

С. І. ПОВАЛЯЄВ, А. С. ШАРАПАТА, Є. Г. ЯНЮТІН

ВПЛИВ НА БАЛКУ КІНЦЕВОЇ ДОВЖИНИ РУХОМОЇ МАСИ

У цій роботі розглянуто розв'язання прямої задачі про деформування ізотропної, пружної, шарнірно-опертої балки кінцевої довжини. На балку діє каток, що рухається із постійною швидкістю вздовж осі балки. Каток має циліндричну форму певного радіуса і довжину, яка більше або дорівнює ширині балки. Рух балки моделюється на основі теорії С. П. Тимошенко. Описано постановку задачі та умови взаємодії балки та катка. Проаналізовано диференціальні рівняння руху балки з точки зору впливу їх складових та особливо правих частин рівнянь на динамічну поведінку балки у разі використання певних поширених матеріалів балки і катка та запропоновано варіант зведення рівнянь до більш спрощеного виду. Невідомі функції, що входять до рівнянь, шукаються у вигляді рядів Фур'є. Це дозволяє звести вихідні рівняння до звичайних диференціальних рівнянь, які розв'язуються з використанням перетворення Лапласа. Вирази для коефіцієнтів у рядах Фур'є знаходяться з використанням операційного обчислення та теорії лишків. Результати першого чисельного експерименту з дослідження впливу швидкості руху катка на прогини балки представлені у вигляді кривих на рисунку. Для конкретної розрахункової механічної системи у вигляді сталевго катка, який рухається по сталевій балці з постійною швидкістю при нульових початкових умовах, результати дослідження представлені у вигляді графіків прогинів балки для різних швидкостей руху катка. Другий чисельний експеримент проводився для дослідження розповсюдження коливних хвиль балки у разі руху катка на досить високій швидкості. Для цього на рисунку наведені суміщені форми балки і положення катка в різні моменти дії рухомої маси. Проаналізовано поведінку балки на високій швидкості переміщення катка і проведено порівняння прогинів балки з прогинами статичної моделі балки. Намічено подальші напрямки розвитку задачі у прикладних галузях техніки та у обернених задачах з ідентифікації невідомих параметрів за непрямими проявами.

Ключові слова: балка, ряди Фур'є, перетворення Лапласа, теорія лишків, рухома маса, функціонал.

В данной работе рассмотрено решение прямой задачи о деформировании изотропной, упругой, шарнирно-опертой балки конечной длины. На балку действует двигающийся вдоль оси балки с постоянной скоростью каток. Каток имеет цилиндрическую форму определенного радиуса и длину, которая больше или равна ширине балки. Движение балки моделируется на основе теории С. П. Тимошенко. Описана постановка задачи и условия взаимодействия балки и катка. Проанализированы дифференциальные уравнения движения балки с точки зрения влияния их составляющих и особенно правых частей уравнений на динамическое поведение балки при использовании определенных распространенных материалов балки и катка и предложен вариант приведения уравнений к более упрощенному виду. Незвестные функции, входящие в уравнения, ищутся в виде рядов Фурье. Это позволяет свести исходные уравнения к обычным дифференциальным уравнениям, которые решаются с использованием преобразования Лапласа. Выражения для коэффициентов в рядах Фурье находятся с использованием операционного исчисления и теории вычетов. Результаты первого численного эксперимента по исследованию влияния скорости движения катка на прогибы балки представлены в виде кривых на рисунке. Для конкретной расчетной механической системы в виде стального катка, который движется по стальной балке с постоянной скоростью при нулевых начальных условиях, результаты исследования представлены в виде графиков прогибов балки для разных скоростей движения катка. Второй численный эксперимент проводился для исследования распространения волн колебаний балки при движении катка на достаточно высокой скорости. Для этого на рисунке приведены совмещенные формы балки и положения катка в разные моменты действия подвижной массы. Проанализировано поведение балки на высокой скорости перемещения катка и проведено сравнение прогибов балки с прогибами статической модели балки. Намечены дальнейшие направления развития задачи в прикладных отраслях техники и в обратных задачах по идентификации неизвестных параметров по косвенным проявлениям.

Ключевые слова: балка, ряды Фурье, преобразование Лапласа, теория вычетов, подвижная масса, функционал.

There have been considered solving direct problem of deforming of isotropic, elastic and hingedly supported beam of finite length. A roller moving at a constant speed along the axis of the beam acts on the beam. The roller has a cylindrical shape of a certain radius and a length that is greater than or equal to the width of the beam. The differential equations of beam motion are analyzed from the point of view of the influence of their components and especially the right-hand parts of the equations on the dynamic behavior of the beam in the case of using certain common materials of the beam and roller, and an option to reduce the equations to a more simplified form is proposed. The unknown functions included in the equations are sought in the form of Fourier series. This allows us to reduce the original equations to ordinary differential equations, which are solved using the Laplace transform. Expressions for coefficients in Fourier series are found using operational calculus and the residue theory. The results of the first numerical experiment on the study of the influence of the roller speed on beam deflections are presented in the form of curves in the figure. For a specific calculated mechanical system in the form of a steel roller, which moves along a steel beam at a constant speed under zero initial conditions, the research results are presented in the form of graphs of beam deflections for different speeds of the roller. The second numerical experiment was carried out to study the propagation of vibrational waves of the beam in the case of motion of the roller at a sufficiently high speed. For this, the figure shows the combined shapes of the beam and the position of the roller at different moments of action of the moving mass. The behavior of the beam at a high speed of movement of the roller was analyzed and a comparison of the deflections of the beam with the deflections of the static model of the beam was made. Further directions for the development of the problem in applied fields of technology and in inverse problems of identifying unknown parameters by indirect manifestations are outlined.

Keywords: beam, Fourier series, Laplace transform, residue theory, moving mass, functional.

Вступ. Різноманітність та чисельність прикладних проблем і завдань у науці, природі та техніці настільки велика, що розв'язання прямих завдань і зараз не втрачає своєї актуальності. Розв'язання таких задач дозволяє не тільки досліджувати поведінку елементів конструкцій на основі аналізу їх параметрів, але і послужити часто початком для розгляду більш цікавих і складних задач з точки зору механіки та математики в прикладній та

фундаментальній областях. До таких задач, наприклад, можна віднести задачі ідентифікації параметрів механічних систем, що розглядаються, за різними непрямими їх проявами, задачі управління напружено-деформівним станом, задачі оптимізації та ін.

Аналіз публікацій. Елементи конструкцій у вигляді балок широко поширені у будівництві, машинобудуванні та інших галузях народного

господарства. Вченими розглянуто багато прямих завдань, але інтерес до них не знижується. Найвідоміший спеціаліст у галузі механіки деформованого твердого тіла С. П. Тимошенко [1] розглянув велику кількість прямих задач [2] про деформування елементів конструкцій у вигляді стрижнів та балок, серед яких розглянуті задачі про рух уздовж балки зосередженої сили з постійною швидкістю в рамках класичної теорії та рух гармонійної сили. На відміну від С. П. Тимошенко нами розглядається задача руху маси на підставі моделі С. П. Тимошенко, яка враховує поперечний зсув та інерцію обертання нормального елемента балки.

У монографії [4] розв'язуються задачі про коливання різних механічних систем, що деформуються, в тому числі і балок, при імпульсних і рухливих інерційних навантаженнях. Для розв'язання задач застосовується метод розчленування механічних систем на складові елементи із запровадженням сил взаємодії з наступним розв'язанням задачі сполучення. Цей метод дозволяє розглядати системи з односторонніми та двосторонніми зв'язками між складовими елементами. При аналізі багатьох завдань у монографії застосовувалися ідеї, з вичерпною повнотою розвинені А. П. Філіпповим, який зробив великий внесок у дослідження нестационарних процесів НДС механічних систем.

У монографії [5] викладені прикладні розділи сучасної математики з наближених, числових та машинних методів розв'язання інтегральних рівнянь, що можуть описувати різноманітні дослідницькі, інженерні і проектні задачі.

У роботі [6] отримано розв'язання обернених задач на основі теорії С. П. Тимошенко щодо визначення точки застосування ударного навантаження до балки та її закону зміни у часі за експериментальними даними, а також ідентифікації невідомих параметрів деформованих систем типу "балка-маса".

У роботі [7] запропоновані уточнення для моделі пружної основи Вінклера-Цимермана для розрахунку балок на нелокально пружній основі.

Розв'язок оберненої задачі з визначення координати дефекту і параметра, що містить його глибину і довжину у балкових елементах отримано у роботі [8].

Відновлення нестационарних динамічних навантажень з розв'язанням прямих і обернених задач запропоновано у статтях [9-15].

Мета даної роботи розробити методіку розв'язання прямої задачі щодо визначення динамічного деформування пружної, ізотропної, шарнірно обертої балки кінцевої довжини при русі по ній маси з постійною швидкістю у вигляді катка згідно теорії С. П. Тимошенко.

Постановка задачі. Розглядається ізотропна балка скінченної довжини l , яка закріплена в точках (шарнірне опираювання). Балка описується рівняннями теорії С. П. Тимошенко.

Уздовж довжини балки, починаючи з її лівого торця, з постійною швидкістю V рухається каток, який передбачається абсолютно жорстким.

Довжина валика або дорівнює ширині балки, або трохи більша. Між балкою і рухомою масою (катком), величина якої дорівнює M , виникають реакції взаємодії: нормальна до верхньої лицьової поверхні балки, обумовлена вагою маси, тобто $M \cdot g$, де g прискорення вільного падіння, і сила тертя, яка дотична до верхньої лицьової поверхні балки і величина якої дорівнює силі тертя кочення, тобто $F_t = (f/R)Mg$, де f – коефіцієнт тертя кочення, а R – радіус катка.

З балкою зв'яжемо декартову систему координат x, y , де x – осьова координата, а y – нормальна до осі балки. Приймемо, що товщина балки дорівнює h . На рис. 1 показаний елемент балки з рухомою масою.

Деформування балки описується двома диференціальними рівняннями гіперболічного типу [2]:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k_s GF \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - I \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -F_t h \delta(x - V \cdot t), \\ -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_s GF \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= -Mg \delta(x - V \cdot t), \end{aligned} \quad (1)$$

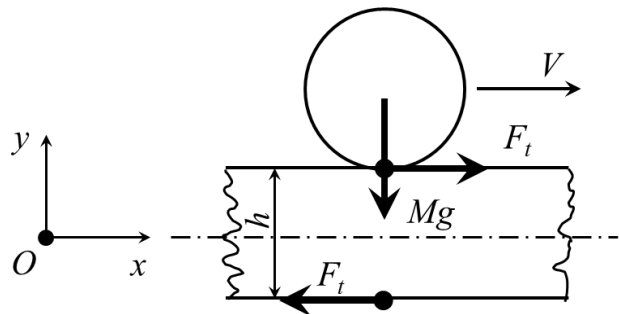


Рис. 1 – Схема навантаження балки

де ψ – кут нахилу дотичної до кривої вигину при нехтуванні зсувом;

k_s – коефіцієнт зсуву, що залежить від форми поперечного перерізу балки;

F – площа поперечного перерізу балки ($F = b \cdot h$ – варіант прямокутного поперечного перерізу балки);

G – модуль зсуву ($G = E/2(1+\nu)$);

EI – згинальна жорсткість.

Якщо поперечний переріз балки прямокутник, то $I = bh^3/12$, де b – ширина балки.

У рівняннях (1) $\delta(x - Vt)$ – дельта-функція Дірака аргументу $x - Vt$.

Метод розв'язання. Можна грубо проаналізувати систему рівнянь (1) за величиною модулів їх прямих частин. Наприклад, якщо сталевий каток рухається по сталевій балці, то коефіцієнт тертя кочення дорівнює $\approx 10^{-5}$ м. Якщо каток типу пневматичної шини рухається по асфальту (для фізично коректної постановки задачі приймемо, що в цьому випадку, балка лежить на пружній інерційній

основі), то $f \approx 10^{-4}$ м [3]. Величина вільних членів в рівняннях (1) в двох зазначених випадках істотно різна: у другому рівнянні його значення значно більше, ніж в першому. Іншими словами – слід очікувати в основному вплив на динамічну поведінку балки ваги рухомого катка (валика), а не сили тертя кочення.

На основі вказаного відзначимо, що по своїй постановці сформульована тут задача наближається до задач, коли розглядають лише вплив на балку зосередженої рухомої сили, а питання, що відносяться до врахування інших особливостей взаємодії балки з рухомою масою залишаються осторонь.

Зазначимо, що врахування взаємодії балки або пластини з рухомими масами детально обговорюється в роботі [4], причому там зазначається, що в принципі при розв'язанні такого роду задач бажано припускати не дотримання двостороннього контакту при переміщенні вантажу і поверхні балки під вантажем навіть при гладкій поверхні тіл, що взаємно переміщуються. Там же [4] вказується ще ряд причин, які слід враховувати при складному розв'язанні контактних задач для маси, що переміщується і напрямної переміщення.

Зазначимо, що тут допускається також значне спрощення в постановці задачі: виключений із розгляду механізм, що визначає інерційні властивості маси M при поперечних коливаннях балки. Крім того припускаємо, що в першому рівнянні в (1) права частина дорівнює нулю.

Доповнюємо рівняння (1) системою граничних і початкових умов

$$\begin{aligned} w(0,t) = w(\ell,t) = 0, \\ \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\ell,t)}{\partial x} = 0, \\ w(x,0) = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = \psi(x,0) = \frac{\partial \psi(x,0)}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Функції $w(x,t)$ і $\psi(x,t)$, які входять в (1) (за умови $F_t = 0$), будемо шукати з використанням рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin \frac{k\pi x}{\ell}, \\ \psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \cos \frac{k\pi x}{\ell}, \end{aligned} \quad (3)$$

Здійснюємо підстановку розвинень (3) в рівняння (1), а потім врахуємо умови ортогональності для тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \int_0^{\ell} \cos \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{k_1\pi x}{\ell} dx =, \\ \int_0^{\ell} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \sin \frac{k_1\pi x}{\ell} dx = \begin{cases} 0, k_1 \neq n \\ l/2, k_1 = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Після виконання зазначеної операції на основі рівнянь (1) отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь (за змінною t) для функцій $w_k(t)$ і $\psi_k(t)$ наступного виду (крім того введемо такі постійні $a = \sqrt{k_s G / \rho}$; $b_0 = \sqrt{k_s G F / \rho I}$; $c = \sqrt{E / \rho}$; $\lambda_k = k\pi / \ell$; $\beta_k = \lambda_k V$):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_k(t)}{dt^2} + (b_0^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k(t) - b_0^2 \lambda_k w_k(t) = 0, \\ \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + a^2 \lambda_k^2 w_k(t) - a^2 \lambda_k \psi_k(t) = \frac{2}{\rho F l} M g \sin \beta_k t. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язання системи (5) будемо шукати за допомогою перетворення Лапласа, приймаючи що $w_k^L(s) \rightarrow w_k(t)$; $\psi_k^L(s) \rightarrow \psi_k(t)$; $F_k^L(s) \rightarrow \frac{Mg}{\ell} \sin \beta_k t$.

При нульових початкових умовах систему (5) в просторі зображень можна записати так

$$\begin{aligned} (s^2 + b_0^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k^L(s) - b_0^2 \lambda_k w_k^L(s) = 0, \\ -a^2 \lambda_k \psi_k^L(s) + (s^2 + a^2 \lambda_k^2) w_k^L(s) = \frac{2}{\rho F l} M g \cdot \sin \beta_k t. \end{aligned} \quad (6)$$

Розв'язання алгебраїчних рівнянь (6) відносно величин $\psi_k(s)$ і $w_k(s)$ шукаємо за допомогою методу Крамера. Відзначимо, що основний визначник цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} s^2 + b_0^2 + c^2 \lambda_k^2 & -b_0^2 \lambda_k \\ -a^2 \lambda_k & s^2 + a^2 \lambda_k^2 \end{vmatrix} = \\ = s^4 + s^2 [(a^2 + c^2) \lambda_k^2 + b_0^2] + a^2 c^2 \lambda_k^4. \end{aligned} \quad (7)$$

Для виконання оберненого перетворення Лапласа необхідно знати корені рівняння $\Delta_k(s) = 0$. Чотири кореня (чисто уявних) цього рівняння будуть такі:

$$s_{1,2} = \pm i \omega_{1k}, \quad s_{3,4} = \pm i \omega_{2k}, \quad \text{де } i = \sqrt{-1}.$$

Прийmemo

$$\begin{aligned} \omega_{1,2,k}^2 = \frac{(a^2 + c^2) \lambda_k^2 + b_0^2 \pm D_k}{2}, \\ D_k = \sqrt{[(a^2 + c^2) \lambda_k^2 + b_0^2]^2 - 4a^2 c^2 \lambda_k^4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Якщо скористатися звичайними правилами операційного обчислення і теорією лишків, то на основі явних виразів для функцій $\psi_k^L(s)$ і $w_k^L(s)$ можна отримати такі вирази для коефіцієнтів $\psi_k(t)$ і $w_k(t)$:

$$\psi_k(t) = \frac{2b_0^2 \lambda_k}{\rho F l} M g \int_0^t \sin \beta_k \tau \left[\frac{\sin \omega_{1k}(t-\tau)}{\omega_{1k} D_k} + \right.$$

$$+ \frac{\sin \omega_{2k}(t-\tau)}{\omega_{2k} D_k} \Big] d\tau, \quad (9)$$

$$w_k(t) = \frac{2}{\rho F l} M g \int_0^t \sin \beta_k \tau \left(C_{1k} \sin \omega_{1k}(t-\tau) + C_{2k} \sin \omega_{2k}(t-\tau) \right) d\tau,$$

$$\text{де } C_{1,k} = \frac{b^2 + c^2 \lambda_k^2 - \omega_{1,k}^2}{-\omega_{1,k} D_k}, \quad C_{2,k} = \frac{b^2 + c^2 \lambda_k^2 - \omega_{2,k}^2}{\omega_{2,k} D_k}.$$

Відповідно вид розв'язання системи (1) для опису коливань балки при $F_t = 0$ для досліджуваного часового діапазону $0 \leq t < \infty$ визначається співвідношеннями (3), причому при $t < \frac{l}{V}$ треба використовувати формули (5). Якщо $t > \frac{l}{V}$ (маса катка зійшла з балки), необхідно розраховувати вільні коливання балки з початковими умовами в момент часу $t = \frac{l}{V}$.

Інтеграли, що входять у друге співвідношення (9) обчислюються елементарно, наприклад, з використанням відомої формули

$$\int \sin(a_1 \lambda + b_1) \sin(c_1 \lambda + d_1) d\lambda = \frac{\sin[(a_1 - c_1)\lambda + b_1 - d_1]}{2(a_1 - c_1)} - \frac{\sin[(a_1 + c_1)\lambda + b_1 + d_1]}{2(a_1 + c_1)} \quad [a_1^2 \neq c_1^2]. \quad (10)$$

В (10) a_1, b_1, c_1, d_1 – постійні, які відповідають величинам в (9).

Друга формула в (9) в розгорнутій формі запишеться в такий спосіб

$$w_k(x,t) = \frac{2}{\rho F l} M g \sum_{j=1}^2 C_{j,k} \left\{ \sin \omega_{jk} t \left[-\frac{\cos(\beta_k - \omega_{jk})t}{2(\beta_k - \omega_{jk})} + \frac{1}{2(\beta_k - \omega_{jk})} - \frac{\cos(\beta_k + \omega_{jk})t}{2(\beta_k + \omega_{jk})} + \frac{1}{2(\beta_k + \omega_{jk})} \right] - \cos \omega_{jk} t \left[\frac{\sin(\beta_k - \omega_{jk})t}{2(\beta_k - \omega_{jk})} - \frac{\sin(\beta_k + \omega_{jk})t}{2(\beta_k + \omega_{jk})} \right] \right\}. \quad (11)$$

Таким чином розрахувати поперечні коливання балки можна на основі першої формули з (3) і формули (11).

Результати. На рис. 2 показані функції $w(x, t)$, які розраховуються в точках балки за умови, що $h = 0.04$ м; $b = 0.04$ м; $l = 2$ м. Значення величини рухомої маси і швидкостей її руху: $M = 5$ кг, $V_1 = 0.25$ м/с, $V_2 = 100$ м/с, $V_3 = 200$ м/с, $V_4 = 300$ м/с, $V_5 = 600$ м/с, $V_6 = 1000$ м/с. Криві на рисунках відповідають навантаженню балки в точці $x = l/2$. Нумерація кривих співпадає з номерами швидкостей. Інші розрахункові

формули: $I = bh^3/12$, $F = b \cdot h$. Значення констант: $E = 2.06 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 0.795 \cdot 10^4$ кг/м³, $\nu = 0.3$, $k_s = 5/6$.

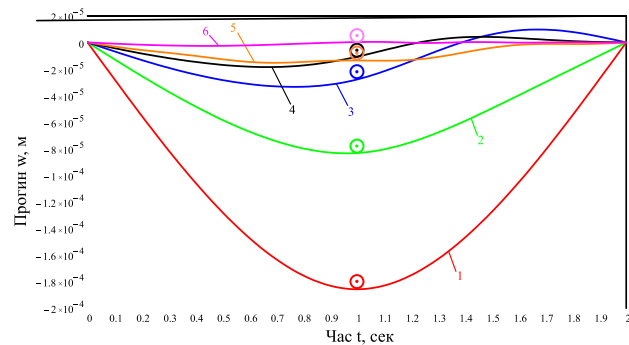


Рис. 2 – Прогини балки для різних швидкостей катка

На рис. 2 видно, що з збільшенням швидкості катка переміщення зменшуються в точці, що досліджується. Максимальне переміщення відповідає найменшій швидкості і добре апроксимується статичною моделлю навантаження.

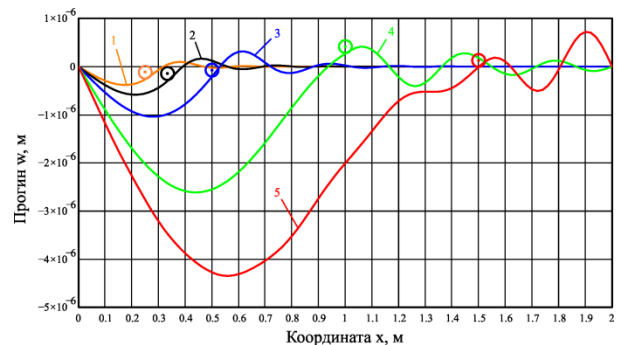


Рис. 3 – Прогини балки у різні моменти часу

На рис. 3 показані прогини балки в залежності від координати точки, що розглядається, уздовж осі балки у різні моменти положення катка. Швидкість руху катка постійна для всіх кривих і відповідає 1000 м/с. Крива 1 відповідає моменту часу, коли маса приймає положення $x_1 = (1/8)l$, крива 2 – $x_2 = (1/6)l$, крива 3 – $x_3 = (1/4)l$, крива 4 – $x_4 = (1/2)l$, крива 5 – $x_5 = (3/4)l$. На цьому рисунку крива 4 відповідає кривій 6 на рис. 2. На рис. 2 і 3 невелике коло з точкою у центрі умовно позначає положення катка уздовж осі балки з врахуванням її прогину.

Відзначимо, що подібна задача розглядалася в [2] для класичної моделі поведінки балки.

Висновки. Доцільність розгляду задачі (1), (2) можна ще пояснити і так: вона елементарно просто узагальнюється на випадок підпором балки лінійною одношаровою чи багатошаровою інерційною основою. У цьому випадку легко виконати моделювання механічної системи, яка розглядається як фрагмент дорожнього полотна типу асфальтового покриття з підсиленням різної товщини.

Також представлена задача (1), (2) може використовуватися при розв'язанні нескладних обернених задач, в яких невідомими є параметри M (вага рухомого навантаження) або V – швидкість руху маси. У цих випадках за допомогою простого

перебору значеннями M і V потрібно знайти мінімуми функціоналів при задані переміщення (наприклад з експерименту) в деякій точці балки x^* , тобто

$$\min(M) = \int_0^T (w_M(t) - w(x^*, t))^2 dt$$

або

$$\min(V) = \int_0^T (w_V(t) - w(x^*, t))^2 dt.$$

У наведених функціоналах $w_M(t)$ – функція переміщення, яка має місце для даного значення M і розраховується теоретично; $w_V(t)$ – аналогічна функція для прийнятого значення V . Величина T – довжина досліджуваного часового проміжку.

Обернені задачі зазначеного типу розглядалися, наприклад, в роботі [6].

Список літератури

1. Elishakoff I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory?. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 25(1), 97-116 (2020).
2. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука. 1959. – 440 с.
3. Гусев А. Ф. Лабораторный практикум. Трибология / А. Ф. Гусев, В. В. Измайлов, М. В. Новоселова. – Тверь: Тв. ГТУ, 2016. 32 с.
4. Кохманюк С. С. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках / С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин, Л. Г. Романенко. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с.
5. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
6. Егоров П. А. Интегральные уравнения Вольтерра в нестационарных задачах деформирования упругих элементов конструкций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, Харьков, 2016. – 170 с.
7. Потапов В. Д. К вопросу о расчете балок на нелокально упругом основании / В. Д. Потапов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – №4. – С. 63–68.
8. Khiem N. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies / N. T. Khiem, L. K. Toan. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2014. – V. 333, I. 18. – P. 4084-4103.
9. Янютин Е. Г. Восстановление динамических нагрузок, действующих на конические оболочки / Е. Г. Янютин, С. И. Поваляев // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2012. № 2. С. 218-224.
10. Воронай А. В. Применение теории интегральных уравнений Вольтерра при решении динамических обратных задач для пластин и оболочек / А. В. Воронай, С. И. Поваляев, А. С. Шарпата, Е. Г. Янютин. // *Вестник Харьковского национального университета. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. № 661. 2005. С. 69-82.
11. Егоров П. А. Відновлення функції зміни у часі навантажень, що діють на балкоподібні елементи конструкцій, за неточними вихідними даними / П. А. Егоров, А. С. Шарпата // *Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування SEUTTOO-2021*. – С. 234.
12. Воронай О. В. Исследование различных моделей дорожной конструкции при нестационарном нагружении / О. В. Воронай, С. И. Поваляев, В. Т. Гришакин // *Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета*. – 2011. – №. 55. – С. 25-31.
13. Янютин Е. Г. Идентификация параметров нестационарно колеблющейся системы «балка-масса» / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров

// *Вісник НТУ «ХП»*. – 2013. – № 54 (1027). – С. 207-213. – ISSN 2222-0631.

14. Воронай А. В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования нестационарных колебаний консольной балки / А. В. Воронай, Е. С. Малахов // *Наукові праці Міжнародної науково-практичної конференції «Автомобільний транспорт і автомобілебудування. Новітні технології і методи підготовки фахівців» 19-20 жовтня 2017 р. Х.: Вид-во «ХНАДУ»*. 2017. С. 225-226.

15. Гришакин В. Т. Идентификация импульсной нагрузки, воздействующей на вязко-упругую балку / В. Т. Гришакин // *Вісник НТУ «ХП»*. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2015. № 6 (1115). С. 22-29.

References (transliterated)

1. Elishakoff I. Who developed the so-called Timoshenko beam theory?. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2020, no. 25(1), pp. 97-116.
2. Timoshenko S. P. *Kolebanija v inzhenernom dele* [Vibration problems in engineering]. Moscow, Nauka Publ., 1959. 440 p.
3. Gusev A. F., Izmajlov V. V., Novoselova M. V. *Laboratornyj praktikum. Tribologija* [Laboratory practice. Tribology]. Tver, Tv. HTU, 2016. 32 p.
4. Kohmanjuk S. S., Janjutin E. G., Romanenko L. G. *Kolebanija deformiruemyh sistem pri impul'snyh i podviznyh zagruzkah* [Oscillations of deformable systems under impulse and moving loads]. Kiev, Naukova dumka, 1980, 232 p.
5. Verlan' A. F., Sizikov V. S. *Integral'nye uravnenija: metody, algoritmy, programmy* [Integral equations: methods, algorithms, programs]. Spravochnoe posobie. Kiev, Nauk. dumka, 1986, 544 p.
6. Egorov P. A. *Integral'nye uravnenija Vol'terra v nestacionarnyh zadachah deformirovanija uprugih jelementov konstrukcij* [Volterra integral equations in nonstationary problems of deformation of elastic structural elements]. [Thesis for the degree of candidate of technical sciences]. 2016, 170 p.
7. Potapov V. D. *K voprosu o raschete balok na nelokal'no uprugom osnovanii* [To the question of the calculation of beams on a non-locally elastic foundation]. *Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*. 2014, no. 4, pp. 63–68.
8. Khiem N. T. A novel method for crack detection in beam-like structures by measurements of natural frequencies. *Journal of Sound and Vibration*. 2014, vol. 333, no. I. 18, pp. 4084-4103.
9. Janjutin E. G., Povaljaev S. I. *Vosstanovlenie dinamiceskikh nagruzok, dejstvujushchih na konicheskie obolochki* [Recovery of dynamic loads acting on conical shells]. *Visnyk NTU "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Serija: "Matematiche modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah". Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2012, no. 2, pp. 218-224.
10. Voropaj A. V., Povaljaev S. I., Sharapata A. S., Janjutin E. G. *Primenenie teorii integral'nyh uravnenij Vol'terra pri reshenii dinamiceskikh obratnyh zadach dlja plastin i obolochek* [Application of the theory of Volterra integral equations in solving dynamic inverse problems for plates and shells]. // *Visnyk Har'kovskogo nacional'nogo universiteta. Serija «Matematiche modeljuvannja. Informacijni tehnologii. Avtomatizovani sistemi upravlinnja»*, 2005, no. 661, pp. 69-82.
11. Jegorov P. A., Sharapata A. S. *Vidnovlennja funkcij' zminy u chasi navantazhen', shho dijut' na balkopodibni elementy konstrukcij, za netochnymy vyhidnymy danymy* [Recovery of the function of changes in time of loads acting on beam-like elements of structures based on inaccurate initial data]. *Suchasni energetychni ustanovky na transporti, tehnologii' ta obladnannja dlja i'h obslugovuvannja SEUTTOO*, 2021, pp. 234.
12. Voropaj O. V., Povaljaev S. I., Grishakin V. T. *Issledovanie razlichnyh modelej dorozhnoj konstrukcii pri nestacionarnom nagruzenii* [Study of various models of road structure under non-stationary loading]. *Vestnik Har'kovskogo nacional'nogo avtomobil'no-dorozhnoho universiteta*, 2011, no. 55, pp. 25-31.
13. Janjutin E. G., Egorov P. A. *Identifikacija parametrov nestacionarno kolebljushhejsja sistemy «balka-massa»* [Identification of the parameters of a non-stationary oscillating "beam-mass" system]. *Visnyk NTU "KhPI"*, 2013, no. 54 (1027), pp. 207-213.
14. Voropaj A. V., Malahov E. S. *Primenenie integral'nyh uravnenij Vol'terra dlja modelirovanija nestacionarnyh kolebanij konsol'noj balki* [Application of Volterra integral equations for modeling

non-stationary vibrations of a cantilever beam]. Naukovi praci Mizhnarodnoi' naukovo-praktychnoi' konferencii' «Avtomobil'nyj transport i avtomobilebuduvannja. Novitni tehnologii' i metody pidgotovky fahivciv» 19-20 zhovtnja. Kharkov, Vyd-vo «HNADU» Publ., 2017, pp. 225-226.

15. Grishakin V. T. Identifikacija impul'snoj nagruzki, vozdejstvujushhej na vjazko-upruguju balku [Identification of an impulse load acting on a viscous-elastic beam]. *Visnyk NTU "KhPI" Kharkov, NTU "KhPI" Publ.*, 2015, no. 6 (1115), pp. 22-29.

Надійшла (received) 22.08.2022

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Поваляєв Сергій Іванович (Поваляев Сергей Иванович, Povalyaev Sergey Ivanovich) – кандидат технічних наук, заступник декана з навчальної роботи «Автомобільного факультету» Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, доцент кафедри деталей машин і ТММ, м. Харків; тел.: (097) 199-23-31; e-mail: Povalyaevsi@ukr.net. ORCID: 0000-0001-9027-0132

Шарапата Андрій Сергійович (Шарапата Андрей Сергеевич, Sharapata Andrii Sergeevich) – кандидат технічних наук, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, доцент кафедри деталей машин і ТММ; тел.: (095) 906-87-67; e-mail: phd.sharapata@gmail.com. ORCID: 0000-0003-0823-9262

Янютин Євген Григорович (Янютин Евгений Григорьевич, Yanyutin Yevgeniy Grigor'yevich) – доктор технічних наук, професор; тел.: (095) 906-87-67; e-mail: e.yanyutin@gmail.com.