

**Д. В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, О. А. ТАТАРИНОВА**  
**МЕТОД ТА ПРОГРАМНИЙ ЗАСІБ ДЛЯ СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ПОВЗУЧОСТІ ПРИ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЯХ**

У статті наведено постановку двовимірної задачі теорії повзучості для випадку скінченних деформацій, надано опис основ методу розрахунку. Описано теоретичні основи методу розв'язання задачі. Метод побудовано з використанням узагальненого підходу Лагранжа-Ейлера (ALE), в якому крайова задача у поточній конфігурації тіла розв'язується за допомогою МСЕ. До моделювання залучено трикутний елемент. На кожному етапі розрахунку повзучості у поточній конфігурації початкова задача розв'язується чисельно з використанням різничевого методу. Препроцесорна підготовка даних проводиться у програмі RD, в якій двовимірну модель оточується сіткою спеціальних елементів, чим реалізується ALE алгоритм пересування матеріальних елементів за моделлю. Наведено приклади роботи препроцесору та перебудови скінченноелементної сітки при досягненні скінченних деформацій. Розрахунки повзучості виконуються у розробленій програмі, яку побудовано на базі використання програмного комплексу FEM Creep у випадку скінченних деформацій. При моделюванні використовується сітка з однаковим розміром елементів, що дозволяє застосовувати ефективний алгоритм переходу між поточними конфігураціями. Чисельні результати з повзучості зразків з алюмінієвих сплавів порівнюються з експериментальними та розрахованими, отриманими інтегруванням рівнянь стану. Зроблено висновок щодо того, що при моделюванні матеріалу з в'язким типом руйнування запропонований метод та розроблене програмне забезпечення дозволяють отримати близькі к експериментальним результати тільки з застосуванням рівняння для швидкості деформацій повзучості. Моделювання повзучості матеріалу зі змішаним в'язко-крихким типом руйнування потребує додаткового використання кінетичного рівняння для параметру пошкоджуваності.

**Ключові слова:** слова: повзучість, двовимірні задачі, скінченні деформації, МСЕ, програма, алюмінієві сплави.

В статье дана постановка двумерной задачи теории ползучести для случая конечных деформаций, предоставлено описание основ метода расчета. Описаны теоретические основы метода решения задачи. Метод построен с использованием обобщенного подхода Лагранжа-Эйлера (ALE), в котором краевая задача в текущей конфигурации тела решается с помощью МКЭ. При моделировании используется треугольный элемент. На каждом этапе расчета ползучести в текущей конфигурации начальная задача решается численно с использованием разностного метода. Препроцессорная подготовка данных производится в программе RD, в которой двумерная модель окружается сеткой специальных элементов, чем реализуется ALE алгоритм передвижения материальных элементов по модели. Приведены примеры работы препроцессора и перестройки конечноэлементной сетки при достижении конечных деформаций. Расчеты ползучести выполняются в разработанной программе, которая построена на базе использования программного комплекса FEM Creep в случае конечных деформаций. При моделировании используется сетка с одинаковым размером элементов, что позволяет применять эффективный алгоритм перехода между текущими конфигурациями. Численные результаты с ползучести образцов из алюминиевых сплавов сравниваются с экспериментальными и расчетными, полученными интегрированием уравнений состояния. Сделан вывод о том, что при моделировании материала с вязким типом разрушения предложенный метод и разработанное программное обеспечение позволяют получить близкие к экспериментальным результаты только с применением уравнения для скорости деформаций ползучести. Моделирование ползучести материала со смешанным вязко-хрупким типом разрушения требует дополнительного использования кинетического уравнения для параметра повреждаемости.

**Ключевые слова:** ползучесть, двумерные задачи, конечные деформации, МСЭ, программа, алюминиевые сплавы.

The paper presents the formulation of a two-dimensional problem of the creep theory for the case of finite strains. A description of the foundations of the calculation method presents. The method is based on the use of the generalized Lagrange-Euler (ALE) approach, in which the boundary value problem in the current solid configuration is solved by using FEM. A triangular element is involved in the numerical modeling. At each stage of creep calculations in the current configuration, the initial problem is solved numerically using the finite difference method. The preprocessing data preparation is carried out in the homemade RD program, in which two-dimensional model is surrounded by a mesh of special elements. This feature implements the ALE algorithm for the motion of material elements along the model. The examples of preprocessing as well as of the mesh rebuilding in the case of finite elements transition are given. Creep calculations are performed in the developed program, which is based on the use of the FEM Creep software package in the case of finite strains. The regular mesh is used for calculations, which allow us to use the efficient algorithm for transition between current configurations. The numerical results of the creep of specimens made from aluminum alloys are compared with the experimental and calculated ones obtained by integrating the constitutive equations. It was concluded that for material with ductile type of fracture the presented method and software allow to obtain results very close to experimental only by use of creep rate equation. Creep simulations of material with mixed brittle-ductile fracture type demand use the additional equation for damage variable.

**Keywords:** creep, two-dimensional problems, finite strains, FEM, program, aluminum alloys.

**Вступ.** Умови перебігу різноманітних технологічних процесів у промисловості, насамперед при формуванні, різанні, зварюванні тощо, у великій кількості випадків характеризуються виникненням скінченних деформацій, тобто таких, при яких величини переміщень є співрозмірними розмірам деталей [1]. Математичне, а згодом й комп'ютерне моделювання таких процесів надає можливість уникнути великої кількості натурних експериментів та обрати найкраще конструктивне рішення.

З точки зору математичного опису проблеми вона відноситься до теорії скінченних деформацій [1], яка характеризується істотною нелінійністю визначальних співвідношень. На сьогодні досить розробленими є постановки та методи розв'язання задач нелінійної теорії пружності та теорії пластичності [2]. У зв'язку з

необхідністю моделювання відповідних процесів деформування у деталях зі складної геометрією, більшість задач розв'язується методом скінченних елементів (МСЕ) [3]. Значний внесок у розвиток способів застосування МСЕ в задачах теорії пружності та пластичності для випадку скінченних деформацій зроблено роботами Дж. Одена [4], Х.Сімо [5], Дж.Бонета та Р.Вуда [2], М.Крісфілда [6], О.Зенкевіча та Р.Тейлора [3] та багатьох інших. Теоретичні розробки реалізовано у програмних комплексах SE аналізу, таких, як, наприклад, LS Dyna [7], [8].

Значно меншу кількість робіт присвячено створенню підходів та методів розв'язання задач теорії повзучості (в'язкопластичності). Розвитку цього напрямку у механіці скінченних деформацій стосовно до використання МСЕ присвячено роботи [9-15]. У

переважній частині робіт використовується перехід від початкової до поточної конфігурації, в якій й проводяться СЕ обчислення за допомогою відомих програмних комплексів інженерного аналізу.

В.Броксом та Р.Ліном [9] на випадок СЕ моделювання великих деформацій у металевих конструкціях використано закон в'язкопластичного деформування, запропонований Ж.-Л. Шабошем [16]. Як й у класичних роботах, для виведення рівнянь стану застосовано термодинамічний підхід. Проведено СЕ моделювання деформування у часі заготовки зі сплаву у IN738LC при 850 С.

Технологічні задачі теорії в'язкопластичності та пошкоджуваності розглянуто з точки зору підходів континуальної механіки у монографії К.Саануні [10]. Описано методи розв'язання задач незворотного деформування у часі. Надано приклади використання теоретичних результатів у т.зв. задачах «віртуального формування металів», тобто комп'ютерного моделювання відповідних процесів. Розглянуто процеси кування, вальцювання та ін.

Питання застосування теорії пластичності, що включає залежність від швидкості деформування, для аналізу розвитку скінченних деформацій у часі розглянуто в роботі [11], а у статті [12] сформульовано загальні співвідношення теорії термопластичності та повзучості, яка використовує мультиплікативне розвинення та логарифмічні деформації Генкі.

Також на теперішній час проведено певну кількість досліджень, в результаті яких отримано дані з деформування при скінченних деформаціях у полікристалічних матеріалах [13], циклічній повзучості алюмінієвого сплаву [14], розтягу брусу у часі [15].

Дану статтю присвячено викладенню постановки задачі, опису основ СЕ методу та розробленої програми розв'язання двовимірних задач теорії повзучості з урахуванням скінченних деформацій. Наводяться задовільні результати порівняння експериментальних та розрахункових даних, що надає можливість використання розроблених засобів комп'ютерного моделювання для розв'язання інших задач незворотного деформування конструктивних елементів.

### Постановка задачі.

Розглянемо двовимірну задачу теорії повзучості без будь-яких обмежень на величини деформацій, що виникають у тілі об'ємом  $\Omega$ . Вважаємо, що воно закріплене на частині поверхні  $S_1$  та навантажене поверхневими силами  $p$  на частині поверхні  $S_2$ . Розглянемо випадок плоского напруженого стану.

При дії зовнішнього навантаження тіло отримує скінченні переміщення та з початкового положення зміщується в інше, що має назву поточного. Дані положення тіла описуємо їхніми конфігураціями – початковою (відповідна декартова система координат  $X(X_1, X_2)$ , об'єм  $\Omega$ ) та поточною (декартова система координат  $x(x_1, x_2)$ , об'єм  $\varpi$ ). У початковому положенні тіло має товщину  $H_3$ .

Застосуємо тензорне представлення основних величин, при цьому індекси в початковій конфігурації позначатимемо великими латинськими літерами, а у поточній – малими.

Системи координат в розглянутих конфігураціях у будь-який момент часу  $t$  пов'язані наступним чином:

$$x_i = \phi_i(X_I, t). \quad (1)$$

Вектор переміщень точки тіла в початковій конфігурації  $U_I$  представимо як різницю між двома її положеннями. Тоді має місце наступне співвідношення [3]:

$$x_i = \delta_{ii}(X_I + U_I), \quad (2)$$

де  $\delta_{ii}$  – символ Кронекера.

Позначимо вектор переміщень у поточній конфігурації як  $u_i$  та представимо зв'язок між введеними векторами :

$$u_i = \delta_{ii}U_I. \quad (3)$$

Міра деформування описується градієнтом, обчисленим за координатами  $X_I$  [3]:

$$F_{ii} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I} = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_I}, \quad (4)$$

де

$$F_{ii} = \begin{pmatrix} 1+u_{1,1} & u_{1,2} & 0 \\ u_{2,1} & 1+u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & F_{33} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

(Значення  $F_{33}$  отримується, виходячи з того, що нормальне напруження у напрямку 3 дорівнює 0).

Зв'язок між прирістами значень відповідних нескінченно малих елементів отримується у наступній формі:

$$dx_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial X_I} dX_I = F_{ii} dX_I, \quad (6)$$

а між елементарними об'ємами в розглянутих конфігураціях як

$$d\varpi_i = J d\Omega, \quad (7)$$

де  $J = \det F_{ii}$ .

У початковій конфігурації для опису накопичених деформацій застосуємо правий тензор Коші-Гріна  $C_{II}$  [2, 3]

$$C_{II} = F_{ii} F_{ii}, \quad (8)$$

а у поточній  $b_{ij}$

$$b_{ij} = F_{ii} F_{ij}, \quad (9)$$

який має назву лівого тензору Коші-Гріна.[2, 3]

Напружений стан у поточній конфігурації описуватимемо за допомогою напружень Коші  $\sigma_{ij}$  та Кірхгофу  $\tau_{ij}$ , які пов'язані наступним чином:

$$\tau_{ij} = J \sigma_{ij}. \quad (10)$$

У початковій конфігурації використаємо другий тензор напружень Піоли-Кірхгофа  $S_{II}$  [2]. Він пов'язаний з напруженням Кірхгофу як

$$\tau_{ij} = F_{ii} S_{ij} F_{jj}. \quad (11)$$

Відмітимо, що всі введені тензори напружень є симетричними.

Рівняння рівноваги та граничні умови для тіла, що розглядається, представимо у поточній конфігурації :

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \text{ на } S_2.$$

Розглядатимемо ізотропні матеріали, випадок малих початкових пружних деформацій  $e_{kl}$

$$\sigma_{ij} = (\hat{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) e_{kl}, \quad (13)$$

де  $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$  - параметри Ляме.

Для опису повзучості у поточній конфігурації застосуємо інкрементальну теорію [3]:

$$\dot{c}_{ij} = \Phi(I_2, t) s_{ij}, \quad (14)$$

де  $c_{ij}$  – компоненти тензору деформацій повзучості у поточній конфігурації,  $\Phi$ - функція другого інваріанту тензору напружень Коші  $I_2$  та часу,  $s_{ij}$  – компоненти девіатору тензору напружень Коші.

Використовуючи введені міри деформування та напруження, загальну постановку двовимірної задачі теорії повзучості можливо представити рівняннями (4), (8) і (9), (12) та (13), (14).

#### Опис методу скінченноелементного моделювання.

Для розв'язання задачі застосуємо метод скінченних елементів (МСЕ). При цьому розглядатимемо послідовність кроків за часом  $t_n$ , яким притаманне поточне значення об'єму  $\varpi_n$ .

Гradient деформування в момент часу  $t_{n+1}$  при цьому визначається наступним чином:

$$F_{ii}^{(n+1)} = \frac{\partial \Phi_i^{(n+1)}}{\partial x_j^{(n)}} \frac{\partial x_j^{(n)}}{\partial X_i} = f_{ij}^{(n)} F_{ji}^{(n)}, \quad (15)$$

де  $f_{ij}^{(n)}$  є gradientом приростів деформування, асоційованим з початковою конфігурацією при  $\partial x_j^{(n)}$  та  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

На  $n+1$  кроці за часом значення компонентів правого тензору деформацій Коши-Гріна отримуються наступним чином [3]:

$$C_{II}^{(n+1)} = c_{jk}^{(n)} F_{ji}^{(n)} F_{kl}^{(n)}, \quad (16)$$

де

$$c_{jk}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} f_{ik}^{(n)} - \quad (17)$$

компоненти приростів правого тензору деформацій Коши-Гріна.

Обчислення проводитимемо у поточній конфігурації. Як відмічено О.Зенкевичем зі співавторами [3], розв'язок задачі в даній постановці є дуже схожим на такий, що отримується при розгляді

випадку малих деформацій. Застосуємо перехід до варіаційного формулювання задач, потім до скінченноелементного. Член, що відповідає за енергію деформацій скінченного елемента (СЕ)  $\beta$  перетворюється наступним чином

$$\int_{\varpi_\beta} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\varpi = \delta \bar{u}^T \int_{\varpi_\beta} [\bar{B}]^T \{\sigma\} d\varpi, \quad (18)$$

де  $[\bar{B}]$  – матриця деформування,  $\{\sigma\}$  – вектор напружень у СЕ. Член, відповідний роботі зовнішнього навантаження, представлено як

$$\{F^\beta\} = \int_{S_{2\beta}} [N^p] \{p\} dS, \quad (19)$$

де  $[N^p]$  – матриця форм у двовимірному СЕ формулюванні задачі.

Остаточно, після перетворень, систему рівнянь повзучості у поточній конфігурації записано так [17]:

$$[K] \{\dot{u}\} = \{\dot{F}\} + \{\dot{F}^c\}; \quad (20)$$

$$\{\dot{F}\} = \sum_{N_\beta} \int_{\varpi_\beta} [N^p] \cdot \{p\} dS;$$

$$\{\dot{F}^c\} = \sum_{N_\beta} \int_{\varpi_\beta} [\bar{B}]^T \cdot [D] \cdot \{\dot{c}\} dV;$$

$$\{\dot{c}\} = \frac{3}{2} B \sigma_i^{n-1} [\hat{c}] \{\sigma\}.$$

Тут застосовано наступні позначення:  $[K]$  – матриця жорсткості системи;  $\{F\}$  – вектор вузлових навантажень, обумовлених поверхневими силами;  $\{F^c\}$  – вектор вузлових навантажень, обумовлених деформаціями повзучості;  $[D]$  – матриця пружних констант;  $[\hat{c}]$  – матриця, що утворюється при розрахунку повзучості;  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$  – інтенсивність напружень за Мізесом;  $B, n$  – константи, що визначаються експериментально;  $\sum_{N_\beta}$  –

підсумовування за всіма скінченими елементами [17].

Розв'язання задачі проводиться з наступною послідовністю кроків. Спочатку розв'язується пружна задача у постановці малих деформацій для  $t=0$ . Далі розв'язок задачі повзучості, що описано системою (20), відбувається до заданого значення максимальних деформацій у тілі, наприклад 1%. На наступному кроці за часом  $t_{n+1}$  ця поточна конфігурація вже вважатиметься початковою та описаний алгоритм повторюється спочатку. Подібний спосіб отримав назву ALE (узагальненого підходу Лагранжу-Ейлера) [8]. Система алгебраїчних рівнянь на кроці за часом розв'язується методом Холецького, а загальна система (20) – різницевою [17].

За необхідності для обраних моментів часу є можливим визначення компонентів тензорів

деформацій та напружень у початковій конфігурації за відомими співвідношеннями типу (11), (15) - (17).

Описаний метод розрахунку реалізовано у програмі *FEM Creep FS*, яка базується на програмному комплексі *FEM Creep* та використовує його трикутний SE й більшість методів та алгоритмів [17]. Для побудови SE моделей розроблено програму RD [17], [18], в якій підхід ALE реалізовано за допомогою концепції введення двох типів SE – матеріальних, якими моделюються тіло, що деформується, та «повітряних», які обмежують матеріальні. За отриманням скінченних деформацій відбувається процес перебудови SE моделі, при цьому сама сітка лишається незмінною. Перелічимо основні етапи моделювання.

Спочатку за допомогою програми RD будується SE модель, що містить сукупність матеріальних елементів та «повітряних», якими вони оточуються. Використовується рівномірна сітка з однаковим розміром елементів, що дозволяє досить ефективно впроваджувати алгоритми переходу між їхніми типами. Наприклад, на рис. 1 наведена SE модель квадратного елемента, що оточений сукупністю «повітряних». Для наочності задано малу кількість елементів та лише один шар «повітря» з кожного боку.

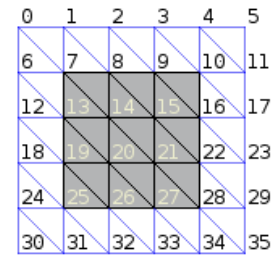


Рисунок 1 – Приклад SE моделі, що генерується програмою RD

Розрахунок починається після того, як додано інформацію щодо крайових умов у переміщеннях та напруженнях. При отриманні значення максимальної деформації в якомусь SE (як правило, такої, при якій переміщення його точок відповідають розміру трикутника) або їх групі відбувається переформулювання задачі. Відповідно отриманим даним щодо зміщень вузлів у початковій конфігурації  $X$  проводиться переведення SE з матеріальних у «повітряні» чи навпаки.

На рис. 2 як приклад наведено ілюстрацію процесу перебудови моделі для фрагменту плоского прямокутного зразку, який розтягується в його площині. На рисунку у SE, переведених у «повітряні», відсутні номери елементів

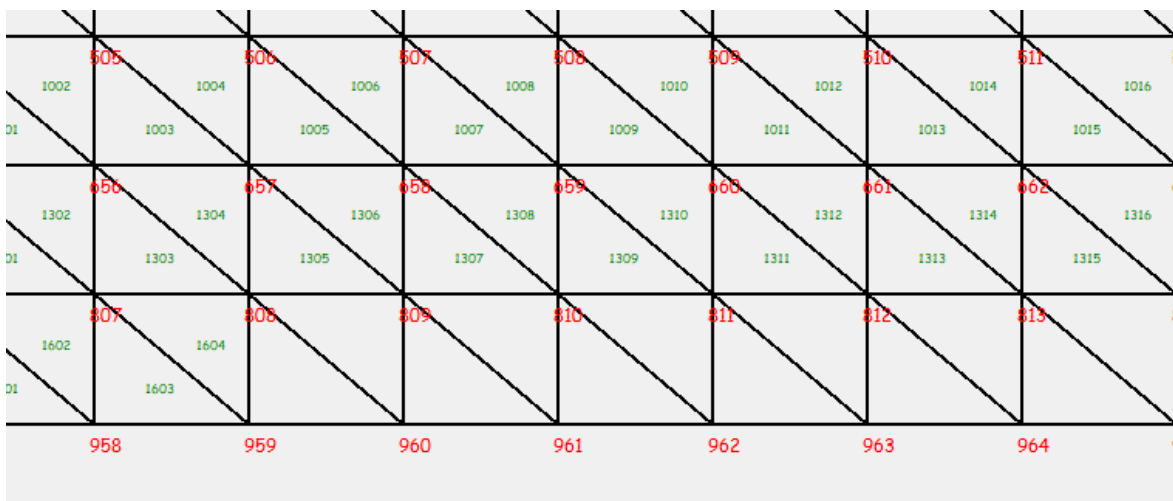


Рис. 2 – Загальний вид елементів композиційного пера лопатки із зазначенням товщини, [м]

Далі проводиться перебудова матриці жорсткості системи, перераховуються компоненти складових вектору правих частин  $\{F\}$  та  $\{F^c\}$ . Остання процедура пов'язана з можливим зсувом вузлів, в яких задано поверхневе навантаження (тобто появою нових матеріальних елементів з ненульовими значеннями вузлових сил та з відсутністю цих значень у старих). Проводиться апроксимація отриманих значень компонентів напружено-деформованого стану для їх переведення у нові вузли та елементи.

Після цього розрахункова процедура повторюється для нової отриманої конфігурації до моменту, заданого користувачем, досягнення певного значення деформації або руйнування конструктивного

елементу. Детальний опис алгоритму побудови моделей може бути знайденим в роботах [17], [18].

#### Чисельне моделювання деформування та руйнування зразків з алюмінієвих сплавів.

Наведемо результати чисельного моделювання перевірочних задач повзучості одновимірних зразків при простому напруженому стані (одновісному розтягу), які моделюються як плоскі двовимірні елементи. Як відомо [3], подібні чисельні експерименти мають бути проведеними для аналізу достовірності результатів, що отримуються за допомогою розробленого програмного забезпечення та передувати дослідженням на більш складних моделях.

До моделювання у розробленому програмному засобі залучено скінченноелементну модель для робочої частини плоских прямокутних зразків довжиною 100 мм та шириною 10 мм. Зразки жорстко закріплено на одному боці, на іншому їх навантажено напруженням розтягу. Розглянуто два зразки, виготовлених з різних алюмінієвих сплавів Д16АТ та АМг6, повзучість яких досліджувалась експериментально [19, 20]. Температура випробувань 300°C.

Завдяки симетрії розрахункову модель побудовано для половини зразку (розсіченого за довжиною). До моделювання після чисельних експериментів залучено рівномірну скінченноелементну сітку з 1800 трикутних елементів з розміром катету 1 мм.

Розглянемо повзучість зразку зі сплаву АМг6. До моделювання залучено визначальне рівняння для швидкості деформації повзучості. Для поточної конфігурації його представлено у наступному вигляді:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B (\sigma_i)^{n-1} s_{ij}, \quad (21)$$

де  $B, n$  – константи, що визначаються експериментально. В роботі [20] після обробки експериментальних даних визначено їхні значення:  $B=6.16 \cdot 10^{-9}$  МПа<sup>-n</sup>/год;  $n=4.3$ .

Результати чисельного моделювання представлено на рис. 3 та 4. На рис.3 наведено кінцевий вигляд половини зразку зі сплаву АМг6 при  $T=573$  К, отриманий шляхом чисельного моделювання при  $t=49.5$  год. Зразок перед деформуванням мав прямокутну форму, яка на рисунку окреслена прямими лініями. Темним кольором позначено решту матеріалу на момент руйнування. На рис. 4 надано порівняльний графік для значень деформації повзучості зразку, який містить експериментальні (квадратні точки), розрахункові за рівнянням стану типу (21), записаним для простого напруженого стану з доданням до нього кінетичним рівнянням для параметру пошкоджуваності  $\omega$  у вигляді системи (22) (суцільна лінія), та чисельні скінченноелементні результати (круглі точки). Останні обчислювались як чисельно отримані значення переміщення правої кромки зразку, віднесені до його первісної довжини. Як видно з рис.4, руйнівна деформація зразку сягає значення 52-55%.

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= B \frac{(\sigma)^n}{(1-\omega)^k}, \quad \dot{\omega} = D \frac{(\sigma)^n}{(1-\omega)^k}, \\ \omega(x, t_0) &= \omega_0, \quad \omega(x, t_*) = \omega_*, \end{aligned} \quad (22)$$

граничне значення параметру пошкоджуваності  $\omega_* = 0.95$ . За даними роботи [20] прийнято наступні значення констант:  $B=6.16 \cdot 10^{-9}$  МПа<sup>-n</sup>/Г,  $D=9.48 \cdot 10^{-9}$  МПа<sup>-n</sup>/Г,  $n=4.5$ ,  $k=2$ .

Порівняння цих трьох груп результатів свідчить щодо задовільного характеру опису процесу деформування за допомогою розробленого методу та програмного забезпечення: практично до значення деформації у 35% розбіжність не перевершує 1.5%, а

при вищих її значеннях – 12%. По значеннях граничної (руйнівної) деформації відмінність складає 1.7%, по часу руйнування – 9%.

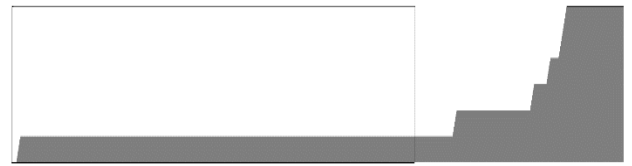


Рисунок 3 – Вигляд зразку зі сплаву АМг6 в момент руйнування. Половина перерізу

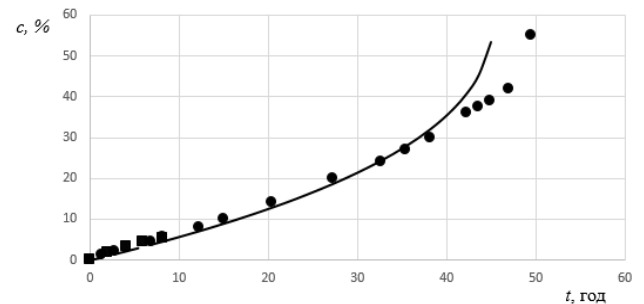


Рисунок 4 – Залежність деформації зразку зі сплаву АМг6 від часу

Як видно з результатів розрахунків, наведених на рис. 3 та 4, при розглянутій температурі процес руйнування зразку має в'язкий характер: до його закінчення довжина зразку збільшується в 1.5 рази, при цьому його товщина зменшується. Руйнування відбувається у районі нижнього (на рисунку лівого) захвату. Такі кількісні та якісні результати добре узгоджуються як з теоретичним розумінням процесу в'язкого деформування та руйнування [21], так й з відомим діапазоном 50-60% для руйнуваної деформації сплаву, що розглядається [20]

Далі розглянемо процес деформування зразку зі сплаву Д16АТ. В роботі [19] визначено константи, що входять до визначального рівняння (21) для швидкості деформації повзучості. Експериментально визначені значення констант склали  $B=3.39 \cdot 10^{-8}$  МПа<sup>-n</sup>/год;  $n=3$ .

Результати розрахунків повзучості зразку наведено на рис 5, який так само, як й у попередньому прикладі, містить первісну прямокутну форму моделі робочої частини зразку, темним кольором представлено форму матеріалу, отриману к моменту руйнування.



Рисунок 5 – Вигляд зразку зі сплаву Д16АТ в момент руйнування. Половина перерізу. Розрахунки тільки з використанням рівняння (22)

На рис. 6. наведено залежність деформації повзучості зразку зі сплаву Д16АТ від часу. На ньому експериментальні дані позначено квадратними точками.

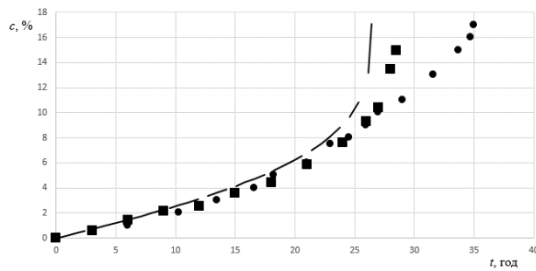


Рисунок 6 – Залежність деформації зразку зі сплаву Д16АТ від часу

Як видно з графіку рис. 6., руйнівна деформація цього сплаву складає приблизно 17%. За описом експерименту відомо, що руйнування зразків відбувалось за мішаним крихко-в'язким типом. Аналізуючи результати чисельних розрахунків (рис. 5), бачимо, що розрахункові дані, отримані для в'язкого процесу, дають істотно завищені результати – деформацію 59% та час до руйнування 155 годин. У зв'язку з цим, для врахування внеску крихкої складової до загального процесу руйнування [21] залучимо до моделювання рівняння стану, доповнені кінетичним рівнянням для параметру пошкоджуваності.

В роботі [19] визначено константи, що входять до рівнянь повзучості та накопичення пошкоджуваності. Для поточної конфігурації їх представлено у наступному вигляді

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B \frac{(\sigma_i)^{n-1}}{(1-\omega^r)^n} s_{ij}, \dot{\omega} = D \frac{(\sigma_{eq})^n}{(1-\omega^r)^n}, \quad (23)$$

$$\omega(x, t_0) = \omega_0, \omega(x, t_*) = \omega_*,$$

Еквівалентне напруження у кінетичному рівнянні для параметру пошкоджуваності  $\omega$  прийнято рівним інтенсивності напружень,  $\sigma_{eq} = \sigma_i$ , граничне значення параметру пошкоджуваності  $\omega_* = 0.95$ .  $B, D, n, r$  – константи, що визначено експериментально:  $B = 3.39 \cdot 10^{-8}$  МПа<sup>-n</sup>/год;  $n = 3$ ;  $D = 1.89 \cdot 10^{-7}$  МПа<sup>-n</sup>/год;  $r = 1.38$ .

Результати моделювання представлено на рис.7, де наведено остаточну форму зразку в момент руйнування 35 год, та на рис.6, на якому круглими точками відбито змінювання максимальної деформації у зразку у часі, отриману скінченноелементним моделюванням, а преривчастою лінією - розрахункові за рівняннями стану (22), записаними для простого напруженого стану.



Рисунок 7 – Вигляд зразку зі сплаву Д16АТ в момент руйнування. Половина перерізу. Розрахунки використання рівнянь (23)

Порівняння чисельних та експериментальних результатів свідчить щодо їхньої задовільної відповідності: повзучість протягом приблизно 25 годин описано з відмінністю декілька відсотків, значення

руйнівної деформації відрізняються на 12%, часу до руйнування (найгірша відповідність) - 19%.

Аналізуючи рис.7, приходимо до висновку, що якісний характер деформування, відомий з експерименту, є описаним вірно: зразки руйнувались з утворенням тріщини за всією шириною, як й визначено розрахунком. Розміри тріщини також визначено більш реалістично у порівнянні з результатами, отриманими з використанням тільки рівняння стану (21) (рис. 5).

Розрахунками також встановлено зменшення ширини зразку (0.3-0.5 мм), але воно не показано на схемі завдяки дискретному кроку переходу від елемента до елемента в реалізованому алгоритмі.

### Висновки.

Статтю присвячено викладенню методу розв'язання двовимірних задач повзучості для випадку великих деформацій. Реалізовано узагальнений підхід, в якому виконано перехід від постановки задачі з підходом Лагранжу до постановки для поточної конфігурації (Ейлера). Надано опис методу розрахунку, основаному на методі скінченних елементів для поточної конфігурації елемента, що деформується при повзучості.

Розглянуто плоский напружений стан. Представлено результати чисельного моделювання процесу руйнування робочих частин зразків з алюмінієвих сплавів, що випробувались на повзучість.

За даними скінченноелементного моделювання встановлено, що процеси зростання деформацій повзучості описуються задовільно для досить значних їхніх величин. У випадку чисто в'язкого руйнування внаслідок повзучості, яке притаманне сплаву АМгб при  $T=300$  С, розрахунки з використанням тільки рівняння теорії плинину надають задовільні оцінки часу руйнування та руйнівної деформації. У випадку змішаного, в'язко-крихкого типу руйнування (сплав Д16АТ при  $T=300$  С) задовільний опис деформування та руйнування стає можливим лише з використанням рівнянь повзучості з урахуванням накопиченої пошкоджуваності.

Проведені розрахунки, порівняння отриманих результатів з експериментальними даними надають змогу використання розробленого методу та програмного засобу для чисельного моделювання повзучості у загальному випадку скінченних деформацій.

### Список літератури

1. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Москва: Мир, 1965. 455 с.
2. Bonet J., Wood R.D. Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 283 p.
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013. 672 p.
4. Оден Дж.Т. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 560 с.
5. Simo J.C., Hughes N.J.R. Computational inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, Berlin, 1998. Vol. 7.
6. Crisfield M.A. Nonlinear finite element analysis of solids and structures. Volume 1 Essentials. John Wiley and Sons, 2000. 360 p.
7. Hallquist J. LS-Dyna theory manual: LSTC (Livermore Software

Technology Corporation). 2018.

8. *Mujzennek A.YU., Bogach A.A.* Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS DYNA. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. 106 с.

9. *Brocks W., Lin R.* An extended Chaboche viscoplastic law at finite strains and its numerical implementation //GKSS-Forschungszentrum report, GKSS 2003/20. 33 p.

10. *Saouni K.* Damage Mechanics in Metal Forming. John Wiley and Sons, 2012. 523 p.

11. *Mielke A., Rossi R., Savaré G.* Global Existence Results for Viscoplasticity at Finite Strain. Arch Rational Mech Anal, 2018. Vol. 227. P. 423–475.

12. *Рудаков К.М., Яковлев А.И.* Моделирование больших деформаций. Сообщение 4. Общие соотношения термопластичности и ползучести при использовании логарифмической меры деформации Генки. Науковий вісник НТУУ "КПІ", 2013. №2. С. 110-118.

13. *Wang H., Wu P.D., Tomé N., Huang Y.* A finite strain elastic-viscoplastic self-consistent model for polycrystalline materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. Vol. 58, Is. 4. P. 594-612.

14. *Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient. ZAMM. September 2017. Vol. 97, Is. 9. P 1083-1099

15. *Голованов А.И., Султанов К.У.* Большие вязкоупругопластические деформации трехмерных тел. Ученые записки Казанского гос. ун-та. Физ.-мат. Науки, 2005. Т.147. кн. 3. С. 75-89.

16. *Chaboche J.L.* Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers, Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34. P. 2239–2254.

17. *Бреславський Д.В., Корутко Ю.М., Татарінова О.А.* Проектування та розробка скінченноелементного програмного забезпечення. Харків: «Підручник НТУ «ХПІ», 2017. 232 с.

18. *Бреславський Д.В., Коновалов М.В., Татарінова О.А.* Препроцесорні програми для підготовки скінченноелементних сіток у випадку великих деформацій. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. № 46 (1218). С. 16-20.

19. *Konkin V.N., Morachkovskii O.K.* Creep and long-term strength of light alloys with anisotropic properties. Strength of Materials 1987. 19 (5). P. 626–31.

20. *Бреславський Д.В., Морачковський О.К.* Експериментальне дослідження циклічної повзучості алюмінієвих сплавів. Вісник Харківського державного політехнічного університету. Харків: ХДПУ, 1999. Вип.42. С.147-150.

21. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.

#### References (transliterated)

1. *Hryn A., Adkyns Dzh.* Bolshye upruhye deformatsyy u nelyneinaia mekhanika sploshnoi sredy [Large Elastic Deformations and Nonlinear Continuum Mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1965. 455 p.

2. *Bonet J., Wood R.D.* Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 283 p.

3. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Wood D.D.* The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013. 672 p.

4. *Oden Dzh.T.* Konechnye elementy v nelinejnoj mekhanike sploshnyh sred. [Finite elements in nonlinear mechanics of continuous media.]. Moscow, Mir Publ., 1976. 560 p.

5. *Simo J.C., Hughes N.J.R.* Computational inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, Berlin, 1998. Vol. 7,

6. *Crisfield M.A.* Nonlinear finite element analysis of solids and

structures. Volume 1 Essentials. John Wiley and Sons, 2000. 360 p.

7. *Hallquist J.* LS-Dyna theory manual: LSTC (Livermore Software Technology Corporation). 2018.

8. *Mujzennek A.YU., Bogach A.A.* Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе LS DYNA. [Mathematical modeling of impact and explosion processes in the LS DYNA program]. Пенза, ИЦ PSU Publ., 2005. 106 p.

9. *Brocks W., Lin R.* An extended Chaboche viscoplastic law at finite strains and its numerical implementation //GKSS-Forschungszentrum report, GKSS 2003/20. 33 p.

10. *Saouni K.* Damage Mechanics in Metal Forming. John Wiley and Sons, 2012. 523 p.

11. *Mielke A., Rossi R., Savaré G.* Global Existence Results for Viscoplasticity at Finite Strain. Arch Rational Mech Anal, 2018. Vol. 227. P. 423–475.

12. *Rudakov K.M., Yakovlev A.I.* Modelirovanie bol'shikh deformacij. Soobshchenie 4. Obshchie sootnosheniya termoplastichnosti i polzuchesti pri ispol'zovanii logarifmicheskoj mery deformacii Genki. [Simulation of large deformations. Communication 4. General relations of thermoplasticity and creep when using the Genki logarithmic strain measure]. Scientific news of NTUU "KPI", 2013. №2. P. 110-118.

13. *Wang H., Wu P.D., Tomé N., Huang Y.* A finite strain elastic-viscoplastic self-consistent model for polycrystalline materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. Vol. 58, Is. 4. P. 594-612.

14. *Shutov A.V., Larichkin A.Yu., Shutov V.A.* Modelling of cyclic creep in the finite strain range using a nested split of the deformation gradient. ZAMM. September 2017. Vol. 97, Is. 9. P 1083-1099

15. *Golovanov A.I., Sultanov K.U.* Bol'shie vyazkouprugoplasticheskie deformacii trekhmernih tel. [Large viscoelastoplastic deformations of three-dimensional bodies]. Scientific notes of Kazan State University. Phys.-mat. Science, 2005. T.147. Book 3. P. 75-89.

16. *Chaboche J.L.* Thermodynamic formulation of constitutive equations and application to the viscoplasticity and viscoelasticity of metals and polymers, Int. J. Solids Struct. 1997. Vol. 34. P. 2239–2254.

17. *Breslavskiy D.V., Korytko Yu.M., Tatarinova O.A.* Proektuvannia ta rozrobka skinchennoelementnoho prohramnoho zabezpechennia. [Design and development of finite element software]. Kharkiv «Pidruchnyk NTU «KhPI» Publ., 2017, 232 p.

18. *Breslavskiy D.V., Konovalov M.V., Tatarinova O.A.* Preprotsesorni prohramy dlia pidhotovky skinchennoelementnykh sitok u vypadku velykykh deformatsii. [Preprocessor programs for the preparation of finite element grids in the case of large deformations]. Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. № 46 (1218). P. 16-20.

19. *Konkin V.N., Morachkovskii O.K.* Creep and long-term strength of light alloys with anisotropic properties. Strength of Materials 1987. 19 (5). P. 626–31.

20. *Breslavskiy D.V., Morachkovskiy O.K.* Eksperymentalne doslidzhennia tsyklichnoi povzuchosti aliuminiievnykh splyaviv. [Experimental study of cyclic creep of aluminum alloys]. Bulletin of Kharkiv State Polytechnic University. Kharkiv: KhDPU, 1999. Vol. 42. P.147-150.

21. *Rabotnov YU.N.* Polzuchest' elementov konstrukcij. [Creep of structural elements]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p

*Hadziuta (received) 29.05.2021*

#### Відомості про авторів/ About the Authors

**Бреславський Дмитро Васильович** – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

**Breslavsky Dmytro Vasylovych** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

**Татарінова Оксана Андріївна** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com

**Tatarinova Oksana Andriivna** – Candidate of Technical Sciences, Dozent, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"; tel.: (057)-707-64-54; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com