, y)$ – горизонтальна смуга, $f_i(x, y)$, ($i = 2, 5$) – похилені прямі, символ \wedge_0 відповідає R -кон’юнкції [13].

Графіки залежності максимального прогину досліджуваного елемента від розміру поперечного навантаження q_0 та коефіцієнтів пружності основи для різних типів зовнішнього впливу представлені на рисунках 3-5. Відмітимо, що для випадків параболічного (рис. 2б) та частинного (рис. 2в) навантажень максимальний прогин виникає в центрі пластини, але у випадку лінійного навантаження він зміщується вздовж осі OX . Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок, що при однаковому рівні параметра навантаження q_0 найбільші прогини виникають при лінійному типі зовнішнього навантаження. Параболічний тип навантаження викликає найменші прогини. З графіків також видно, що наявність реакції пружної основи зменшує прогин, що виникає. Однак для параболічного навантаження наявність коефіцієнта Пастернака $k_2=5$ навпаки зробила пластину більш чутливою до зовнішнього впливу.

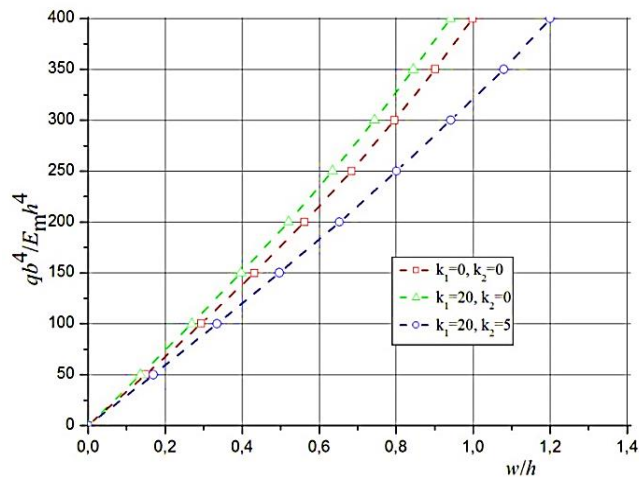


Рис. 4 - Залежність «навантаження- максимальний прогин» для пластини (рис. 2б) для різних параметрів пружної основи

Висновки. Запропоновано чисельно-аналітичний метод для дослідження згину ФГМ пластин під дією поперечного навантаження зі складною геометрією і тих, що лежать на пружній основі типу Вінклера-Пастернака. Розроблений метод базується на спільному застосуванні варіаційного методу Ритца, теорії R-функцій, методах послідовного навантаження та Ньютона. Описаний метод та створене програмне забезпечення дозволяють проводити широкий обчислювальний експеримент для пластин складної форми з різними граничними умовами, в тому числі мішаними, при застосуванні різних типів зовнішнього навантаження та характеристик пружної основи. Цей факт є безумовно важливим та необхідним в процесі проектування інженерних конструкцій.

Список літератури

1. PRAVIN KULKARNI A review of research and recent trends in analysis of composite plates / PRAVIN KULKARNI, ASHWINKUMAR DHOBLE? PRAMOD PADOLE // Sădhanā, 2018 – 43. – 96-115.

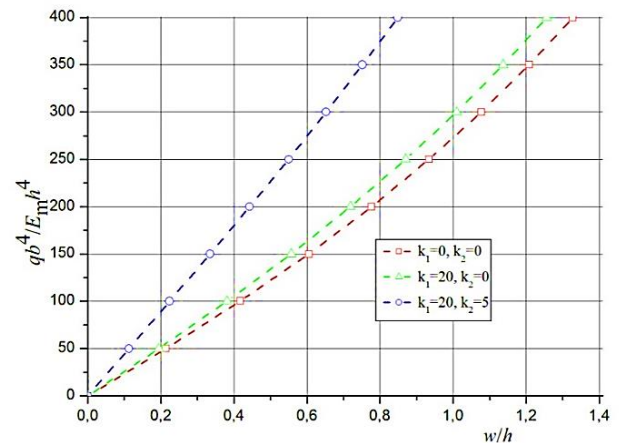


Рис. 3 - Залежність «навантаження- максимальний прогин» для пластини (рис. 2а) для різних параметрів пружної основи

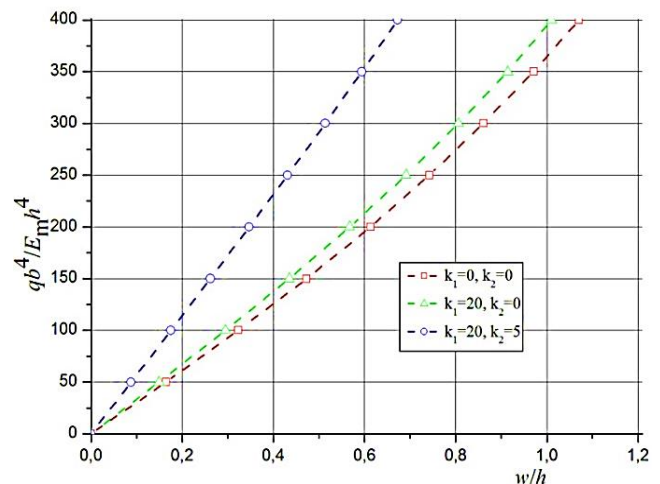


Рис. 5 - Залежності «навантаження- максимальний прогин» для пластини (рис. 2в) для різних параметрів пружної основи

2. Shen, H.-S. Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations/ Shen, H.-S. & Wang Z.-X. // Compos. Struct., 2010. – 92. – pp. 2517-2524
3. Woo, J. Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / Woo, J. & Meguid, S. A. // Int.J.Solid and Structures, 2001. – 38. – pp. 7409-7421
4. Reddy, J.N. Analysis of functionally graded material // Int J Numer Meth. Eng., 2000. – 47. – pp. 663-684
5. Touloukian Y. S. Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. MacMilan, New York, 1967.
6. Yang, J. Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads / Yang, J. & Shen, H.-S. // Int.J.Nonlinear Mech., 2003. – 38. – pp. 467-482
7. Praveen, G N. Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates/ Praveen, GN. & Reddy, JN. // Int.J.Solid and Structures, 1998. – 35. – pp. 4457-4476
8. Shen, H.-S. Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments // Int.J. Mech.Sci., 2002. – 44. – pp. 561-584
9. Shen, H.-S. Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press, Florida, 2009. – 268 pp.
10. Каси А. Использование сигмоидальной функции при решении задач нелинейного цилиндрического изгиба пластин из функционально-градиентного материала / А. Каси, К. Бахти, Х. Хебали, А. Тунси // ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА 2013. – Т. 54. – N1. – С. 143 – 151.
11. Manish Bhandari I Static Response of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Varying Aspect Ratio /

Manish Bhandari and Kamlesh // Int. J. of Metals Volume 2014, Article ID 980563, 11 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/980563>

12. *Da-Guang Zhang* Nonlinear bending analysis of FGM elliptical plates resting on two-parameter elastic foundations // Applied Mathematical Modelling, 2013. – 37. – pp. 8292-8309.

13. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев – К.: Наукова думка, 1982. – 552 с.

14. *Awrejcewicz, J.* Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory/ Kurpa, L. & Shmatko, T. // Int.J.Composite Structures, 2015. – V. 125. – pp. 575–585.

15. *Awrejcewicz, J.* Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions / Kurpa, L., Shmatko, T. // J. Non-Linear Mech. 107, 2018, pp161–169.

16. *Tetyana Shmatko* Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations/ Tetyana Shmatko, Lidiya Kurpa, Jan Awrejcewicz // Acta Mech, <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y>

17. *Kurpa L.V.* The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells on elastic foundations / Kurpa L. V., Lybitska, K. I. & Morachkovskaya, I. O. // Int J.Applied Mech., 2010. – 6. – pp. 660-668.

18. *L. V. Kurpa.* Investigation of free vibration and stability of functionally graded three-layers plates by using the R-function theory and variational methods / L. V. Kurpa, T. V. Shmatko // Int J. of Mathematical Sciences, Vol. 249, No. 3, September, 2020, <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2>

19. *Петров В.В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек / Петров В.В. – Саратов, 1975. – 119 с.

20. *Григоренко Я.М.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. / Григоренко Я.М., Мукоед А.П. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с.

References (transliterated)

1. *PRAVIN KULKARNI* A review of research and recent trends in analysis of composite plates / PRAVIN KULKARNI, ASHWINKUMAR DHOBLE, PRAMOD PADOLE // Sādhanā, 2018 – 43. – 96-115.

2. *Shen, H.-S.* Nonlinear bending of FGM plates subjected to combined loading and resting on elastic foundations/ Shen, H.-S. & Wang Z.-X. // Compos. Struct., 2010. – 92. – pp. 2517-2524

3. *Woo, J.* Nonlinear bending analysis of functionally graded plates and shallow shells / Woo, J. & Meguid, S. A. // Int.J.Solid and Structures, 2001. – 38. – pp. 7409-7421

4. *Reddy, J.N.* Analysis of functionally graded material // Int J Numer Meth. Eng., 2000. – 47. – pp. 663-684

5. *Touloukian Y. S.* Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. MacMilan, New York, 1967.

6. *Yang, J.* Non-linear analysis of functionally graded plates under transverse and in-plane loads / Yang, J. & Shen, H.-S. // Int.J.Nonlinear Mech., 2003. – 38. – pp. 467-482

7. *Praveen, G.N.* Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plates/ Praveen, GN. & Reddy, JN. // Int.J.Solid and Structures, 1998. – 35. – pp. 4457-4476

8. *Shen, H.-S.* Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments // Int.J. Mech.Sci., 2002. – 44. – pp. 561-584

9. *Shen, H.-S.* Functionally Graded Materials, Nonlinear Analysis of Plates and Shells. CRC Press, Florida, 2009. – 268 pp.

10. *Kasi A.* Ispol'zovanie sigmoidal'noj funkcii pri reshenii zadach nelinejnogo cilindricheskogo izgiba plastin iz funkcional'no-gradientnogo materiala / A. Kasi, K. Bahti, H. Hebali, A. Tounsi // PRIKLADNAJA MEHANIKA I TEHNICHESKAYA FIZIKA 2013. – T. 54. – N1. – С. 143 – 15.

11. *Manish Bhandari* Static Response of Functionally Graded Material Plate under Transverse Load for Varying Aspect Ratio / Manish Bhandari and Kamlesh // Int. J. of Metals Volume 2014, Article ID 980563, 11 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/980563>

12. *Da-Guang Zhang* Nonlinear bending analysis of FGM elliptical plates resting on two-parameter elastic foundations // Applied Mathematical Modelling, 2013. – 37. – pp. 8292-8309.

13. *Rvachev V. L.* Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija / V. L. Rvachev – K.: Naukova dumka, 1982. – 552 s.

14. *Awrejcewicz, J.* Investigating geometrically nonlinear vibrations of laminated shallow shells with layers of variable thickness via the R-functions theory/ Kurpa, L. & Shmatko, T. // Int.J.Composite Structures, 2015. – V. 125. – pp. 575–585.

15. *Awrejcewicz, J.* Linear and nonlinear free vibration analysis of laminated functionally graded shallow shells with complex plan form and different boundary conditions / Kurpa, L., Shmatko, T. // J. Non-Linear Mech. 107, 2018, pp161–169.

16. *Tetyana Shmatko* Dynamic analysis of functionally graded sandwich shells resting on elastic foundations / Tetyana Shmatko, Lidiya Kurpa, Jan Awrejcewicz // Acta Mech, <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03200-y>

17. *Kurpa L.V.* The R-functions method used to solve nonlinear bending problems for orthotropic shallow shells on elastic foundations / Kurpa L. V., Lybitska, K. I. & Morachkovskaya, I. O. // Int J.Applied Mech., 2010. – 6. – pp. 660-668.

18. *L. V. Kurpa.* Investigation of free vibration and stability of functionally graded three-layers plates by using the R-function theory and variational methods / L. V. Kurpa, T. V. Shmatko // Int J. of Mathematical Sciences, Vol. 249, No. 3, September, 2020, <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04955-2>

19. *Petrov V.V.* Metod posledovatel'nyh nagruzenij v nelinejnoj teorii plastin i obolochek / Petrov V.V. – Saratov, 1975. – 119 s.

20. *Grigorenko Ja.M.* Reshenie nelinejnyh zadach teorii obolochek na JeVM. / Grigorenko Ja.M., Mukoed A.P. – Kiev: Vishha shkola, 1983. – 286 s.

Надійшла (received) 1.09.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Курпа Лідія Василівна (Kurpa Lidiya Vasильевна, Kurpa Lidiya) – доктор технічних наук, професор кафедри прикладної математики НТУ «ХП», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: kurpalidia@gmail.com. ORCID: 0000-0001-8380-1521

Любицька Катерина Ігорівна (Lyubitskaya Ekaterina Igorevna, Liubyt'ska Kateryna) – кандидат технічних наук, доцент кафедри прикладної математики НТУ «ХП»; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: lyubitska@gmail.com.

Лінник Ганна Борисівна (Linnik Anna Borisovna, Linnik Anna) – кандидат технічних наук, професор кафедри прикладної математики НТУ «ХП», тел.: (057) 707-60-32; e-mail: linnik2105@gmail.com. ORCID: 0000-0003-4227-3210

Морачковська Ірина Олегівна (Morachkovskaya Irina Olegovna, Morachkovska Iryna) – Національний технічний університет «ХП», доцент кафедри прикладної математики НТУ «ХП»; тел.: (057) 707-60-32; e-mail: i.morachkovska@gmail.com.