

## СТАТИЧНИЙ АНАЛІЗ БАГАТО ОПОРНИХ ШПИНДЕЛЬНИХ ВАЛІВ НА НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ОПОРАХ

Шпиндельний вузол є вагомим компонентом станка, статичні та динамічні характеристики якого напряму визначають точність й стабільність процесу металообробки. Динамічний аналіз дозволяє визначити власні частоти і форми коливань, що допомагає усунути динамічну невривноваженість при роботі станка. Статичний аналіз потрібен для оцінки напружень, деформацій та переміщень, що грає важливу роль в забезпеченні ефективності і точності роботи станка.

В даній роботі запропоновано універсальний підхід і математична модель для статичного аналізу багато опорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах. На основі диференційного рівняння зігнутої осі балки Тимошенко отримана кінцева система рівнянь, яка враховує нелінійну залежність жорсткості підшипників від діючих на них зусиль. Запропоновано метод вирішення задачі і програмне забезпечення для статичного аналізу багато опорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах в середовищі MATLAB.

**Ключові слова:** шпиндельний вал, нелінійно пружна опора, багато опорний, нелінійна жорсткість, балка Тимошенко.

Шпиндельный узел является важным компонентом станка, статические и динамические характеристики которого напрямую определяют точность и стабильность процесса металлообработки. Динамический анализ позволяет определить собственные частоты и формы колебаний, что способствует предотвращению динамической неустойчивости при работе станка. Статический анализ необходим для оценки напряжений, деформаций и перемещений, что играет важную роль в обеспечении эффективности и точности работы станка.

В настоящей работе предложен универсальный подход и математическая модель для статического анализа многоопорных шпиндельных валов на нелинейно упругих опорах. На основе дифференциального уравнения изогнутой оси балки Тимошенко получена разрешающая система уравнений, учитывающая нелинейную зависимость жесткости подшипников от действующих на них усилий. Предложен метод решения задачи и разработано программное обеспечение для статического анализа многоопорных шпиндельных валов на нелинейно упругих опорах в среде MATLAB.

**Ключевые слова:** шпиндельный вал, нелинейно упругая опора, многоопорный, нелинейная жесткость, балка Тимошенко.

The spindle assembly is an important component of a cutting machine, the static and dynamic characteristics of which directly determine the accuracy and stability of the metalworking process. Modal analysis is used for the determination of natural frequencies and vibration modes, which helps to prevent dynamic instability during machine operation. Static analysis is essential for evaluating stresses, strains and displacements, which play an important role in ensuring the efficiency and accuracy of the machine tool.

In this paper a mathematical model and computational tool are developed for the static analysis of multi-bearing spindle shafts with nonlinear elastic supports. Based on the Timoshenko beam theory a resolving system of equations is obtained that takes into account the nonlinear dependence of the bearing stiffness on the reaction forces acting upon them. A solution method is proposed and appropriate software is developed that implements the static analysis of multi-support spindle shafts with non-linearly elastic bearings in MATLAB environment

Key words: spindle, shaft, nonlinear elastic support, multi-bearing, nonlinear elastic stiffness, Timoshenko beam.

**Вступ.** У сучасних багатоцільових станках шпиндельні вузли обладнуються широкою гамою підшипників. При статичному аналізі роботи шпиндельних вузлів здебільшого визначають переміщення при згинанні у системі інструмент – шпиндельний вал на різних робочих режимах, по яких дається оцінка нормативної жорсткості вала. Визначаються також рівні напружень шпиндельного вала. Особливістю статичного аналізу шпиндельних валів є одночасне врахування жорсткості самого валу та жорсткості його опор.

**Аналіз літературних джерел і постановка проблеми.** В перших роботах, де було розглянуто цю проблему [1-4], автори пропонували сумували прогини вала шпинделя як балки на жорстких опорах з відхиленнями жорсткого вала на лінійно пружних опорах, що моделювали підшипники. При цьому розглядалися двоопорні розрахункові схеми, які не дозволяють з необхідною точністю врахувати вплив пружних характеристик опор з декількома поряд розташованими або багаторядними підшипниками. Зведення багатоопорних валів до двох опорної моделі за рахунок введення спеціальних коефіцієнтів себе не виправдало [3].

Безпосереднє врахування різноманітних конструктивних параметрів в статичному аналізі багато- опорних шпиндельних валів стає можливим з використанням чисельних методів, таких як метод

скінчених елементів (МСЕ) або метод початкових параметрів (МПП) [5-17]. Більш універсальний метод МСЕ потребує дороговартісних обчислювальних пакетів, значного часу на їх освоєння та експлуатацію. Перевага МПП полягає у тому, що у розрахунок можуть бути використані інтегральні характеристики системи, які визначаються з експерименту, наприклад коефіцієнти жорсткості та демпфування. Крім того кількість рівнянь МПП значно менша, ніж у МСЕ, то ж час вирішення задачі скорочується. Так, в роботі [17] запропоновано підхід до розрахунку переміщень багатоопорних шпиндельних валів на базі МПП з використанням диференційного рівняння деформованої осі балки на пружних опорах. Розрахунок здійснюється з використанням перехідних матриць.

Існуючі теоретичні підходи і програмне забезпечення по статичному аналізу багатоопорних шпиндельних валів не дозволяє враховувати множинні опори вала та ступень їх нелінійності.

Мета даної роботи – розробка універсального підходу, математичної моделі та програмного забезпечення для статичного аналізу багатоопорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах.

**Постановка задачі.** При розробці математичної моделі та розрахункової схеми у даній роботі були зроблені наступні припущення:

- шпindelний вал вважається пружною балкою Тимошенко постійного поперечного перерізу;
  - прогини та кути повороту перерізів балки вважаються малими;
  - радіальна (поперечна) жорсткість опор шпindelного вала має нелінійну характеристику, причому пружні властивості вала і його опор ізотропні в площині, ортогональній до осі обертання шпindelа (осесиметрична задача);
  - корпус шпindelного вузла, ріжучий клин та заготовка мають нескінченну жорсткість;
  - навантаження на шпindelний вал включає сили різання, зусилля з боку привода та реактивні сили від опор – підшипників;
  - гравітаційні та відцентрові сили вважаються малими, вплив температурних ефектів не враховується.
- В розрахунковій схемі багатоопорного шпindelного вала кожний підшипник є пружня сконцентрована опора з жорсткістю  $C_n$  і реакцією  $R_n$ ,  $n=1,2,\dots,N$  (рис.1).

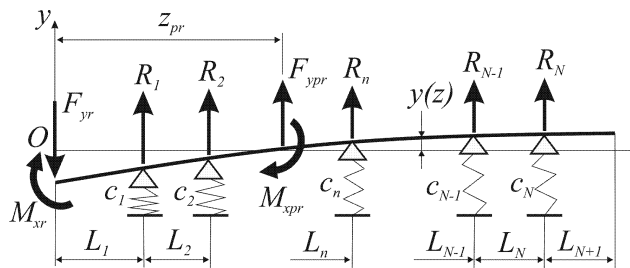


Рис.1. Розрахункова схема N опорного шпindelного вузла.

Окрім реакцій опор в площині згинання  $yOz$  вал навантажений зусиллям та моментом різання  $F_{yr}$ ,  $M_{xr}$  в перерізі  $z=0$ , а також зусиллям та моментом від привода  $F_{xpr}$ ,  $M_{xpr}$  в перерізі  $z=z_{pr}$ . Аналогічні зусилля можуть призводити до згинання і у ортогональній площині  $xOz$ .

**Метод рішення задачі.** В даній роботі використовується модель балки Тимошенко, де разом з деформаціями згину враховуються деформації зсуву, що актуально для багатоопорних валів, у яких жорсткості на згинання та зсув міжопорних ділянок співмірні. Диференційне рівняння зігнутої осі балки має вигляд [18]:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI} - \frac{K_t}{GA} \frac{dQ(z)}{dz} \quad (1)$$

де  $z$  – поточна координата,  $y(z)$  – функція прогину балки,  $E$  – модуль пружності,  $G$  – модуль зсуву,  $I, A$  – осьовий момент інерції та площа перерізу вала відповідно,  $M(z), Q(z)$ , – згинальний момент та поперечна сила відповідно в перерізі з координатою  $z$ ,  $K_t$  – коефіцієнт форми перерізу.

Рішення диференційного рівняння (1) методом початкових параметрів складається із загального

рішення однорідного рівняння та часткових рішень неоднорідних рівнянь для окремих ділянок вала. Загальне рішення має два постійних коефіцієнта  $y_0$  та  $\Theta_0$  (прогин та кут повороту на початку координат), часткові рішення залежать від зовнішніх зусиль, які формують праву частину диференційного рівняння і визначаються за допомогою універсальних функцій  $\Phi(z), \Phi^*(z)$ .

Для розрахункової схеми, що зображена на Рис.1, рішення рівняння (1) для прогинів та кутів повороту для  $i$ -тої ділянки вала виглядає наступним чином [17]:

$$y(z_i) = y_0 + \Theta_0 z_i + \frac{\Phi(z_i)}{EI},$$

$$\Theta(z_i) = \Theta_0 + \frac{\Phi^*(z_i)}{EI}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} L_j \leq z_i \leq \sum_{j=1}^i L_j, \quad (3)$$

де функції  $\Phi(z), \Phi^*(z)$ , мають вигляд

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & M_{px} \frac{z_i^2}{2} - F_{py} \frac{z_i^3}{6} + M_{pr} \frac{\delta^2(z_i)}{2} + F_{pry} \frac{\delta^3(z_i)}{6} \\ & + \sum_{j=1}^{i-1} R_j \left[ \frac{(z_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_j)^3}{6} - \frac{K_t EI}{GA} (z_i - \sum_{j=0}^{i-1} L_j) \right] \\ & + \frac{K_t EI}{GA} [F_{py} z_i - F_{pry} \delta(z_i)] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(z) = & M_{px} z_i - F_{py} \frac{z_i^2}{2} + M_{pr} \delta(z_i) \delta^*(z_i) \\ & + F_{pry} \frac{\delta^2(z_i)}{2} \delta^*(z_i) + \sum_{j=1}^{i-1} R_j \left[ \frac{(z_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_j)^2}{2} - \frac{K_t EI}{GA} \right] \\ & + \frac{K_t EI}{GA} [F_{py} - F_{pry} \delta^*(z_i)] \end{aligned} \quad (5)$$

Коефіцієнти  $\delta(z_i)$  та  $\delta^*(z_i)$  в формулах (4) та (5) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \text{if } z_i \leq z_{pr} : & \delta(z_i) = 0, \quad \delta^*(z_i) = 0, \\ \text{if } z_i > z_{pr} : & \delta(z_i) = z_i - z_{pr}, \quad \delta^*(z_i) = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Прогин вала  $y_n$  на опорі з номером  $n$  зв'язаний з реакцією  $R_n$  та її жорсткістю  $C_n$  співвідношенням:

$$y_n = y(z_n) = \frac{R_n}{C_n}; \quad z_n = \sum_{j=1}^n L_j, \quad (7)$$

що дає можливість записати умови сумісності на опорах у вигляді:

$$y_n = y_0 + \Theta_0 z_n + \frac{\Phi(z_n)}{EI} = -\frac{R_n}{C_n}, \quad n=1,2,\dots,N \quad (8)$$

До рівнянь (8) треба також додати умови статичної рівноваги сил відносно осі  $y$  та моментів відносно початку координат:

$$\sum_{n=1}^N R_n - F_{yp} + F_{ypr} = 0 \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^N (R_n \sum_{j=1}^n L_j) + F_{ypr} (\sum_{j=1}^{k-1} L_j + L_{1k}) - M_{xp} - M_{xpr} = 0 \quad (10)$$

Таким чином, маємо систему  $(N+2)$  алгебраїчних рівнянь (8), (9), (10) для визначення початкових параметрів  $y_0, \Theta_0$  та реактивних зусиль  $R_n, n=1,2,\dots,N$ .

Визначені величини дають можливість отримати прогин та кут повороту будь-якого перерізу вала з врахуванням податливості його опор, використовуючи вирази (2)-(5).

Відповідна доробка співвідношень (1)-(10) дає можливість врахування ступінчастої жорсткості вала, а також реактивних моментів, що виникають у деяких типах підшипників. Перехід від балки Тимошенко до моделі згинання Бернуллі здійснюється зануленням коефіцієнта форми перерізу  $K_f$ .

У рівняннях (8) випадок  $C_n = const$  відповідає пружно – лінійним опорам.

Жорсткість  $C_n$  (н/мм)  $n$ - ой опори нелінійно залежить від величини її реакції  $R_n$  і навпаки, що робить нелінійною систему рівнянь (8)-(10).

**Визначення жорсткості опор.** Аналіз літератури з розрахунку характеристик пружності підшипників кочення показує, що завдяки контактній взаємодії їх елементів жорсткість підшипників є суттєво нелінійною. Наявність технологічних зазорів та посадок підшипників на вал тільки підсилює характер нелінійності [19-24].

Так, в роботі [20] на основі рішення задачі контактної взаємодії пружного циліндра з криволінійним пружним напівпростором (задача Герца) була одержана наступна залежність деформації від зусилля в радіальному шариковому підшипнику:

$$\delta_r = 0,436 \cdot 10^{-3} \frac{Q_{\max}^{0,667}}{d^{0,333} \cos \alpha} \quad (11)$$

де  $\delta_r$  – абсолютна деформація підшипника в радіальному напрямку (зміна зовнішнього розміру),  $Q_{\max}$  – зусилля на найбільш навантажений шарик,  $d$  – діаметр шарика,  $\alpha$  – контактний кут ( $\alpha=0$  для радіального шарикопідшипника).

Вираз  $Q_{\max}$  для радіального та радіально упорного шарикопідшипника при відсутності зазору отримано в [20]:

$$Q_{\max} = \frac{4,37 F_r}{z \cdot \cos \alpha} \quad (12)$$

де  $F_r$  – радіальна сила, діюча на підшипник,  $z = mr$ ,  $m$  – кількість рядів шариків в підшипнику,  $r$  – число шариків в одному ряду.

З врахуванням (12) вираз для  $\delta_r$  набуває вигляд:

$$\delta_r = 1,27 \cdot 10^{-3} d^{-0,333} \cos \alpha^{-1,667} \left(\frac{F_r}{mr}\right)^{0,666} \quad (13)$$

На основі залежностей (12) та (13) нескладно отримати вирази «дотичної»  $C_n(R_n) = \frac{dR_n}{d\delta_r}$  та «сікучої»

жорсткості  $C_n(R_n) = \frac{R_n}{\delta_r}$  в заданій точці кривої  $R_n = R_n(\delta_r)$ . Загальний вигляд залежностей для радіальної «дотичної» та «сікучої» жорсткостей опори ( $F_r = R_n$ ) є такий:

$$C_n(R_n) = k \cdot (mr)^{0,666} d^{0,333} \cos \alpha^{1,667} R_n^{0,333} \quad (14)$$

де  $k$  – коефіцієнт, який у разі «дотичної» жорсткості дорівнює 1180, для «сікучої» – 787.

Аналогічні співвідношення можна отримати для інших типів підшипників. Наприклад, для роликів підшипників радіальна жорсткість має вигляд:

$$C_n(R_n) = k \cdot (mr)^{0,9} l^{0,8} R_n^{0,1}, \quad (14)$$

де  $m$  – кількість рядів роликів у підшипнику,  $r$  – кількість роликів у одному ряду,  $l$  – довжина ролика.

В (14)  $k = 4090$  для «дотичної» жорсткості,  $k = 3680$  – для «сікучої»

**Рішення системи рівнянь.** Для чисельної процедури систему рівнянь (8)-(10) слід представити у матричній формі:

$$Ax = b, \quad (15)$$

де  $A = [a_{ij}]_{(N+2) \times (N+2)}$  – матриця коефіцієнтів при невідомих,  $b = \{b_i\}_{N+2}$  – вектор правих частин,  $x = \{y_0, \Theta_0, R_1, R_2, \dots, R_N\}^T$  – вектор невідомих, який включає початкові параметри і реакції опор. Коефіцієнти матриці  $A$  та компоненти вектора  $b$  обчислюються за формулами:

$$\left. \begin{aligned} a_{n1} &= 1, a_{n2} = z_n, a_{nj} = \frac{1}{6EI} \left( \sum_{m=j-1}^n L_m \right)^3 - \\ &- \frac{K_f}{GA} \sum_{m=j-1}^n L_m, \quad j = 3, 4, \dots, n+1, \\ a_{nj} &= \frac{1}{C_n}, \quad j = n+2, a_{nj} = 0, \quad j > n+2, n = 1, 2, \dots, N, \\ a_{N+1j} &= a_{N+2j} = 0, \quad j = 1, 2, \\ a_{N+1j} &= 1, a_{N+2j} = \sum_{m=1}^{j-2} L_m, \quad j = 3, 4, \dots, N+2, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} b_n &= -\frac{\overline{\Phi(z_n)}}{6EI}, \quad n=1,2,\dots,N, \\ \overline{\Phi(z_n)} &= M_{xp} \frac{z_n^2}{2} - F_{yp} \frac{z_n^3}{6} + M_{xpr} \frac{\delta^2(z_n)}{2} \\ &+ F_{ypr} \frac{\delta^3(z_n)}{6} + \frac{K_t EI}{GA} [F_{yp} z_n - F_{ypr} \delta(z_n)], \\ b_{N+1} &= F_{yp} - F_{ypr}, \quad b_{N+2} = M_{xp} + M_{xpr} - F_{ypr} z_{pr}. \end{aligned} \right\} (17)$$

а значення  $z_n$  та  $\delta(z_n)$  знаходяться за формулами (7) та (6) відповідно.

Для врахування не лінійності при рішенні системи рівнянь (8)-(10) можливо використання методу послідовних ітерацій (МПІ), або методу послідовного навантаження (МПН).

При використанні МПІ:

1. Задається початковий набір жорсткостей опор  $C_{n0}$ ,  $n=1,2,3\dots N$ .

2. Вирішується система лінійних рівнянь (8)-(10) і визначається початковий набір реактивних зусиль  $R_{n1}$ ,  $n=1,2,3\dots N$ .

3. По відповідним співвідношенням для  $C_n(R_n)$  обчислюється новий набір жорсткостей опор  $C_{n1}$ ,  $n=1,2,3\dots N$ .

4. З рішення системи (8)-(10) визначається новий набір реактивних зусиль  $R_{n2}$ ,  $n=1,2,3\dots N$ .

5. Пункти 3 та 4 виконуються доти, поки не буде виконаний критерій збіжності рішення по величинам жорсткостей або/та реактивних зусиль.

При використанні МПН:

1. Задається початковий набір достатньо малих жорсткостей опор  $C_{n0}$ ,  $n=1,2,3\dots N$ .

2. Задається достатньо малий крок збільшення зовнішніх сил  $\Delta F_{yr} = \Delta^* F_{yr \max}$ ,  $\Delta M_{xr} = \Delta^* M_{xr \max}$ ,  $\Delta F_{ypr} = \Delta^* F_{ypr \max}$ ,  $\Delta M_{xpr} = \Delta^* M_{xpr \max}$ .

де  $\Delta^*$  – мале число, яке визначає величину кроку.

3. На першому кроці ( $i=1$ ) з рішення системи рівнянь (8)-(10) уточнюються початкові жорсткості опор, що відповідають набору  $\Delta F_{yr}$ ,  $\Delta M_{xr}$ ,  $\Delta F_{ypr}$ ,  $\Delta M_{xpr}$ .

4. У подальшому, на кожному ( $i+1$ )-му кроці до рішення, отриманих на  $i$  му кроці додаються збільшення  $\Delta$  відповідних величин:

$$\begin{aligned} R_{ni+1} &= R_{ni} + \Delta R_{ni}, \quad n=1,2,\dots,N; \\ C_{n+1} &= k^* 10^4 z^{0,666} d^{0,333} R_{n+1} \\ \Delta F_{yri+1} &= F_{yri} + \Delta F_{yr}, \\ \Delta M_{xri+1} &= M_{xri} + \Delta M_{xr}, \\ \Delta F_{ypr+1} &= F_{ypr} + \Delta F_{ypr}, \\ \Delta M_{xpr+1} &= M_{xpr} + \Delta M_{xpr}. \end{aligned}$$

5. Розрахунки продовжуються до досягнення заданих максимальних значень зовнішніх зусиль  $F_{yr \max}$ ,  $M_{xr \max}$ ,  $F_{ypr \max}$ ,  $M_{xpr \max}$ .

6. На останньому кроці перевіряється критерій збіжності по величинам жорсткості або/та реактивних зусиль. Якщо необхідна точність не досягнута, зменшується розмір кроку  $\Delta^*$  і розрахунки поновлюються з пункту 3.

При значній кількості опор і врахування нелінійної жорсткості підшипників аналітичне рішення задачі (8)-(10) стає неможливим. Тому в даній роботі усі розрахунки проводились з використанням програмного забезпечення MATLAB.

**Результати тестових розрахунків.** Тестування запропонованого підходу проводилося на схемі двоопорного шпindelного вала, показаної на Рис. 2.

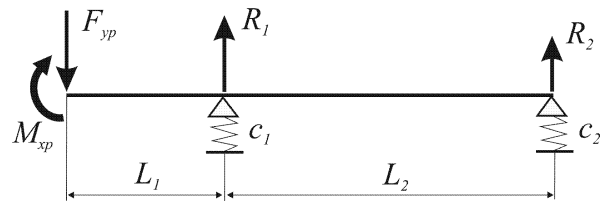


Рис. 2. Розрахункова схема шпindelного вала.

До вільного кінця вала прикладались поперечна сила та згинальний момент. Пружні опори вала – дворядні циліндричні роликпідшипники фірми SKF марки NN3020K з шириною 37мм. У кожному ряду підшипника встановлено 30 роликів довжиною по 11мм. Для такого вала в роботі [25] була отримана аналітична залежність прогину кінцевого перерізу вала від відстані між опорами. Розрахунки прогину в [25] проводилися при наступних вихідних даних. Початкові радіальні жорсткості підшипників, згідно каталогу фірми SKF, приймалися фіксованими і рівними  $C_1 = C_2 = 2.17 \cdot 10^6 \text{ H/мм}$ . Діаметр вала  $D = 100 \text{ мм}$ , довжина консольної частини  $L_1 = 90 \text{ мм}$ , зовнішнє навантаження  $F_{yp} = 2 \cdot 10^3 \text{ Н}$ ,  $M_{xp} = 6 \cdot 10^5 \text{ Нмм}$ , модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ H/мм}^2$ , модуль зсуву  $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ H/мм}^2$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,25$ , коефіцієнт форми перерізу  $K_t = 1,1$ .

Таблиця 1 - Прогини кінцевого перерізу вала.

Міжопорна відстань $L_2$ ,мм		100	200	300	400
Прогин $u_0$ ,мм	Модель роботи [25]	17,3	12,8	13,6	15,3
	МПІ, «дотична» жорсткість	16,2	12,6	13,5	15,2
	МПН, «сікуча» жорсткість	17,2	13,1	13,8	15,5
	МПН, «дотична» жорсткість	17,2	13,1	13,8	15,5
	МПН, «сікуча» жорсткість	18,4	13,5	14,1	15,7

В таблиці 1 наведені прогини кінцевого перерізу вала в залежності від міжопорної відстані  $L_2$ , отримані по аналітичній формулі [25] при незмінній жорсткості підшипників і за допомогою програмного забезпечення, зробленого в даній роботі. Різниця в результатах пов'язана з різницею у прийнятих моделях жорсткості опор. В роботі [25] жорсткість незмінна, а в даній роботі – нелінійно залежить від навантаження. Треба відзначити, що чисельні результати, отримані за допомогою МПІ та МПН є близькими, але МПІ краще працює з «сікучою» жорсткістю, а МПН – з «дотичною». Врахування нелінійної залежності жорсткості підшипників від навантаження дало змогу підвищити точність розрахунків на 3-5%.

#### Результати розрахунків багато опорного вала.

Дворядні та спарені підшипники мають значну ширину, тому їх фактичний контакт з валом важко назвати точковим. Тому заміна підшипника одною сконцентрованою опорою не є досить коректною. Запропонований в даній роботі підхід і програмне забезпечення дає змогу реалізувати скінчену кількість пружних опор, яка забезпечує необхідну точність розрахунків.

У розрахунковій схемі, поданій на Рис. 2, пружні опори – спарені радіальні однорядні шарикопідшипники марки 46120. Кожен підшипник має ширину  $b=24$ мм. У кожному з рядів підшипників встановлено 22 шарика з діаметром 15,08 мм. До вільного кінця вала прикладалося зовнішнє навантаження  $F_{yp} = 2 \cdot 10^3$  Н,  $M_{xp} = 6 \cdot 10^5$  Нмм.

Довжина консольної частини приймалась  $L_1 = 90$ мм, між опорна відстань  $L_2 = 200$ мм. Жорсткості шпинделя на згинання і зсув приймалися відповідно  $EI = 103 \cdot 10^{10}$  Нмм<sup>2</sup>,  $GA = 628 \cdot 10^6$  Нмм<sup>2</sup>.

Задача вирішувалась для чотирьох варіантів пружного обпирання вала:

1. По одній пружній опорі, розташованій посередині посадочних поверхонь кільця підшипників;
2. Дві опори, розташовані посеред доріжок кочення переднього підшипника і одна опора – посередині посадочної поверхні кільця заднього підшипника;
3. Чотири опори, розташовані з рівним кроком вздовж посадочної поверхні кільця переднього підшипника, і одна опора – посередині посадочної поверхні кільця заднього підшипника;
4. Чотири опори, розташовані з рівним кроком вздовж посадочної поверхні кільця переднього підшипника, і дві опори – посередині доріжок кочення заднього підшипника;

Жорсткість комбінації з декілька точкових опор  $C_i$ , які моделюють підшипник, призначалась з розрахунку сумування однакових паралельних жорсткостей, тобто  $C_\Sigma = \sum C_i$ , де  $C_\Sigma$  – жорсткість, яка визначається за формулою (14).

Для всіх варіантів розрахункових схем методами МПІ та МПН були проведені розрахунки по визначенню прогину  $y_0$ , кута повороту  $\Theta_0$  і опорних реакцій  $R_i$  з використанням різних моделей нелінійних жорсткостей опор. Результати розрахунків наведені в таблицях 2 та 3

Таблиця 2 - Результати моделювання пружного обпирання з «сікучою» жорсткістю МПІ.

	$y_0$ , мкм	$\Theta_0 \cdot 10^4$ , рад	$R_1$ , Н	$R_2$ , Н	$R_3$ , Н	$R_4$ , Н	$R_5$ , Н	$R_6$ , Н
Модель 1	48,1	3,17	7447	-5447				
Модель 2	46,9	3,11	4589	2710	-5300			
Модель 3	45,7	3,05	2650	2153	1347	1008	-5147	
Модель 4	45,4	3,02	2606	2126	1330	997	-1943	-3110

Таблиця 3 - Результати моделювання пружного обпирання з «дотичною» жорсткістю МПН.

	$y_0$ , мкм	$\Theta_0 \cdot 10^4$ , рад	$R_1$ , Н	$R_2$ , Н	$R_3$ , Н	$R_4$ , Н	$R_5$ , Н	$R_6$ , Н
Модель 1	48,2	3,18	7447	-5447				
Модель 2	47,3	3,13	4604	2694	-5297			
Модель 3	45,8	3,05	2650	2151	1343	998	-5144	
Модель 4	44,2	2,9	2608	2140	1385	1060	-2785	-2400

Наведені результати показують, що спарений підшипник передньої опори необхідно моделювати чотирма пружними опорами рівної жорсткості, що забезпечує підвищення точності розрахунків на 7%. Зростання кількості опор на контактній поверхні заднього підшипника не дає значного підвищення точності розрахунків (модель 4). Для багаторядних роликів підшипників великої жорсткості слід очікувати суттєвіший вплив моделі пружного обпирання на результати статичного аналізу.

Перевагою запропонованого підходу є можливість статичної оцінки жорсткості шпиндельних валів на нелінійних опорах в середовищі MATLAB, без застосування потужних програмних комплексів, таких як ANSYS.

#### Висновки.

В даній роботі був запропонований універсальний підхід та математична модель для статичного аналізу багатоопорних шпиндельних валів на нелінійно пружних опорах.

На основі диференційного рівняння зігнутої осі балки моделі Тимошенко у матричній формі отримана система нелінійних рівнянь, в яких жорсткість підшипників залежить від діючих на них зусиль.

Для розв'язання отриманої системи рівнянь застосовані методи послідовних ітерацій та послідовного навантаження.

Засобами пакету MATLAB розроблено програмне забезпечення, яке дозволяє за короткий проміжок часу провести повний статичний аналіз шпindelних валів з урахуванням нелінійної жорсткості їх опор.

Тестові розрахунки, проведені для двоопорного шпindelного вала, показали добру якість та кількісну близькість чисельних результатів до аналітичних даних.

Встановлено, що врахування кількості пружних опор на контактних поверхнях багаторядних підшипників підвищує точність розрахунків на 7-8%.

#### Список літератури:

1. Решетов Д. Н. Расчет валов (шпинделей) с учетом упругого взаимодействия их с опорами. М.: Mashgiz, 1939, 75с.
2. L. Lewinthal, "Machine Tool Spindle Applications", SKF Industries Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.
3. Зверев И.А., Самохвалов Е.Н., Левина З.М. Автоматизированные расчеты шпиндельных узлов // Станки и инструмент, 1984, №2, с.11-15.
4. K.J.H. Shareef, J.A. Brandon, "On the quasi-static design of machine tool spindles", Journal of Engineering Manufacture, vol. 204, 1990, pp. 91-104. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1990\\_204\\_052\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1990_204_052_02)
5. S. Yang, "A study of the static stiffness of machine tool spindles", Int. J. Mach. Tool Des. Res., vol. 21, 1981, pp. 23-40. [https://doi.org/10.1016/0020-7357\(81\)90011-1](https://doi.org/10.1016/0020-7357(81)90011-1)
6. Левина З.М., Зверев И.А. Расчет статических и динамических характеристик шпиндельных узлов методом конечных элементов // Станки и инструмент, 1986, №28, с.6-9.
7. Y. Cao, Y. Altintas, "A general method for the modelling of spindle-bearing systems", J. Mech. Des. Transactions of the ASME, vol. 126, 2007.
8. D. Liu, H. Zhang, Z. Tao, Y. Su, "Finite element analysis of high-speed motorized spindle based on ANSYS", The Open Mechanical Engineering Journal, vol. 5, 2011, pp. 1-10. <https://doi.org/10.2174/1874155X01105010001>
9. H. Sun, G. Yin, L. Mi, Y. Yin, "Study on the design and analysis of spindle system of NC machine tools based on digital design", Key Engineering Materials, vol. 522, 2012, pp. 668-672. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.522.668>
10. H. Cao, B. Li, Z. He, "Finite element model updating of machine-tool spindle systems", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, 2013. <https://doi.org/10.1115/1.4023045>
11. S. Shivakumar, A.N. Kallol, V. Khadakhavi, "Analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Sci. & Eng. Res., vol. 4(9), 2013, pp. 431-440.
12. A. Telang, "Static stiffness analysis of high frequency milling spindle", Int. J. Res. Eng. Tech. (IJRET), vol. 3(3), 2014, pp. 577-585. <https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0315108>
13. Hareesha, "Static and dynamic analysis of a CNC milling spindle", Int. Res. J. Eng. Tech. (IRJET), vol. 2(7), 2015, pp. 222-228.
14. N.L. Carutasu, "Virtual simulation for static behavior of the main spindle assembly of a horizontal drilling and milling CNC machining with a high-speed cutting", Annals of the ORADEA University, vol. XXV(XV), 2016. <https://doi.org/10.15660/AUOFMTE.2016-2.3250>
15. A. Anand, H. Roy, "Static and dynamic analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Appl. Eng. Res., vol. 13(9), 2018, pp. 6994-7000.
16. J. Premkumar, V.M. Kumar, K. Theenathayalan, "Design and analysis of boring bar using ANSYS", Int. J. Tech. Res. Eng. (IJTRE), vol. 5(11), 2018, pp. 4584-4587.
17. Чернявский П.М. Жесткость металлорежущих станков: Учебное пособие. М.: изд. МВТУ, 1969, 20с..
18. M.D. White, "Timoshenko beam theory with modelling applications", University of Waterloo, 1994.
19. Ковалев М.П., Народецкий М.З. Расчет высокоточных шарикоподшипников. М.: Машиностроение, 1975, 280с.
20. T.A. Harris, "Rolling bearing analysis", Wiley, 2001.
21. T. Hentati, F. Dammak, T. Fakhfakh, M. Haddar, "A finite element development for ball bearing nonlinear stiffness modelization", Int. J. Simul. Model., vol. 4(3), 2005, pp. 118-128. [https://doi.org/10.2507/IJSIMM04\(3\)2.046](https://doi.org/10.2507/IJSIMM04(3)2.046)
22. Y. Zhang, G. Sun, T.C. Lim, L. Xie, "A fast and reliable numerical method for analyzing loaded rolling element bearing displacement and stiffness", JVE Journal of Vibroengineering, vol. 17(2), 2015, pp. 620-642.
23. V.-C. Tong, S.-W. Hong, "Study of stiffness of cylindrical roller bearings under combined radial and moment loads", Int. J. Mech. Prod. Eng., vol. 5(1), 2017, pp. 28-31.
24. Фролов А.В., Смирнов С.В. моделирование квазистатической переменной жесткости шарикоподшипников шпиндельных узлов металлорежущих станков. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2018. №6, с.44-59.
25. Левиншал Л. Шпиндельные узлы для станков с высокоточными эксплуатационными характеристиками. М. SCF, 1992, 142с..

#### References (transliterated)

1. D.N. Reshetov, "Raschet valov (shpindelej) s uchedom uprugogo vzaimodejstviya ih s oporami", Mashgiz, 1939 (in Russian).
2. L. Lewinthal, "Machine Tool Spindle Applications", SKF Industries Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.
3. I.A. Zverev, E.I. Samohvalov, Z.M. Levina, "Avtomatizirovannye raschety shpindel'nyh uzlov", Stanki i instrument, №2, 1984, s. 11-15 (in Russian).
4. K.J.H. Shareef, J.A. Brandon, "On the quasi-static design of machine tool spindles", Journal of Engineering Manufacture, vol. 204, 1990, pp. 91-104. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1990\\_204\\_052\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1990_204_052_02)
5. S. Yang, "A study of the static stiffness of machine tool spindles", Int. J. Mach. Tool Des. Res., vol. 21, 1981, pp. 23-40. [https://doi.org/10.1016/0020-7357\(81\)90011-1](https://doi.org/10.1016/0020-7357(81)90011-1)
6. Z.M. Levina, I.A. Zverev, "Raschet sticheskih i dinamicheskikh harakteristik shpindel'nyh uzlov metodom konechnyh jelementov", Stanki i instrument, №8, 1986, s.6-9 (in Russian).
7. Y. Cao, Y. Altintas, "A general method for the modelling of spindle-bearing systems", J. Mech. Des. Transactions of the ASME, vol. 126, 2007.
8. D. Liu, H. Zhang, Z. Tao, Y. Su, "Finite element analysis of high-speed motorized spindle based on ANSYS", The Open Mechanical Engineering Journal, vol. 5, 2011, pp. 1-10. <https://doi.org/10.2174/1874155X01105010001>
9. H. Sun, G. Yin, L. Mi, Y. Yin, "Study on the design and analysis of spindle system of NC machine tools based on digital design", Key Engineering Materials, vol. 522, 2012, pp. 668-672. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.522.668>
10. H. Cao, B. Li, Z. He, "Finite element model updating of machine-tool spindle systems", Journal of Vibration and Acoustics, vol. 135, 2013. <https://doi.org/10.1115/1.4023045>
11. S. Shivakumar, A.N. Kallol, V. Khadakhavi, "Analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Sci. & Eng. Res., vol. 4(9), 2013, pp. 431-440.
12. A. Telang, "Static stiffness analysis of high frequency milling spindle", Int. J. Res. Eng. Tech. (IJRET), vol. 3(3), 2014, pp. 577-585. <https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0315108>
13. Hareesha, "Static and dynamic analysis of a CNC milling spindle", Int. Res. J. Eng. Tech. (IRJET), vol. 2(7), 2015, pp. 222-228.
14. N.L. Carutasu, "Virtual simulation for static behavior of the main spindle assembly of a horizontal drilling and milling CNC machining with a high-speed cutting", Annals of the ORADEA University, vol. XXV(XV), 2016. <https://doi.org/10.15660/AUOFMTE.2016-2.3250>
15. A. Anand, H. Roy, "Static and dynamic analysis of lathe spindle using ANSYS", Int. J. Appl. Eng. Res., vol. 13(9), 2018, pp. 6994-7000.
16. J. Premkumar, V.M. Kumar, K. Theenathayalan, "Design and analysis of boring bar using ANSYS", Int. J. Tech. Res. Eng. (IJTRE), vol. 5(11), 2018, pp. 4584-4587.
17. P.M. Chernjanskij, "Zhestkost' metallorzhushhih stankov", MVTU, 1969, 20s (in Russian).
18. M.D. White, "Timoshenko beam theory with modelling applications", University of Waterloo, 1994.
19. M.P. Kovalev, M.Z. Narodeckij, "Raschet vysokotochnyh sharikopodshipnikov", Mashinostrenie, 1975, 280 s (in Russian).
20. T.A. Harris, "Rolling bearing analysis", Wiley, 2001.

21. *T. Hentati, F. Dammak, T. Fakhfakh, M. Haddar*, "A finite element development for ball bearing nonlinear stiffness modelization", *Int. J. Simul. Model.*, vol. 4(3), 2005, pp. 118-128. [https://doi.org/10.2507/IJSIMM04\(3\)2.046](https://doi.org/10.2507/IJSIMM04(3)2.046)
22. *Y. Zhang, G. Sun, T.C. Lim, L. Xie*, "A fast and reliable numerical method for analyzing loaded rolling element bearing displacement and stiffness", *JVE Journal of Vibroengineering*, vol. 17(2), 2015, pp. 620-642.
23. *V.-C. Tong, S.-W. Hong*, "Study of stiffness of cylindrical roller bearings under combined radial and moment loads", *Int. J. Mech. Prod. Eng.*, vol. 5(1), 2017, pp. 28-31.
24. *A.V. Frolov, S.V. Smirnov*, "Modelirovanie kvazistaticheskoy peremennoy zhestkosti sharikopodshipnikov shpindel'nyh uzlov metallovezhushih stankov", *Verstnik MGTU imeni N.E. Baumana, Ser. Mashinostroenie*, №6, 2018, s. 44-59 (in Russian).
25. *L. Levinshal* "Shpindel'nye uzly dlja stankov s vysokotochnymi jekspluatacionnymi harakteristikami", *SCF*, 1992, 142 s (in Russian).

#### Відомості про авторів / About the Authors

**Хавін Валерій Львович, (Havin Valerij)** кандидат технічних наук, професор кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: [Valerij.Havin@khpi.edu.ua](mailto:Valerij.Havin@khpi.edu.ua) ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4827-6474>

**Киркач Олексій Борисович (Kyrkach Oleksiy)** ст. викладач кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-62-33; e-mail: [Oleksiy.Kyrkach@khpi.edu.ua](mailto:Oleksiy.Kyrkach@khpi.edu.ua) ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4594-557X>

**Киркач Борис Миколайович (Kyrkach Borys)** кандидат технічних наук, професор кафедри механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-62-33; e-mail: [Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua](mailto:Borys.Kyrkach@khpi.edu.ua) ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0432-1296>