

*В. Л. ХАВИН, І. П. ХАВИНА, С. Ю. ПОГОРІЛОВ*

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ДВОХОПОРНОГО ШПИНДЕЛЬНОГО ВАЛА НА НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИХ ОПОРАХ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЖОРСТКОСТІ**

Одним з основних конструктивних елементів металообробних верстатів є шпиндельний вузол (шпиндель), який служить для утримання ріжучих інструментів або заготовок. Жорсткість шпиндельного вузла грає визначальну роль в забезпеченні точності і ефективності роботи верстата в цілому. Оцінка жорсткості шпиндельного вала здійснюється на основі аналізу статичного вигину шпиндельного вала, що дозволило поставити і вирішити завдання оптимізації шпиндельного вала за характеристиками жорсткості для двоопорної конструкції на нелінійно пружних опорах. Для визначення жорсткості роликових підшипників в роботі використана залежність, отримана на основі рішення задачі контактної взаємодії пружного сталевго циліндра з криволінійними пружними сталевими півпростором. Для розглянутої розрахункової схеми в якості цілей оптимізації вибиралися умови найменшого переміщення кінцевого перерізу консолі шпиндельного вала, досягнення мінімального кута повороту в цьому перерізі або мінімуму їх нормованої суперпозиції, що забезпечує максимальну жорсткість в зоні обробки. Розглядалася також мінімізація кута повороту на передній опорі, що забезпечує максимальну довговічність підшипника. Математично задача представлена у формі мінімізації однієї з 4-х запропонованих цільових функцій за рахунок зміни варійованих параметрів - довжини консолі і величини міжопорної відстані, що подаються у вигляді безрозмірних величин - коефіцієнта консолі і коефіцієнта міжопорного відстані. В якості обмежень на варійовані параметри розглядалися мінімальні і максимальні значення довжини консолі і прольоту вала. Варіювання коефіцієнтами консолі і міжопорної відстані здійснювалося методом послідовного перебору в рамках заданих обмежень, вирішення завдань оптимізації представлено в графічному вигляді. Рішення задачі згину вала проведено на основі рівняння згинутої осі балки в рамках гіпотез Ейлера - Бернуллі і представлено в аналітичному вигляді спільно з аналітичними залежностями для розрахунку радіальної жорсткості роликового підшипника як функції діючого на нього опорного зусилля. Алгоритм рішення задач оптимізації реалізований в пакеті MatLAB. Оптимальні рішення показали, що мінімум комбінованої функції, що складається з суми відносних величин прогину на кінці консолі і кутів повороту на кінці консолі і на передній опорі досягається на тих же варійованих параметрах, що і мінімуми кутів повороту на кінці консолі і на передній опорі. Запропонований підхід до проектування валів шпиндельних вузлів металорізальних верстатів, оптимальних за характеристиками жорсткості, формує інструмент для обґрунтованого вибору підшипників і конструктивних параметрів шпиндельних валів.

**Ключові слова:** шпиндельний вал; характеристики жорсткості; нелінійно пружні опори; оптимізація.

*В. Л. ХАВИН, И. П. ХАВИНА, С. Ю. ПОГОРЕЛОВ*

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ДВУХ ОПОРНОГО ШПИНДЕЛЬНОГО ВАЛА НА НЕЛИНЕЙНО УПРУГИХ ОПОРАХ ПО ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЖЕСТКОСТИ**

Одним из основных конструктивных элементов, металлообрабатывающих станков является шпиндельный узел (шпиндель), который служит для удержания режущих инструментов или заготовок. Жесткость шпиндельного узла играет определяющую роль в обеспечении точности и эффективности работы станка в целом. Оценка жесткости шпиндельного вала осуществляется на основе анализа статического изгиба шпиндельного вала, что позволило поставить и решить задачи оптимизации шпиндельного вала по характеристикам жесткости для двух опорной конструкции на нелинейно упругих опорах. Для определения жесткости роликовых подшипников в работе использована зависимость, полученная на основе решения задачи контактного взаимодействия упругого стального цилиндра с криволинейными упругими стальными полупространствами. Для рассмотренной расчетной схемы в качестве целей оптимизации выбирались условия наименьшего перемещения концевого сечения консоли шпиндельного вала, достижение минимального угла поворота в этом сечении или минимума их нормированной суперпозиции, что обеспечивает максимальную жесткость в зоне обработки. Рассматривалась также минимизация угла поворота на передней опоре, что обеспечивает максимальную долговечность подшипника. Математически задача представлена в форме минимизации одной из 4-х предложенных целевых функций за счет изменения варьируемых параметров - длины консоли и величины межопорного расстояния, представляемых в виде безразмерных величин - коэффициента консоли и коэффициента межопорного расстояния. В качестве ограничений на варьируемые параметры рассматривались минимальные и максимальные значения длины консоли и пролета вала. Варьирование коэффициентами консоли и межопорного расстояния осуществлялось методом последовательного перебора в рамках заданных ограничений, решения задач оптимизации представлено в графическом виде. Решение задачи изгиба вала проведено на основе уравнения изогнутой оси балки в рамках гипотез Эйлера - Бернуллі и представлено в аналитическом виде совместно с аналитическими зависимостями для расчета радиальной жесткости роликового подшипника как функции действующего на него опорного усилия. Алгоритм решения задач оптимизации реализован в пакете MatLAB. Оптимальные решения показали, что минимум комбинированной функций, состоящей из суммы относительных величин прогиба на конце консоли и углов поворота на конце консоли и на передней опоре достигается на тех же варьируемых параметрах, что и минимумы углов поворота на конце консоли и на передней опоре. Предложенный подход к проектированию валов шпиндельных узлов металлорежущих станков, оптимальных по характеристикам жесткости, формирует инструмент для обоснованного выбора подшипников и конструктивных параметров шпиндельных валов.

**Ключевые слова:** шпиндельный вал; характеристики жесткости; нелинейно упругие опоры; оптимизация.

*V. L. KHAVIN, I. P. KHAVINA, S. Yu. POGORILOV*

## **OPTIMIZATION OF TWO SUPPORT SPINDLE SHAFT ON NONLINEAR ELASTIC SUPPORTS BY RIGIDITY CHARACTERISTICS**

One of the main structural elements of metalworking machines is the spindle assembly (spindle), which is used to hold cutting tools or workpieces. The rigidity of the spindle assembly plays a decisive role in ensuring the accuracy and efficiency of the machine as a whole. The assessment of the spindle shaft stiffness is carried out on the basis of the analysis of the static bending of the spindle shaft, which made it possible to formulate and solve the problems of optimizing the spindle shaft according to the stiffness characteristics for two supporting structures on nonlinear elastic supports. To determine the stiffness of roller bearings, the work uses the dependence obtained on the basis of solving the problem of contact

interaction of an elastic steel cylinder with curvilinear elastic steel half-spaces. For the considered design scheme, the optimization goals were chosen for the conditions of the smallest displacement of the end section of the spindle shaft console, the achievement of the minimum angle of rotation in this section or the minimum of their normalized superposition, which ensures maximum rigidity in the processing zone. Consideration has also been given to minimizing the swing angle at the front support to maximize bearing life. Mathematically, the problem is presented in the form of minimizing one of the 4 proposed objective functions by changing the variable parameters - the length of the cantilever and the value of the inter-support distance, represented as dimensionless quantities - the cantilever coefficient and the inter-support distance coefficient. Minimum and maximum values of the cantilever length and shaft span were considered as constraints on the variable parameters. Varying the console coefficients and the inter-support distance was carried out by the method of sequential enumeration within the specified constraints, the solution of optimization problems is presented in a graphical form. The solution to the problem of shaft bending was carried out on the basis of the equation of the bent axis of the beam in the framework of the Euler - Bernoulli hypotheses and presented in an analytical form together with analytical dependencies for calculating the radial stiffness of a roller bearing as a function of the supporting force acting on it. The algorithm for solving optimization problems is implemented in the MatLAB package. Optimal solutions have shown that the minimum of the combined functions, consisting of the sum of the relative deflection values at the end of the console and the angles of rotation at the end of the console and on the front support, is achieved at the same variable parameters as the minima of the angles of rotation at the end of the console and on the front support. The proposed approach to the design of the shafts of spindle units of metal-cutting machines, which are optimal in terms of rigidity characteristics, forms a tool for a reasonable choice of bearings and design parameters of spindle shafts.

**Key words:** spindle shaft; stiffness characteristics; nonlinear elastic supports; optimization.

**Вступ.** Одним з основних конструктивних елементів, що роблять істотний вплив на якість і ефективність металообробних верстатів є шпindelний вузол (шпindel). Шпindelні вузли мають вал, що спирається на підшипники, який, в свою чергу, спирається на корпус шпindelного вузла, закріпленого на верстаті. Шпindelні вали - це обертові приводні вали в шпindelних вузлах верстатів, які служать для утримання ріжучих інструментів або заготовок. Жорсткість шпindelного вузла грає визначальну роль в забезпеченні точності і ефективності роботи верстата в цілому. Переміщення кінця шпинделя в перерізі, де прикладені зусилля різання, безпосередньо пов'язані з точністю обробки і, разом з деформацією заготовки, визначають точність розмірів і форми деталі, що виготовляється. Переміщення кінця шпинделя в перерізі, де прикладені зусилля різання, безпосередньо пов'язані з точністю обробки і, разом з деформацією заготовки, визначають точність формованих розмірів і форми деталі, що виготовляється.

Оцінка переміщень шпindelного вала здійснюється на основі статичного аналізу конструкції шпindelного вала або вузла в цілому. Статичний аналіз - це розрахунок, який використовується для визначення переміщень, деформацій, напружень і внутрішніх зусиль в конструкціях шпindelних вузлів, що викликаються статичними зусиллями, що діють на конструкцію.

Рішення завдання статичного аналізу дозволяє поставити і вирішити задачу оптимізації шпindelного вала за характеристиками жорсткості, що є важливим чинником при розробці універсального верстатного обладнання.

У даній роботі предметом досліджень є постановка і рішення задачі оптимізації за характеристиками жорсткості двох опорного шпindelного вала на нелінійно пружних опорах

#### **Стан питання і невирішена частина проблеми.**

У піонерських роботах [1,2] був розроблений підхід до аналізу жорсткості шпindelного вала. Для статичного аналізу було запропоновано підсумувати прогини вала шпинделя як балки на жорстких опорах і відхилення жорсткого вала на лінійно пружних

опорах, що моделюють підшипники. Передбачається, що ступінчастий пружний вал закріплений в опорних пружних підшипниках. Внесок опорних підшипників шпинделя здійснюється шляхом введення опор - лінійних пружин. У дослідженні [2] також виявлено, що внесок деформацій зсуву залежить від співвідношення між довжиною вала шпинделя і його консольної частини, максимальний внесок деформацій зсуву склав 12%.

П.М. Чернянським [3] був запропонований підхід до розрахунку згинальних переміщень багатоопорних валів шпindelних вузлів, в основу якого було покладено наближене диференціальне рівняння зігнутої осі балки на пружних опорах.

В роботі [4] розглядається застосування методу скінченних елементів для статичного аналізу розрахункової схеми шпindelного вала у вигляді пружної балки (модель Тимошенко) на нелінійно - пружних опорах. Для оптимізації жорсткості конструкції розглядається мінімізація прогину поблизу точки різання. В роботі [5] на основі стрижневих моделей, що включають деформаційних, трибологічних і теплову складові, реалізований розрахунок шпindelних вузлів методом кінцевих елементів.

Однією з перших робіт з аналізу впливу основних конструктивних параметрів на жорсткість головного шпинделя верстата є робота [6]. У задачі аналізу загальні радіальні переміщення наведені у вигляді суми переміщення пружної двоступеневої балки на жорстких опорах і переміщення жорсткої балки на пружних опорах, що володіють лінійною і кутовою жорсткістю. Розрахункова схема навантажувати радіальної і осевої компонентами сили різання. В [7] представлено подібне дослідження впливу величини параметрів конструкції двох опорних шпindelів на їх сумарну жорсткість. Були побудовані графіки, які ілюстрували вплив відносини відстані між підшипниками на жорсткість шпинделя для опорних підшипників різної жорсткості. Зроблено висновок, що для дуже жорстких опорних підшипників оптимальна відстань між підшипниками стає коротшим, а при наявності довгого вильоту консолі жорсткість підшипників чинить менший вплив на жорсткість шпindelного вала.

В роботі [2] на додаток до статичного аналізу проведено оптимізацію прогину кінцевого перетину шпindelного вала. Оптимізація полягає у вивченні впливу параметрів конструкції шпindelа на результуючий прогин. Зроблено висновок, що в конструкції шпindelа існує оптимальна відстань між підшипниками і вильотом вала шпindelа. У міру того, як жорсткість при згині збільшується, а відношення жорсткості переднього і заднього підшипників зменшується, зменшується і оптимальна довжина консолі. Для забезпечення мінімальних значень прогину необхідно мати у валі більше 3-х ступенів різної жорсткості.

Огляд стану питання з аналізу статичної жорсткості і вибору оптимальних конструктивних параметрів шпindelних валів показує необхідність вдосконалення підходів до оптимізації шпindelних валів по характеристикам жорсткості.

**Постановка завдання оптимізації шпindelного вала за характеристиками жорсткості.** Основним фактором, що визначає якість шпindelного вузла, є рівень його жорсткості, а центральним розрахунком – розрахунок на жорсткість. Жорсткість шпindelного вузла (рівень переміщень) визначається вибором підшипників і геометрією шпindelного вала. Слід

вказати, що рівень переміщень кінцевого перерізу вала буде тим менше, чим менше довжина консолі, але це відстань має конструктивний мінімум. Також переміщення зменшуються з ростом діаметра вала. Але при використанні конструкції з високою компактністю розміри поперечного перерізу також обмежені і визначаються діаметром підшипників, який, як правило, вже стандартизовані за вантажопідйомністю.

З огляду на перелічені обмеження, збільшення жорсткості шпindelного вала можна здійснити за рахунок: - збільшення жорсткості підшипника; - вибору оптимального відношення конструктивних розмірів вала.

Оптимізація конструкції суцільного вала постійного поперечного перерізу діаметром  $D$  може бути здійснена за рахунок варіювання поруч конструктивних параметрів. Основними з цих параметрів для двох-опорного валу з консолю (рис.1) є [8]:  $K_a = a/D$  – коефіцієнт консолі;  $K_b = b/a$  – коефіцієнт міжопорної відстані;  $K_k = k_1/k_2$  – коефіцієнт жорсткості підшипників.

У наведених параметрах введені позначення:  $a$  – довжина консолі,  $b$  – довжина прольоту;  $k_1, k_2$  – жорсткість передньої і задньої опори, відповідно

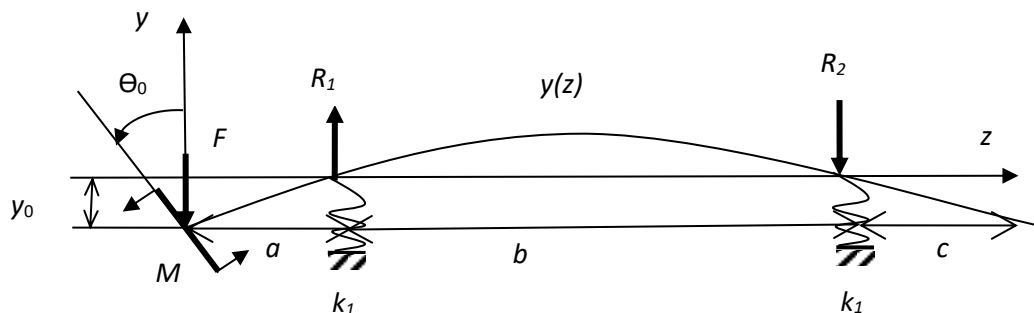


Рис. 1 - Розрахункова схема шпindelного вала

Для даної розрахункової схеми можна визначити ці параметри за умови найменшого переміщення кінцевого перетину консолі, найменшого кута повороту в цьому перерізі або мінімуму їх суперпозиції, що забезпечує максимальну жорсткість в зоні обробки. Можлива також мінімізація кута повороту на передній опорі, що забезпечує максимальну довговічність підшипника.

Постановка задачі оптимізації шпindelного вала за характеристиками жорсткості полягає в мінімізації цільової функції  $f(X)$  (або групи цільових функцій), які характеризують його жорсткість

$$f(X) \Rightarrow \min ,$$

де  $X$  – вектор змінних параметрів, як компонент якого використовуються коефіцієнт консолі  $K_a$  і коефіцієнт міжопорної відстані  $K_b$ .

Коефіцієнт жорсткості підшипників  $K_k$  і діаметр вала не варіюються.

В якості цільових функцій в даній роботі використовувалися:

– переміщення (прогин) кінцевого перетину консолі

$$y_0(K_a, K_b) \Rightarrow \min \quad (1)$$

– кут повороту кінцевого перетину консолі

$$\Theta_0(K_a, K_b) \Rightarrow \min \quad (2)$$

– кут повороту на передній опорі

$$\Theta_1(K_a, K_b) \Rightarrow \min \quad (3)$$

– суперпозиція перелічених функцій

$$f_k(K_a, K_b) = \frac{y_0(K_a, K_b)}{y_{0\min}} + \frac{\Theta_0(K_a, K_b)}{\Theta_{0\min}} + \frac{\Theta_1(K_a, K_b)}{\Theta_{1\min}} \Rightarrow \min, \quad (4)$$

де  $y_{0\min}$ ,  $\Theta_{0\min}$ ,  $\Theta_{1\min}$  – мінімальні значення для  $y_0(K_a, K_b)$ ,  $\Theta_0(K_a, K_b)$ ,  $\Theta_1(K_a, K_b)$ , отримані в попередніх розрахунках при мінімізації функцій (1) – (3).

В якості обмежень на варіювані параметри розглядалися мінімальні і максимальні значення довжини консолі і прольоту вала  $a_0 \leq a \leq a_m$ ,  $b_0 \leq b \leq b_m$  або:

$$\begin{aligned} K_{a0} &\leq K_a \leq K_{am}, \\ K_{b0} &\leq K_b \leq K_{bm}, \end{aligned} \quad (5)$$

де значення  $K_{a0}$ ,  $K_{b0}$ ,  $K_{am}$ ,  $K_{bm}$  обчислюються за

$$\begin{aligned} \text{залежностями} \quad K_{a0} &= \frac{a_0}{D}, \quad K_{am} = \frac{a_m}{D}, \quad K_{b0} = \frac{b_0}{a_m}, \\ K_{bm} &= \frac{b_m}{a_0}. \end{aligned}$$

Таким чином, задача оптимізації шпиндельного вала за критеріями жорсткості зводиться до мінімізації однієї з функцій (1) – (4) за рахунок варіювання коефіцієнтами консолі  $K_a$  і міжопорної відстані  $K_b$  при виконанні обмежень (5).

#### Метод і алгоритм вирішення задачі оптимізації.

Алгоритм одержання оптимального рішення формулюється в такій послідовності:

- задається значення діаметра вала  $D$ ;
- вибирається тип і марка переднього і заднього підшипника;
- формуються граничні значення параметрів  $a$  і  $b$ :  $a_0, a_m, b_0, b_m$ ;
- обчислюються граничні значення  $K_{a0}, K_{b0}, K_{am}, K_{bm}$ .

При варіюванні коефіцієнтами консолі  $K_a$  і міжопорної відстані  $K_b$  методом послідовного перебору в рамках обмежень (5) шляхом рішення крайової задачі статичного аналізу для розрахункової схеми вала, представленої на рис.1 обчислюється набір значень функцій (1) – (4). Далі будуються залежності цих функцій від  $K_a$  і  $K_b$ , що дозволяють графічно визначити відповідні мінімуми, тобто оптимальні рішення. Представлений алгоритм реалізований в пакеті MatLAB.

#### Рішення крайової задачі статичного аналізу.

Для визначення значень  $y_0(K_a, K_b)$ ,  $\Theta_0(K_a, K_b)$ ,  $\Theta_1(K_a, K_b)$  використовується рівняння зігнутої осі балки, яке в рамках гіпотез Ейлера - Бернуллі має вигляд:

$$\frac{d^2 y(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI} \quad (6)$$

де  $y(z)$  – функція зігнутої осі балки,  $z$  – поточна координата,  $M(z)$  – функція внутрішнього згинального моменту,  $EI$  – згинальна жорсткість балки ( $E$  – модуль пружності,  $I$  – момент інерції перерізу балки відносно нейтральної осі).

Рішення диференціального рівняння (6) для функції зігнутої осі балки  $y(z)$  може бути представлено у вигляді:

$$y = \frac{(A_0 + A_1 z + \Phi(z))}{EI} \quad (7)$$

де  $A_0$ ,  $A_1$  – постійні інтегрування,  $\Phi(z)$  – часткове рішення рівняння (6), яке залежить від виду функції  $M(z)$ .

Граничні умови формуються виходячи з того, що переміщення осі вала  $y_1$  і  $y_2$  над кожною з опор, пов'язані умовами пропорційності з відповідними реактивними зусиллями  $R_1$  і  $R_2$ . (рис. 1):

$$y_i = \frac{(A_0 + A_1 z_i + \Phi(z_i))}{EI} = \frac{R_i}{k_i}, \quad (8)$$

де  $z_i$  – координати опор, ( $z_1 = a$ ,  $z_2 = a + b$ ),  $k_i$  – жорсткості опор,  $i = 1, 2$ .

Функція кутів повороту  $\Theta(z)$  визначається через функцію прогинів:

$$\Theta = \frac{dy}{dz} = \frac{1}{EI} (A_1 + \frac{d\Phi(z)}{dz}). \quad (9)$$

Фізичний сенс коефіцієнтів  $A_0$  і  $A_1$  полягає в тому, що вони фактично являють собою прогин  $y_0$  і кут повороту перерізу балки  $\Theta_0$  на початку координат:

$$y_0 = \frac{A_0}{EI}, \quad \Theta_0 = \frac{A_1}{EI}, \quad (10)$$

і визначаються з граничних умов на пружних опорах (8) і умов статичної рівноваги.

Умови статичної рівноваги є рівність нулю проєкцій всіх сил на вісь  $z$  і рівність нулю суми моментів зовнішніх зусиль відносно будь-якої точки.

$$\begin{aligned} R_1 - R_2 - F &= 0, \\ R_1 a - R_2(a+b) - M &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Функція  $\Phi(z)$  залежить від виду функції згинального моменту  $M(z)$ , яка для даної розрахункової схеми має вигляд:

$$\begin{aligned} M(z) &= -M - Fz \text{ при } 0 \leq z \leq a, \\ M(z) &= -M - Fz + R_1(z-a) \\ &\text{при } a \leq z \leq a+b, \\ M(z) &= -M - Fz + R_1(z-a) - R_2(z-(a+b)) \\ &\text{при } a+b \leq z \leq a+b+c. \end{aligned} \quad (12)$$

У свою чергу, функція  $\Phi(z)$  представляється залежностями:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{Mz^2}{2} - \frac{Fz^3}{6} \text{ при } 0 \leq z \leq a, \\ \Phi(z) &= -\frac{Mz^2}{2} - \frac{Fz^3}{6} + \frac{R_1(z-a)^3}{6} \\ &\text{при } a \leq z \leq a+b, \\ \Phi(z) &= -\frac{Mz^2}{2} - \frac{Fz^3}{6} + \frac{R_1(z-a)^3}{6} - \frac{R_2(z-(a+b))^3}{6} \\ &\text{при } a+b \leq z \leq a+b+c. \end{aligned} \quad (13)$$

Залежності (7), (8), (10) - (13) дозволяють сформулювати роздільну систему рівнянь і отримати  $y_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  у вигляді:

$$\begin{aligned} y_0 &= -F \left\{ \frac{a^2(a+b)}{3EI} + \frac{1}{b^2} \left[ \frac{(a+b)^2}{k_1} + \frac{a^2}{k_2} \right] \right\} - \\ &- M \left[ \frac{3a^2+2ab}{6EI} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{a+b}{k_1} + \frac{a}{k_2} \right) \right], \\ \Theta_0 &= F \left[ \frac{3a^2+2ab}{6EI} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{a+b}{k_1} + \frac{a}{k_2} \right) \right] + \\ &+ M \left[ \frac{3a+b}{3EI} + \frac{1}{b^2} \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) \right], \\ R_1 &= \frac{F(a+b)}{b} + \frac{M}{b}, \\ R_2 &= \frac{Fa}{b} + \frac{M}{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

При наявності обчислених значень  $y_0$ ,  $\Theta_0$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  за допомогою виразів (7), (9), (10) и (13), можуть бути отримані значення функції прогинів  $y(z)$  і функції кутів повороту  $\Theta(z)$  для довільного поточного значення координати  $z$ .

Жорсткості опор  $k_1$  і  $k_2$  нелінійно залежать від значень реактивних зусиль.

**Розрахунок жорсткості опор. Расчет жесткости опор.** Аналіз літератури з розрахунку пружних характеристик підшипників кочення [9 - 11] показує, що навіть без урахування впливу технологічних зазорів і посадки на вал жорсткість підшипників нелінійна.

В роботі [11] на основі задачі контактної взаємодії пружного циліндра з криволінійними півпросторами отримана залежність, що зв'язує абсолютну деформацію роликів підшипника з радіальним зусиллям:

$$\delta_r = 7,68 * 10^{-5} \frac{Q_{\max}^{0,9}}{l^{0,8}} \quad (15)$$

де  $\delta_r$ , мм – абсолютна деформація в радіальному напрямку (абсолютна зміна радіуса),  $Q_{\max}$ , Н – зусилля, що приходить на найбільш навантажений ролик,  $l$ , мм – довжина ролика. Вираз для  $Q_{\max}$  в радіальному роликпідшипнику отримано в [11]:

$$Q_{\max} = \frac{4,08 F_r}{nr} \quad (16)$$

де  $F_r$  – радіальна сила, яка діє на підшипник,  $n$  – кількість рядів роликів,  $r$  – кількість роликів в ряду.

З урахуванням (16) вираз для  $\delta_r$  приймає вигляд:

$$\delta_r = 2,72 * 10^{-4} l^{-0,8} \left( \frac{F_r}{nr} \right)^{0,9},$$

що дозволяє залежність для жорсткості опори  $k_i$  представити у вигляді ( $F_r = R_i$ ):

$$k_i(R_i) = \frac{R_i}{y_i} = \frac{F_r}{\delta_r} = 3680(nr)^{0,9} l^{0,8} R_i^{0,1}, \quad (17)$$

де  $k_i$ , Н/мм – жорсткість  $i$ -ої опори, опори, яка нелінійно залежить від величини реакції цієї опори  $R_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Для більш точного розрахунку жорсткості підшипників необхідно враховувати наявність в них технологічних зазорів, попереднього натягу і впливу умов посадки підшипника на вал і в корпус шпindelного вузла.

**Результати моделювання.** Як об'єкт оптимізації розглядався шпindelний вал, діаметром  $D = 100$  мм, розрахункова схема якого представлена на рис. 1.

Граничні значення для варійованих параметрів  $a_o, a_m, b_o, b_m, K_{ao}, K_{bo}, K_{am}, K_{bm}$ , представлені в табл. 1.

На рис. 2 - 4 представлені сімейства цільових функцій (1) - (4) у вигляді залежностей від параметрів  $K_a$  и  $K_b$  і наведено геометричні місця локальних мінімумів –  $y_0 = y_{0\min}(K_a, K_b)$ ,  $Q_0 = \Theta_{0\min}(K_a, K_b)$ ,  $Q_1 = \Theta_{1\min}(K_a, K_b)$ ,  $f_k = f_{k\min}(K_a, K_b)$  з яких слідує відповідні глобальні оптимальні рішення.

Таблиця 1. Граничні значення варійованих параметрів

Мінімальні значення варійованих параметрів				Максимальні значення варійованих параметрів			
$a_o$ , мм	$b_o$ , мм	$K_{a0}$	$K_{b0}$	$a_m$ , мм	$b_m$ , мм	$K_{am}$	$K_{bm}$
25	100	0,25	1,0	100	400	1,0	16

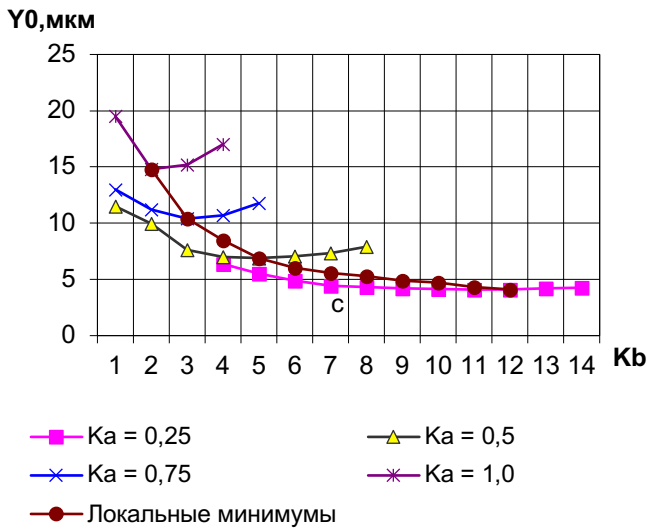


Рис. 2 - Локальні мінімуми функції  $Y_0$

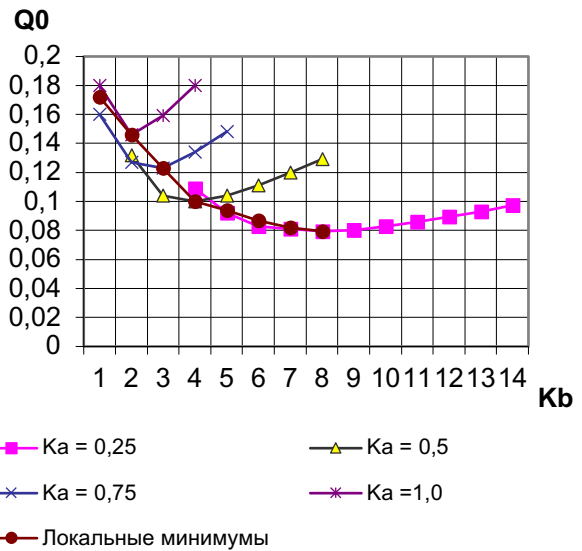


Рис. 3 - Локальні мінімуми функції  $\Theta_0$

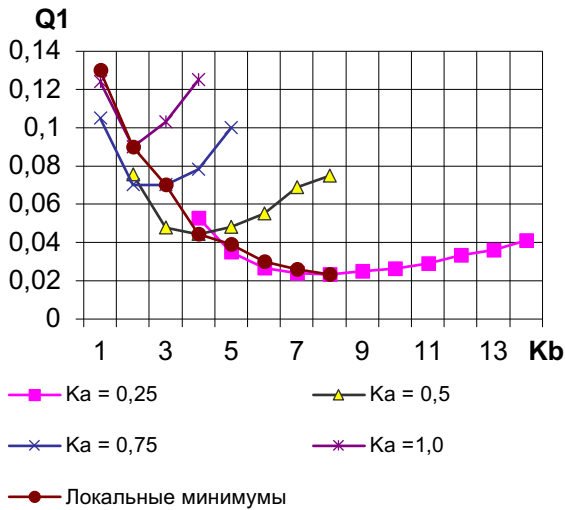


Рис. 4 - Локальні мінімуми функції  $\Theta_1$

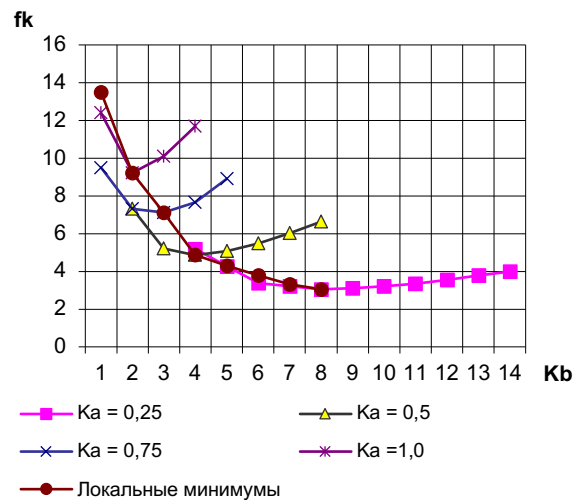


Рис. 5 - Локальні мінімуми функції  $f_k$

Таблиця 2 - Оптимальні рішення

Цільові функції	Мінімум функції	Оптимальні значення варійованих параметрів			
		$K_{opt}$	$a_{opt}$ , мм	$K_{bopt}$	$b_{opt}$ , мм
$y_0(K_a, K_b) \cdot 10^3$ , мм	4,11	0,25	25	12	300
$\Theta_0(K_a, K_b) \cdot 10^4$ , рад	0,795	0,25	25	8	200
$\Theta_1(K_a, K_b) \cdot 10^4$ , рад	0,233	0,25	25	8	200
$f_k(K_a, K_b)$	3,05	0,25	25	8	200

Оптимальні рішення, отримані для функцій (1) - (4), також наведені в табл. 2. З отриманих результатів випливає, що мінімальні рівні прогину консолі  $y_{0min}$  (максимальна жорсткість) мінімуми кутів повороту  $\Theta_{0min}$  і  $\Theta_{1min}$  досягаються при мінімальній довжині консолі ( $K_a = a/D = 0,25$ ), але при різній довжині прольоту – 300 мм и 200 мм, відповідно. Мінімум суперпозиції 3-х функцій  $f_{kmin}$  (4) досягається при мінімальній довжині консольної частини вала  $K_a = 0,25$  ( $a = 25$  мм) і довжині прольоту  $b = 200$  мм ( $K_b = 8$ ).

**Висновки.** В роботі для двохопального шпиндельного вала на нелінійно пружних опорах розглянуто задачу оптимізації по характеристикам жорсткості.

Поставлено завдання оптимізації за характеристиками жорсткості, яка зводиться до мінімізації однієї з 4-х запропонованих функцій за рахунок варіювання довжиною консолі і міжопорної відстані при виконанні обмежень на ці параметри.

Представлена постановка задачі і математична модель для статичного аналізу двохопального шпиндельного вала на пружних опорах. Рішення крайової задачі статичного аналізу представлено в аналітичному вигляді. Отримано залежності для розрахунку радіальної жорсткості роликів підшипника як функції діючого на нього радіального зусилля.

Розроблено алгоритм вирішення завдань оптимізації та створено відповідне програмне забезпечення для пакета MatLAB.

Отримані оптимальні рішення показали, що мінімум комбінованої функції, що складається з суми відносних величин прогину на кінці консолі і кутів повороту на кінці консолі і на передній опорі досягається на тих же варійованих параметрах, що і мінімуми незалежно мінімізуємих кутів повороту на кінці консолі і на передній опорі.

Запропонований підхід до проектування валів шпиндельних вузлів металорізальних верстатів, оптимальних за характеристиками жорсткості, формує

інструмент для обґрунтованого вибору підшипників і конструктивних параметрів двохопальних шпиндельних валів.

#### Список літератури

1. Решетов Д.Н. Розрахунок валів (шпинделей) з урахуванням упругого взаємодії їх з опорами. М.: Mashgiz, 1939, 75 с.
2. Шаріф, К. Дж. Х., Брендон, Дж. А., «Про квазістатичну конструкцію верстатів Machine Tooi», Journal of Engineering Manufacture, Vol. 204, 1990, стор. 91-104.
3. Чернянский П.М. Жесткость металлорежущих станков: Учебное пособие. М.: изд. МВТУ, 1969, 20с.
4. Аналіз шпинделя токарного верстата за допомогою ansys. S. Shivakumar, Anupama N. Kallol, Vishwanath Khadakbhavi International Journal of Scientific & Engineering Research, том 4, випуск 9, вересень-2013, стор. 431-440.
5. Левіна З.М., Зверев І.А. Расчет статических и динамических характеристик шпиндельных узлов методом конечных элементов // Станки и инструмент. 1986. № 8.С.6-9.
6. Зверев І.А., Самохвалов Е.І., Левіна З.М. Автоматизированные расчеты шпиндельных узлов // Станки и инструмент, 1984. № 2. с. 11-15.
7. Lewinchai, L., "Machine Tooi Spindie Applications", SKF Industries, Inc. Розробка та дослідження, SKF Norden, лютий 1983 р.
8. Момір Шаренац, Жорсткість шпинделя верстата як основний фактор точності обробки - УДК 62-113.624.046, Машинобудування, том 1, № 6, 1999, стор. 665 - 674.
9. Ковалев М.П., Народецкий М.З. Расчет высокоточных шарикоподшипников. М.: Машиностроение, 1975. 280 с.
10. Левиншал Л. Шпиндельные узлы для станков с высокоточными эксплуатационными характеристиками. М.: НВК, 1992, 142 с.
11. Харріс Тедрік А. Аналіз підшипників кочення / Тедрік А. Харріс. – 4-е вид., 1086 с.

#### References (transliterated)

1. Reshetov D.N. Calculation of shafts (spindles) taking into account their elastic interaction with the supports. M.: Mashgiz, 1939, 75 p.
2. Shareef, K.J.H, Brandon, J.A., "On the Quasi-Static Design of Machine Tooi Spindies", Journal of Engineering Manufacture, Vol. 204, 1990, pp. 91-104.
3. Chernyansky P.M. The rigidity of metal-cutting machines: a textbook. M : ed. MVTU, 1969, 20p.
4. Analysis of lathe spindle using ansys. S. Shivakumar, Anupama N.Kallol, Vishwanath Khadakbhavi International Journal of Scientific & Engineering Research, Volume 4, Issue 9, September-2013, pp. 431-440.
5. Levina Z.M., Zverev I.A. Calculation of static and dynamic characteristics of spindle assemblies using the finite element method // Machines and tools. 1986, № 8, P .6-9.

6. Zverev I.A., Samokhvalov E.I., Levina Z.M. Automated calculations of spindle assemblies // Machine tools and tools, 1984. № 2. p. 11-15.
7. Lewinchai, L., "Machine Tool Spindle Applications SKF Industries, Inc. Engineering and Research, SKF Norden, Feb 1983.
8. Momir Sarenac, Stiffness of Machine Tool Spindle as a mainfactor for treatment accuracy-UDC 62-113,624.046, Mechanical Engineering Vol.1, № 6, 1999, pp. 665 – 674.
9. Kovalev M.P., Narodetsky M.Z. Calculation of high precision ball bearings. M.: Mashinostrenie, 1975, 280 p.
10. Levinshal L. Spindle nodes for machines with high-precision operational characteristics. M.: SCF, 1992, 142 p.
11. Harris Tedric A. Rolling bearing analysis / Tedric A. Harris. - 4th ed., 1086 p.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Хавін Валерій Львович (Хавин Валерий Львович, Khavin Valerij Lvovich)** кандидат технічних наук, професор, кафедра «Механіка суцільних середовищ та опір матеріалів», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: vkhavin@kpi.kharkov.ua

**Хавіна Інна Петрівна (Хавина Инна Петровна, Khavina Inna Petrovna)** кандидат технічних наук, професор, кафедра «Обчислювальна техніка та програмування», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-65; e-mail: inna.khavina25@gmail.com

**Погорілов Сергій Юрійович (Погорелов Сергей Юрьевич, Pogorilov Sergij Yuriyovich)** кандидат технічних наук, доцент, кафедра «Механіка суцільних середовищ та опір матеріалів», Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», тел. (057)707-61-78; e-mail: pogorilovsky@gmail.com