

**Ю. М. АНДРЕЕВ**

### **РЕАЛИЗАЦИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АЛГОРИТМА ЛЕВЕНБЕРГА-МАРКВАРДА В ЗАДАЧАХ КАЛИБРОВКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ**

Рассмотрена известная задача калибровки произвольного робота-манипулятора, которая сформулирована в самом общем виде. Для решения прямой задачи кинематики предложено альтернативное способу Денавита-Хартенберга универсальное аналитическое описание кинематической схемы с учетом возможных погрешностей изготовления и сборки деталей робота. При этом предложено универсальное описание погрешностей ориентации осей шарнирных сочленений звеньев. На основе такого описания может быть проведено решение прямой и обратной задачи кинематики роботов как пространственных механизмов с учетом искажений размеров, положения осей сочленений и положений нулей углов их поворота. Задача калибровки манипуляторов сформулирована как задача метода наименьших квадратов. Получены аналитические формулы целевой функции метода наименьших квадратов для решения поставленной задачи. Путем аналитического дифференцирования с помощью специальной системы компьютерной алгебры КиДиМ получены выражения для вектора градиента и гессиана целевой функции для прямого алгоритма, алгоритмов Ньютона-Гаусса и Левенберга-Марквардта. Автоматически сгенерированы процедуры на языке C++ расчета элементов градиента и гессиана. На примере проектируемого углового 6-ти степенного робота-манипулятора приведены результаты моделирования решения задачи его калибровки, то есть определения 36-ти неизвестных угловых и линейных погрешностей. Проведено сравнение решения задачи калибровки для смоделированных 64 и 729 экспериментов, в которых обобщенные координаты – углы в сочленениях принимали значения  $\pm 90^\circ$  и  $-90^\circ$ ,  $0$ ,  $+90^\circ$ .

**Ключевые слова:** робототехника, роботы-манипуляторы, прямая и обратная задачи кинематики манипуляторов, задача калибровки манипулятора, метод Ньютона-Гаусса, метод Левенберга-Марквардта.

**Ю. М. АНДРЕЄВ**

### **РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ВИКОРИСТАННЯ АЛГОРИТМУ ЛЕВЕНБЕРГА-МАРКВАРДА В ЗАДАЧАХ КАЛІБРУВАННЯ РОБОТІВ-МАНІПУЛЯТОРІВ**

Розглянуто відоме завдання калібрування довільного робота-маніпулятора, яке сформульовано у найзагальнішому вигляді. Для вирішення прямої задачі кінематики запропоновано альтернативний спосіб Денавіта-Хартенберга універсальний аналітичний опис кінематичної схеми з урахуванням можливих похибок виготовлення та збирання деталей робота. При цьому запропоновано універсальний опис похибок орієнтації осей шарнірних зчленувань ланок. На основі такого опису може бути проведено рішення прямої та зворотної задачі кінематики роботів як просторових механізмів з урахуванням спотворень розмірів, положення осей зчленувань та положень нулів кутів їх повороту. Завдання калібрування маніпуляторів сформульовано як завдання методу найменших квадратів. Отримано аналітичні формули цільової функції методу найменших квадратів для вирішення поставленого завдання. Шляхом аналітичного диференціювання за допомогою спеціальної системи комп'ютерної алгебри КиДиМ отримані вирази для вектора градієнта та гесіана цільової функції прямого алгоритму, алгоритмів Ньютона-Гаусса і Левенберга-Марквардта. Автоматично згенеровані процедури мовою C++ розрахунку елементів градієнта та гесіана. На прикладі проєктованого кутового 6-ступеневого робота-маніпулятора наведено результати моделювання рішення задачі його калібрування, тобто визначення 36-ти невідомих кутових і лінійних похибок. Проведено порівняння розв'язання задачі калібрування для змодельованих 64 та 729 експериментів, у яких узагальнені координати – кути в зчленуваннях приймали значення  $\pm 90^\circ$  та  $-90^\circ$ ,  $0$ ,  $+90^\circ$ .

**Ключові слова:** робототехніка, роботи-маніпулятори, пряме та зворотне завдання кінематики маніпуляторів, завдання калібрування маніпулятора, метод Ньютона-Гаусса, метод Левенберга-Марквардта.

**Y. M. ANDREEV**

### **IMPLEMENTATION AND USE OF THE LEVENBERG-MARQUARD ALGORITHM IN THE PROBLEMS OF CALIBRATION OF MANIPULATOR ROBOTS**

The well-known problem of calibration of an arbitrary robotic manipulator, which is formulated in the most general form, is considered. To solve the direct problem of kinematics, an alternative to the Denavit-Hartenberg method, a universal analytical description of the kinematic scheme, taking into account possible errors in the manufacture and assembly of robot parts, is proposed. At the same time, a universal description of the errors in the orientation of the axes

of the articulated joints of the links is proposed. On the basis of such a description, the direct and inverse problem of kinematics of robots as spatial mechanisms can be solved, taking into account the distortions of dimensions, the position of the axes of the joints and the positions of the zeros of the angles of their rotation. The problem of calibration of manipulators is formulated as a problem of the least squares method. Analytical formulas of the objective function of the least squares method for solving the problem are obtained. Expressions for the gradient vector and the Hessian of the objective function for the direct algorithm, Newton-Gauss and Levenberg-Marquardt algorithms are obtained by analytical differentiation using a special computer algebra system KiDiM. The procedures in the C++ language for calculating the elements of the gradient and hessian are automatically generated. On the example of a projected angular 6-degree robot-manipulator, the results of modeling the solution to the problem of its calibration, that is, determination of 36 unknown angular and linear errors, are presented. A comparison is made of the solution of the calibration problem for simulated 64 and 729 experiments, in which the generalized coordinates - the angles in the joints took the values  $\pm 90^\circ$  and  $-90^\circ, 0, +90^\circ$ .

**Keywords:** robotics, robotic manipulators, direct and inverse problems of the kinematics of manipulators, the problem of calibration of the manipulator, Newton-Gauss method, Levenberg-Marquardt method.

**Введение.** Современные роботы-манипуляторы, служащие для автоматизации работ сварки, сборки, пайки, покраски и т.д. обладают точностью позиционирования рабочего инструмента порядка десятых и сотых долей миллиметра [1-8]. Достигнуть этого в условиях серийного их производства достаточно проблематично. Одним из решений проблемы повышения параметров позиционирования является решение так называемой задачи калибровки [2, 3, 5, 7, 8], когда для конкретного экземпляра робота-манипулятора путем обработки некоторого количества экспериментов, иногда достаточно большого, уточняются параметры кинематической модели. В результате формируется для данного экземпляра робота индивидуальная кинематическая модель, существенно более точная, чем стандартная [1-8]. При этом с течением времени в процессе эксплуатации такая процедура калибровки может повторяться. Для решения поставленной проблемы требуется создать методику проведения экспериментов и алгоритм их обработки. Для универсальности решения задачи необходимо иметь способ описания кинематической структуры решения прямой и обратной задачи кинематики пространственных моделей манипуляторов. В отличие от общепринятого описания моделей такого класса механических систем на основе метода Денавита-Хартенберга [10] здесь предлагается более общий метод, основанный на задании последовательности преобразований систем координат (СК) звеньев как смещений и поворотов [12-14]. При этом показано, как на этой основе решить прямую и обратную задачу кинематики пространственных манипуляторов. В отличие от традиционного подхода, использующего особенности данного типа роботов-манипуляторов [9, 11, 15], здесь осуществлено общее решение кинематических задач для пространственных механизмов. Задача калибровки здесь формулируется как задача метода наименьших квадратов. Поэтому приводится явный вид целевой функции и вид решений на основе методов Ньютона-Гаусса и Левенберга-Марквардта. Известную трудность для реализации таких методов представляет задача построения якобиана градиента целевой функции (се

гессиана). В результате эти матрицы строятся приближенно или используются модификации этих методов. Здесь, благодаря применению специальной системы компьютерной алгебры КиДиМ (ССКА КиДиМ) [12-13] удается полностью аналитически сформировать указанные матрицы, что максимально повышает возможности предлагаемого метода решения всей задачи калибровки

В связи с повышенным вниманием сейчас к задачам робототехники, в особенности к вопросам автоматизации решения таких задач, излагаемый в статье подход актуален и имеет научную и практическую ценность.

**Постановка задачи.** В статье исследуется применение разработанного и реализованного алгоритма решения задачи калибровки пространственных роботов-манипуляторов как задачи метода наименьших квадратов. Разберем здесь подробно такую постановку на примере углового 6-ти степенного робота-манипулятора датской компании Universal Robots (рис. 1).

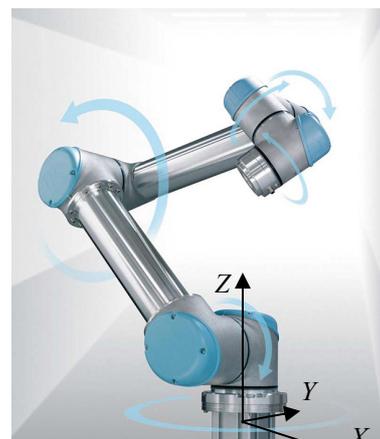


Рисунок 1 – Пример 6-ти углового манипулятора

1. **Сначала решим прямую задачу кинематики манипулятора:** по заданным законам изменения углов в сочленениях манипулятора найти законы изменения координат характерных точек механизма и

параметров, задающих ориентацию рабочего инструмента.

Эта задача легко решается в ССКА КиДиМ [12–14]. Для этого кинематическая модель манипулятора описывается с помощью специальной конструкции входного языка КиДиМ, называемой «твердое тело», основанной на простом описании последовательности поворотов и смещений связанных СК звеньев друг от друга [12–14]. Договоримся, на оси каждого шарнира выделять начальную точку, с которой связана СК этого шарнира, одна из осей которой совпадает с осью шарнира. В большинстве случаев это точки пересечения осей поворотов предыдущего и данного шарниров (хотя могут быть и смещения). В общем случае предполагаем, что имеют место смещения по всем трем осям.

Так, указанная на рис. 1 схема манипулятора описывается следующим образом:

G1 | Sx (X1), Sy (Y1), Sz (Z1), Rz (φ1);  
 G2~G1 | Sx (X2), Sy (Y2), Sz (Z2), Ry (φ2);  
 G3~G2 | Sx (X3), Sy (Y3), Sz (Z3), Ry (φ3);  
 G4~G3 | Sx (X4), Sy (Y4), Sz (Z4), Ry (φ4);  
 G5~G4 | Sx (X5), Sy (Y5), Sz (Z5), Rz (φ5);  
 G6~G5 | Sx (X6), Sy (Y6), Sz (Z6), Rx (φ6);

где G0, G1, ... G5 – имена звеньев механизма; '~' (тильда) означает, что положение СК звена, имя которого указано до этого знака, отсчитывается относительно СК звена, имя которого стоит после; '| ' – разделитель секций записи; Sx, Sy, Sz – обозначение смещений (на величины, указанные в скобках) СК звеньев вдоль соответствующих координатных осей; Rx, Ry, Rz – обозначение поворотов (на углы, указанные в скобках) СК звеньев вокруг соответствующих координатных осей.

**2. Учет в кинематической модели погрешностей изготовления деталей и сборки механизма.** Для задания искажений реального робота от идеальной модели надо задать погрешности в размерах звеньев и погрешности в исполнении осей поворотов шарниров и отсчетов их углов поворота. Погрешности в размерах звеньев легко задать в скобках выражений смещений (Sx, Sy, Sz). Для задания других указанных погрешностей можно использовать один угол – для указания нулевого положения шарнира и 2 угла – для искажений направления оси в пространстве. Эти 2 угла можно задать по ниже сформулированному правилу, использующему круговую перестановку индексов осей координат (X, Y, Z).

Если идти последовательно от стойки к схвату, то это правило можно сформулировать так:

При указанном выше выборе СК звеньев направление оси поворота шарниров близко к одной из координатных осей, поэтому ее положение в пространстве задается двумя последовательными малыми поворотами:

– первый – на малый угол  $\alpha$  вокруг оси, обозначенной предыдущей относительно данной в круговой перестановке осей,

– второй – на малый угол  $\beta$  вокруг оси, обозначенной последующей относительно данной в круговой перестановке осей

Например, ось OP – это ось близкая к оси x (рис. 2). Тогда ее направление в пространстве задается двумя поворотами – вокруг оси z (предыдущей по круговой перестановке) на угол  $\alpha$  и вокруг оси y (следующей по круговой перестановке) на угол  $-\beta$  («минус» говорит о направлении поворота, см. рис. 2).

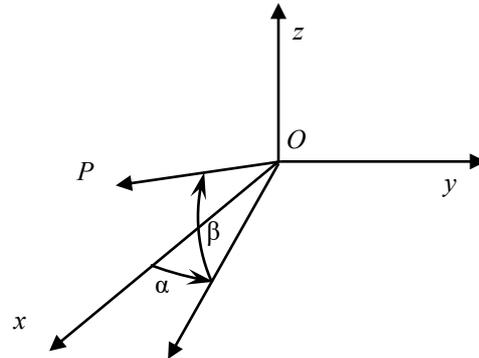


Рисунок 2 – Задание положения оси OP шарнира

Описание кинематической схемы манипулятора получит в результате такой вид:

G1 | Sx (X1+x1), Sy (Y1+y1), Sz (Z1+z1),  
 Ry (α1), Rx (β1), Rz (φ1+φ10);  
 G2~G1 | Sx (X2+x2), Sy (Y2+y2), Sz (Z2+z2),  
 Rx (α2), Rz (β2), Ry (φ2+φ20);  
 G3~G2 | Sx (X3+x3), Sy (Y3+y3), Sz (Z3+z3),  
 Rx (α3), Rz (β3), Ry (φ3+φ30);  
 G4~G3 | Sx (X4+x4), Sy (Y4+y4), Sz (Z4+z4),  
 Rx (α4), Rz (β4), Ry (φ4+φ40);  
 G5~G4 | Sx (X5+x5), Sy (Y5+y5), Sz (Z5+z5),  
 Ry (α5), Rx (β5), Rz (φ5+φ50);  
 G6~G5 | Sx (X6+x6), Sy (Y6+y6), Sz (Z6+z6),  
 Rz (α6), Ry (β6), Rx (φ6+φ60); ,

где x1, y1, ..., z6 – соответствующие искажения в размерах звеньев, α1, β1, ..., φ60 – угловые искажения модели, подлежащие определению в задаче калибровки.

ССКА КиДиМ по такому описанию строит в аналитическом (формульном) виде необходимые матрицы поворота и преобразования систем координат звеньев и формулы для требуемых в расчете координат точек механизма от времени, размеров звеньев и значений обобщенных координат системы (в данном случае – углов поворота звеньев относительно друг друга) и введенных параметров искажений модели [12, 13]. Эти выражения ССКА КиДиМ может продифференцировать и результат также получить в формульном виде, что понадобится нам в дальнейшем.

**Построение целевой функции метода наименьших квадратов.** Предположим, что в каждом эксперименте будем выставлять углы в шарнирах и определять только координаты  $X_T, Y_T, Z_T$  конца рабочего инструмента (TCP), который жестко

зафиксирован в последнем звене манипулятора – схвате. Обозначим:  $X_{Te}, Y_{Te}, Z_{Te}$  – конкретные значения координат этой точки в экспериментах;  $\mathbf{s} = \{X_i, Y_i, Z_i\}_{i=1,2,\dots,6}$  – вектор известных размеров звеньев,  $\mathbf{p} = \{x_i, y_i, z_i, \alpha_i, \beta_i, \varphi_{i0}\}_{i=1,2,\dots,6}$  – вектор искомых искажений,  $\mathbf{q} = \{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots,6}$  – вектор обобщенных координат.

Координаты TCP однозначно выражаются через углы в сочленениях (обобщенные координаты модели манипулятора), размеры эффекторов и 36 искомых искажений – параметров модели

$$X_T = X_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{p}), Y_T = Y_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{p}), Z_T = Z_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (1)$$

Тогда сумма квадратов невязок координат этих точек относительно их конкретных значений в  $N$  экспериментах по всем  $N$  экспериментам и даст нам целевую функцию задачи калибровки, подлежащую минимизации путем варьирования параметров модели – компонент вектора  $\mathbf{p}$

$$S = \sum_{e=1}^N \left\{ \begin{aligned} & [X_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p}) - X_{Te}]^2 + \\ & [Y_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p}) - Y_{Te}]^2 + \\ & [Z_T(\mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p}) - Z_{Te}]^2 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $e$  – номер эксперимента,  $\mathbf{q}_e$  – значения обобщенных координат в этом эксперименте.

Это объясняется тем, что при подстановке в выражение (2) точных значений искажений, оно будет равно нулю, т.е. примет минимальное значение.

Таким образом, минимизация целевой функции (2) на значениях компонент вектора  $\mathbf{p}$  даст решение поставленной задачи.

### Методы минимизации целевой функции (2).

Переобозначим для краткости

$$\xi_1 = X_T, \xi_2 = Y_T, \xi_3 = Z_T, \xi_{1e} = X_{Te}, \xi_{2e} = Y_{Te}, \xi_{3e} = Z_{Te}.$$

Для минимизации функции (2), очевидно, надо потребовать, чтобы ее градиент (половина градиента) был равен нулю, то есть

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^3 \left[ (\xi_j \{ \mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p} \} - \xi_{je}) \frac{\partial \xi_j}{\partial p_1} \right] \\ \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^3 \left[ (\xi_j \{ \mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p} \} - \xi_{je}) \frac{\partial \xi_j}{\partial p_2} \right] \\ \dots \\ \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^3 \left[ (\xi_j \{ \mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p} \} - \xi_{je}) \frac{\partial \xi_j}{\partial p_{36}} \right] \end{bmatrix} = 0. \quad (3)$$

Для решения задачи определения параметров вектора  $\mathbf{p}$  предложено и опробовано 3 метода.

**Прямой метод.** Если бы в выражения (3) искомые параметры входили бы линейно (что, кстати, имеет место для параметров  $\{x_j, y_j, z_j\}, j = \overline{1,6}$ ), то выражения (3) представляли бы собой систему

линейных уравнений. Однако, параметры  $\{\varphi_{j0}, \alpha_j, \beta_j\}, j = \overline{1,6}$  входят в эти выражения как аргументы синусов и косинусов, т.е. нелинейно.

Из физической сущности поставленной задачи следует, что эти параметры малы, поэтому выражения  $\xi_j \{ \mathbf{q}_e, \mathbf{p} \} |_{j=\overline{1,3}}$  легко линеаризуются

$$\xi_j \{ \mathbf{q}_e, \mathbf{p} \} = \xi_j \{ \mathbf{q}_e, 0 \} + \frac{\partial \xi_j \{ \mathbf{q}_e, 0 \}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p}, j = \overline{1,3}. \quad (4)$$

После подстановки выражений (4) в уравнения (3) получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицей левой части

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\} = \left\{ \sum_{e=1}^N \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_j} \right] \right\}_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_e, \mathbf{p}=0}$$

и вектором правой

$$\mathbf{B} = \{b_i\} = \left\{ \sum_{e=1}^N \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \xi_k(\mathbf{q}_e, 0)}{\partial p_i} (\xi_{ke} - \xi_k(\mathbf{q}_e, 0)) \right\}.$$

Во многих задачах такой метод продуктивен. Но в нашем случае, к сожалению, матрица  $\mathbf{A}$  – особенная и получить решение выше такой СЛАУ не представляется возможным.

**Алгоритм Ньютона-Гаусса.** Этот метод, как известно [16], служит для решения нелинейных систем уравнений. Он, также, как и предыдущий метод, непосредственно не решает задачу минимизации функции (2). Вместо этого строится итерационный процесс нахождения вектора  $\mathbf{p}$  – решения системы (3). При этом за начальное приближение, естественно, принимается  $\mathbf{p}=0$ .

Для реализации метода Ньютона необходимо представить вектор-функцию (3) двумя членами ряда Тейлора

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$$

где  $\mathbf{p}_0$  – начальное приближение решения,  $\mathbf{U}_0$  – значение вектор-функции (3) при подстановке приближения  $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0$ , значения производной  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}}$  также

вычисляются при этом значении  $\mathbf{p}$ .

После приравнивания этого выражения нулю получаем СЛАУ для определения следующего приближения вектора  $\mathbf{p}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = -\mathbf{U}_0. \quad (5)$$

Таким образом, первое приближение вектора  $\mathbf{p}$  через начальное приближение  $\mathbf{p}_0$  можно записать

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} \right]^{-1} \mathbf{U}_0.$$

Но технологически удобнее решить СЛАУ (5) и потом найти новое приближение  $\mathbf{p}$ , чем находить обратную матрицу. Понятно, что после определения первого приближения для  $\mathbf{p}$  его можно использовать в качестве начального и искать следующее

приближение. И так до тех пор, пока либо разность  $\mathbf{p}-\mathbf{p}_0$ , либо вектор  $\mathbf{U}(\mathbf{p})$  не станут удовлетворительно малыми. Матрица левой части является гессианом функции  $S$  (2).

Несмотря на простоту логики метода, здесь скрывается проблема вычисления этой матрицы, связанная, прежде всего с тем, что элементы этой матрицы содержат вторые производные от координат  $TCP$  по искомым параметрам. Получить эти выражения вручную, да с учетом размерности вектора  $\mathbf{p}$  (36), при обычных подходах очень трудно. Однако с помощью, имеющейся в нашем распоряжении ССКА КиДиМ, эту матрицу можно построить аналитически и превратить в коды программ на языке C++, и использовать при построении соответствующих программ. Покажем, из каких выражений состоят компоненты гессиана функции  $S$ .

Из выражения (3) для градиента функции  $S$  следует, что при его дифференцировании по компонентам вектора  $\mathbf{p}$ , дифференцироваться будут не только сами координаты  $TCP$   $\xi_k\{\mathbf{q}_e, \mathbf{p}\}, k = \overline{1,3}$ , но и их производные по компонентам вектора  $\mathbf{p}$  –  $\frac{\partial \xi_k\{\mathbf{q}_e, \mathbf{p}\}}{\partial p_i}, i = \overline{1,36}, k = \overline{1,3}$ . Поэтому компоненты гессиана функции  $S$  получают выражения

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \left[ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial p_j} \right\}_{i,j=1,2,\dots,36} \right] = \left[ \left\{ \sum_{e=1}^N \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial \xi_k}{\partial p_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial p_j} + (\xi_k\{\bar{q}_e\} - \xi_{ke}) \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial p_i \partial p_j} \right] \right\}_{i,j=1,2,\dots,36} \right]$$

К сожалению, следует признать, что и в этом методе получаемая матрица  $\mathbf{H}$  СЛАУ (5) получается плохо обусловленной, поэтому изложенный метод также не пригоден для применения.

**Алгоритм Левенберга–Марквардта.** Алгоритм специально разработан для решения нелинейных задач метода наименьших квадратов в условиях плохой обусловленности гессиана целевой функции [16]. Он совмещает в себе алгоритм наискорейшего спуска (АНС) и рассмотренный выше алгоритм Ньютона (АН). Это обусловлено тем обстоятельством, что при начальном приближении, достаточно далеко от искомого решения АН сходится плохо, если, вообще сходится, и начинает сходиться только в непосредственной окрестности решения. Таким образом, его надо сначала привести в эту область. Наоборот, АНС хорошо сходится в достаточно далекой области и начинает сильно тормозиться в непосредственной близости от решения, т.к. он использует для определения направления движения градиент минимизируемой функции, который мал в окрестности решения и существенно больше при удалении от экстремума функции.

Как уже сказано, направление движения алгоритма из текущей точки определяется градиентом функции, который в нашем случае представляется выражениями (5). Так как мы ищем минимум

функции, то понятно, что двигаться надо в противоположном направлении. Поэтому напрашивается выбор шага по формуле  $\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{U}$ .

Однако, посчитанная по этой формуле величина может оказаться очень большой, поэтому шаг надо взять намного меньшим. Таким образом, приходим к формуле для шага изменения искомого вектора в виде

$$\Delta \mathbf{p} = -\mu \mathbf{U}, \quad (6)$$

где  $\mu$  – малая величина, принимаемая в районе 0,05.

Из формулы (5) следует, что в алгоритме Ньютона-Гаусса приращение  $\Delta \mathbf{p}$  искомого вектора на каждом шаге находится по формуле

$$\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{U}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{U}$  – вектор градиента, а  $\mathbf{H}$  – гессиан функции  $S$ .

Чтобы объединить оба подхода, отраженных в формулах (6) и (7), в алгоритме Левенберга–Марквардта предлагается следующая формула для определения текущего шага изменения вектора искомого решения

$$(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{E}) \Delta \mathbf{p} = -\mathbf{U}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  – достаточно большое вначале число ( $\sim 10^4-10^7$ , а то и больше), которое уменьшается вместе ростом числа шагов алгоритма (например, в 2 раза на каждом шаге).

Из формулы (8) следует, что при достаточно большом  $\lambda$  алгоритм будет изменять искомый вектор  $\mathbf{p}$  по алгоритму наискорейшего спуска, а при  $\lambda \rightarrow 0$  – по алгоритму Ньютона-Гаусса.

**Результаты расчетов.** Для проведения расчетов по приведенным алгоритмам была взята схема и параметры проектируемого робота-манипулятора фирмы «Вертикаль» (Харьков). По понятным соображениям эти данные в статье не приводятся, да они и не представляют интерес для проектируемого в данный момент изделия.

Применение алгоритмов – прямого и Ньютона-Гаусса, как уже было сказано, не дало удовлетворительных результатов, поэтому остановимся на полученных итогах применения алгоритма Левенберга-Марквардта.

Опять-таки из-за отсутствия манипулятора «в железе» необходимо было получить «экспериментальные» данные, заключающиеся в «измеренных» декартовых координатах  $TCP$  для различных наборов значений углов манипулятора, параметры которого «слегка» отличаются от параметров идеального изделия. Таким образом алгоритм получения «экспериментальных» данных состоял в задании набора параметров искажений и расчете прямой задачи кинематики для различных значений углов в сочленениях координат  $TCP$ . Понятно, что таких «экспериментов» надо иметь больше, чем искомым искажений, т.е. 36.

Критерием достигнутой точности определения искомым параметров  $\mathbf{p}$  может являться значение целевой функции (2) или максимальное значение по всем экспериментам квадратных скобок в выражении

(2), или максимальный промах точки ТСП по всем экспериментам

$$dr = \max_{q_e} \sqrt{\sum_{k=1}^3 [\xi_k(\mathbf{s}, \mathbf{q}_e, \mathbf{p}) - \xi_{ke}]^2}. \quad (9)$$

В настоящий момент проведено 2 цикла описанных вычислительных экспериментов. В одном, для каждой обобщенной координаты принималось 3 различных значения:  $-90^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $+90^\circ$ . В результате получено 729 ( $3^6 = 729$ ) экспериментальных данных. В другом, для снижения числа экспериментов, принималось 2 различных значения:  $-90^\circ$ ,  $+90^\circ$ . В результате получено 64 ( $2^6 = 64$ ) экспериментальных данных. Далее изложим результаты обработки этих 64 экспериментов и сравним их с результатами обработки 729 экспериментов.

#### Результаты обработки 64-х экспериментов.

Для задания искомых параметров модели (2) Заказчиком были предоставлены границы возможных принимаемых ими значений (табл. 1)

Таблица 1. Максимальные значения искажений

№	Наименование эффектора	Линейное смещение, мм			Угловое смещение, °		
		x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\varphi$
1	Узел опорный	1	4	4	0,1	2	–
2	Узел плеча	5	0,2	0,2	2	1	–
3	Узел предплечья	1	0,5	0,5	0,5	1	–
4	Узел трубы	1	0,1	0,1	0,4	0,4	–
5	Узел кисти	0,2	0,2	0,2	0,2	0,5	–

Исходя из этого, были выбраны значения искомых параметров (табл. 2).

Таблица 2. Выбранные значения искажений модели

Подготовка контрольного примера						
Параметры модели						
$x_0$ , мм	$y_0$ , мм	$z_0$ , мм	$\alpha$ , °	$\beta$ , °	$d\varphi$ , °	
1,0	-4,0	4,0	-0,1	2,0	0,0	
-5,0	0,2	-0,2	2,0	-1,0	0,0	
1,0	-0,5	0,5	-0,5	1,0	0,0	
-1,0	0,1	-0,1	0,4	-0,4	0,0	
0,2	-0,2	0,2	-0,2	0,5	0,0	
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	

При этом значение каждой из обобщенных координат выбиралось из двух значений, как указано было выше,  $\pm 90^\circ$ . После 255 итераций (примерно 1 минута в системе Windows 10, тактовая частота процессора 2.4 ГГц, оперативная память 16 ГБ) процесс сошелся с такими параметрами точности:  $S=0,00136948 \text{ мм}^2$ ,  $dr_{\max}=0,00925792 \text{ мм}$ .

При этом значения искомых параметров оказались такими:

Таблица 3. Найденные значения искажений модели

Параметры модели		
$x_0$ , мм	$y_0$ , мм	$z_0$ , мм
1,003201	-3,935567	2,155353
-1,640260	-0,178680	1,637383
-0,072136	-0,047877	0,499525
-0,470408	-0,032643	-0,928372
-0,330464	-0,178078	0,304973
0,000003	-0,022364	-0,000000
$\alpha$ , °	$\beta$ , °	$d\varphi$ , °
-0,099997	1,999998	-1,088413
1,999701	0,087750	0,123342
-0,501489	0,999256	-0,385062
0,399990	-0,100156	-0,100232
-0,097675	0,499999	0,000029
0,000001	0,000031	-0,000001

Видно, что по большинству параметров наблюдается отличное совпадение, особенно учитывая достаточно далекое начальное приближение (в котором все компоненты вектора  $\mathbf{p}$  принимались равными нулю). Более важно здесь то, что максимальная ошибка в положении ТСП составляет  $dr_{\max} < 0,01 \text{ мм}$ !, а в начальной точке она составляла 107 мм (рис. 3). На рис. 4 показано, как изменяется значение целевой минимизируемой функции  $S$  (3). Ее значение меняется от 105000  $\text{мм}^2$  до 0,00137  $\text{мм}^2$ !

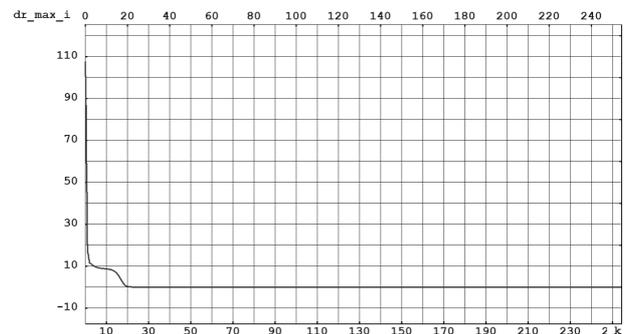


Рисунок 3 – Изменение максимального промаха положения ТСП по итерациям

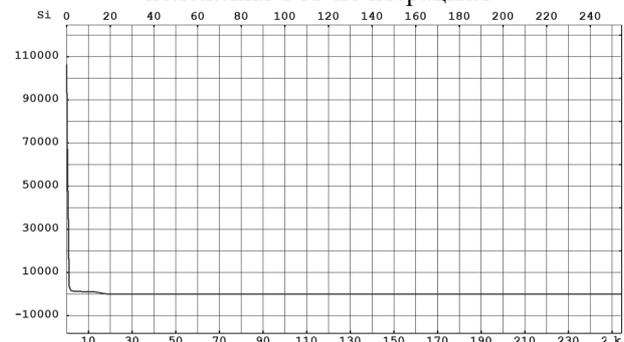


Рисунок 4 – Изменение величины целевой функции по итерациям

#### Результаты обработки 729-ти экспериментов.

Для сравнимости результатов были выбраны значения искажений модели, представленные в табл. 4.

При этом значение каждой из обобщенных координат выбиралось из трех значений, как указано было выше,  $-90^\circ$ ,  $0$ ,  $+90^\circ$ . После 138 итераций (примерно 6,5 минут в системе Windows 10, тактовая частота процессора 2.4 ГГц, оперативная память 16 ГБ) процесс сошелся с такими параметрами точности (рис. 4):  $S=0,012006 \text{ мм}^2$ ,  $dr_{\max}=0,0135854 \text{ мм}$ .

При этом значения искоемых параметров оказались такими:

Таблица 4. Найденные значения искажений модели

Параметры модели		
$x_0, \text{мм}$	$y_0, \text{мм}$	$z_0, \text{мм}$
1.003747	-3.934627	2.128593
-2.003381	-0.236565	1.661362
0.437453	0.009731	0.498752
-0.477468	-0.028630	-1.030497
-0.325433	-0.197773	0.342000
-0.000494	-0.002771	-0.000217
$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$d\varphi, ^\circ$
-0.100016	2.000002	-0.970694
1.999696	-0.029898	0.078661
-0.500782	0.999609	-0.380209
0.399991	-0.064598	-0.136131
-0.061527	0.500000	-0.000035
-0.000012	0.000058	-0.000001

На рис. 5 и 6 показано, как изменяется значение максимальной ошибки в положении ТСП и целевой минимизируемой функции  $S(3)$ , которые меняются от 149 мм до 0,013585 мм и от  $1,65_{106} \text{ мм}^2$  до  $0,012006 \text{ мм}^2$  соответственно!

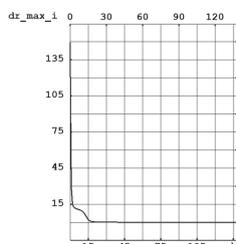


Рисунок 5. Изменение максимального промаха положения ТСП по итерациям

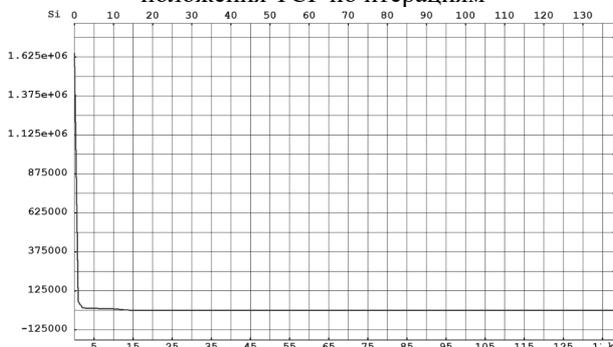


Рисунок 4 – Изменение величины целевой функции по итерациям

**Выводы.** Полученные результаты говорят об эквивалентности и удовлетворительности по точности использованных двух составов экспериментов

количеством 729 и 64. Ресурсные затраты на вычисления, естественно, предпочтительнее для 64-х экспериментов. Дальнейшее улучшение сходимости и повышения точности реализованного для решения задачи метода Левеберга-Марквардта связано с необходимостью анализа коэффициентов чувствительности промахов к искомым параметрам, благо, выражения для этих коэффициентов ССКА КиДиМ предоставляет не только в численном, но и в аналитическом виде.

Другим выводом является то, что по этим результатам проведенных численных экспериментов применение алгоритма Левеберга-Марквардта весьма продуктивно.

**Перспективы дальнейших исследований.** В данной работе рассмотрены 3 метода решения задачи калибровки роботов-манипуляторов как задачи метода наименьших квадратов. Из трех рассмотренных методов – прямого, Ньютона-Гаусса и Левеберга-Марквардта по-настоящему работоспособным оказался последний. Поэтому следует внедрять его для практического использования в программном обеспечении реальных манипуляторов. Дальнейшего исследования ждут вопросы влияния ошибок измерения координат ТСП в экспериментах и подбор наиболее информативных конфигураций манипулятора для эффективного определения параметров уточняющей модели.

#### Список литературы

1. Abderrahim, M. & Whittaker, A. R. (2000). Kinematic Model Identification of Industrial Manipulators, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 16, No. 1, February 2000, pp 1-8.
2. Gattringer H., Neubauer M., Kaserer D., Müller A. (2018) A Novel Method for Geometric Robot Calibration Using Laser Pointer and Cameras. In: Ferraresi C., Quaglia G. (eds) Advances in Service and Industrial Robotics. RAAD 2017. Mechanisms and Machine Science, vol 49. Springer, Cham.
3. Galta C.S, Lumia R, Wood J, Starr G (2007) An Automated Method to Calibrate Industrial Robots Using a Virtual Closed Kinematic Chain 3. Abderrahim, M. & Whittaker, A. R. (2000). Kinematic Model Identification of Industrial Manipulators, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 16, No. 1, February 2000, pp 1-8.
4. Cheng, S. F. (2007). The Method of Recovering TCP Positions in Industrial Robot Production Programs, Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, August 2007, pp. 805-810.
5. Veitschegger, W. K., & Wu, C. H. (1988). Robot Calibration and Compensation. IEEE Journal on Robotics and Automation, 4 vol. 4, no. 6, pp. 643-656, Dec. 1988, doi: 10.1109/56.9302.
6. Greenway, B. (2000). Robot Accuracy, Industrial Robot, Vol. 27, No. 4, 2000, pp 257-265.
7. Motta, J. M. S. T., Carvalho, G. C. and McMaster, R. S. (2001). Robot Calibration Using a 3-D Vision-Based Measurement System with a Single Camera, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Ed. Elsevier Science, U.K., Vol. 17, No. 6, pp. 457-467.
8. Roth, Z. S., Mooring, B. W. and Ravani, B. (1987). An Overview of Robot Calibration, IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3, No. 3, pp. 377-85.
9. Клевалин В.А., Поливанов А.Ю. Повышение точности роботов путем идентификации их геометрических параметров при помощи системы технического зрения. М.: Мехатроника, 2002. - №5. - С.10-14.
10. Denavit, J. & Hartenberg, R. S. (1955). Kinematic Modelling for Robot Calibration, Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, June 1955, pp. 215-221.

11. Жеребятъев К.В., Ивановский С.П., Жеребятъев Д.К. Решение прямой кинематической задачи для шестизвенного манипулятора универсального промышленного робота ПР125 // Мехатроника, автоматизация, управление, 2005. — №2. С.28-34.
12. Андреев Ю.М., Морачковский О.К. О динамике голономных систем твердых тел. Прикладная механика. 2005. Т. 41, №7. С. 130-138.
13. Андреев Ю.М., Морачковский О.К. Новая система компьютерной алгебры для исследования колебаний структурно-сложных голономных и неголономных систем твердых тел. Надежность и долговечность машин и сооружений: межд. науч.-техн. сб. НАН Украины. КИЕВ: ИПП им. Писаренко Г.С. Ассоц. «Надежность машин и сооружений». 2006. Вып. 26. С. 11-18.
14. Андреев Ю. М. Алгоритм компенсации возмущений ходьбы двуного робота решением обратной задачи кинематики. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2020. – № 2 (2020). – С. 14 –21.
15. Фу К., Гонсалес Р., Ли К. Робототехника. Москва: Мир, 1989. 621 с.
16. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: Пер. с англ.—М.: Мир, 1985—509 с., ил.
- References (transliterated)**
1. Abderrahim, M. & Whittaker, A. R. (2000). Kinematic Model Identification of Industrial Manipulators, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 16, No. 1, February 2000, pp 1-8.
2. Gattringer H., Neubauer M., Kaserer D., Müller A. (2018) A Novel Method for Geometric Robot Calibration Using Laser Pointer and Cameras. In: Ferraresi C., Quaglia G. (eds) Advances in Service and Industrial Robotics. RAAD 2017. Mechanisms and Machine Science, vol 49. Springer, Cham.
3. Galta CS, Lumia R, Wood J, Starr G (2007) An Automated Method to Calibrate Industrial Robots Using a Virtual Closed Kinematic Chain 3. Abderrahim, M. & Whittaker, A. R. (2000). Kinematic Model Identification of Industrial Manipulators, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 16, No. 1, February 2000, pp 1-8.
4. Cheng, S. F. (2007). The Method of Recovering TCP Positions in Industrial Robot Production Programs, Proceedings of 2007 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, August 2007, pp. 805-810.
5. Veitschegger, W. K., & Wu, C. H. (1988). Robot Calibration and Compensation. IEEE Journal on Robotics and Automation, 4 vol. 4, no. 6, pp. 643-656, Dec. 1988, doi: 10.1109/56.9302.
6. Greenway, B. (2000). Robot Accuracy, Industrial Robot, Vol. 27, No. 4, 2000, pp 257-265.
7. Motta, J. M. S. T., Carvalho, G. C. and McMaster, R. S. (2001). Robot Calibration Using a 3-D Vision-Based Measurement System with a Single Camera, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Ed. Elsevier Science, U.K., Vol. 17, No. 6, pp. 457-467.
8. Roth, Z. S., Mooring, B. W. and Ravani, B. (1987). An Overview of Robot Calibration, IEEE Journal of Robotics and Automation, RA-3, No. 3, pp. 377-85.
9. Klevalin V.A., Polivanov A.Yu. Povyishenie tochnosti robotov putem identifikatsii ih geometricheskikh parametrov pri pomoschi sistemy tehnicheskogo zreniya. M.: Mehatronika, 2002. - N5. - S.10-14.
10. Denavit, J. & Hartenberg, R. S. (1955). Kinematic Modelling for Robot Calibration, Trans. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, June 1955, pp. 215-221.
11. Zherybiatev K.V., Ivanovskiy S.P., Zherybiatev D.K. Reshenie pryamoy kinemacheskoy zadachi dlya shestizvennogo manipulyatora universalnogo promyshlennogo robota PR125 // Mehatronika, avtomatizatsiya, upravlenie, 2005. — №2. S.28-34.
12. Andreev Ju.M., Morachkovskij O.K. O dinamike golonomnyh sistem tverdyh tel. Prikladnaja mehanika. 2005. T. 41, №7. P. 130-138.
13. Andreev Ju. M., Morachkovskij O. K. Novaja sistema komp'juternoj algebry dlja issledovaniya kolebanij strukturno slozhnyh golonomnyh i negolonomnyh sistem tverdyh tel. Nadezhnost' i dolgovechnost' mashin i sooruzhenij: mezhdunar. nauch.-tehn. sbor. NAN Ukrainy. Kyviv: IPP im. Pisarenko G.S., Associacija «Nadezhnost' mashin i sooruzhenij». 2006. Vol. 26. P. 11-18.
14. Andreev Yu. M. Algoritm kompensatsii vozmuscheniy hodbyi dvnogo robota resheniem obratnoy zadachi kinematiki. Visnik NTU «HPI». Seriya: Dinamika ta mitsnlist mashin. – Harkiv : NTU «HPI», 2020. – # 2 (2020). – S. 14 –21.
15. Fu K., Gonsales R., Li K. Robototekhnika. Moscow: Mir, 1989. 621 p.
16. Gill. F., Mjurrej U., Rajt M. Prakticheskaja optimizacija: Per. s angl—M.: Mir, 1985—509 s., il.

Поступила (received) 30.11.2021

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Андреев Юрій Михайлович** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (067) 110-16-72; e-mail: [andrjejev@gmail.com](mailto:andrjejev@gmail.com).  
<https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>