

В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М. В. СЛІПЧЕНКО
ДИНАМІКА ОСЦИЛЯТОРА З КВАДРАТИЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ У ВИРАЗІ СИЛИ ПРУЖНОСТІ,
НАВАНТАЖЕНОГО СТУПІНЧАСТИМ ІМПУЛЬСОМ

Описано нестационарні коливання осцилятора з квадратичною нелінійністю у виразі сили пружності при дії миттєво прикладеної сталої сили. Аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку виражено через періодичні еліптичні функції Якобі. Показано, що коефіцієнт динамічності нелінійної системи залежить від значення миттєво прикладеної сили і напрямку її дії, оскільки характеристика пружності системи несиметрична. Якщо сила спрямована в бік додатних переміщень, то характеристика системи «жорстка» і коефіцієнт динамічності знаходиться в проміжку $(\sqrt{3}; 2)$, тобто він менший, ніж у лінійної системи. У випадку, коли сила спрямована в бік від'ємних переміщень, характеристика пружності системи «м'яка» і коефіцієнт динамічності попадає в проміжок $(2; 3)$, тобто він більший ніж у лінійної системи. У другому випадку деформування існують статичне і динамічне критичне значення сили, перевернення яких призводить до втрати стійкості системи. Динамічне критичне значення сили менше, ніж статичне. Оскільки переміщення осцилятора виражаються через функції Якобі, запропонована формула наближеного їх обчислення з використанням таблиці повного еліптичного інтегралу першого роду. Наведено результати розрахунків, які ілюструють можливості викладеної теорії. Для порівняння, паралельно з використанням аналітичних розв'язків, проводилось чисельне комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння руху. Збіжність результатів розрахунку двома способами підтвердила адекватність виведених формул, які придатні також для аналізу руху квадратично нелінійного осцилятора з симетричною характеристикою пружності. Таким чином, розглянута нелінійна задача має аналітичний розв'язок в еліптичних функціях, а процес руху залежить від того, в який бік діє зовнішня сила. Крім того, при дії сили в бік меншої жорсткості можлива втрата стійкості системи.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, квадратична нелінійність, ступінчастий силовий імпульс, еліптичні функції Якобі.

Описано нестационарные колебания осциллятора с квадратичной нелинейностью в выражении силы упругости при действии мгновенно приложенной постоянной силы. Аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка выражено через периодические эллиптические функции Якоби. Показано, что коэффициент динамичности нелинейной системы зависит от значения мгновенно приложенной силы и направления ее действия, поскольку характеристика упругости системы несимметрична. Если сила направлена в сторону положительных перемещений, то характеристика системы «жесткая» и коэффициент динамичности находится в промежутке $(\sqrt{3}; 2)$, то есть он меньше, чем у линейной системы. В случае, когда сила направлена в сторону отрицательных перемещений, характеристика упругости системы «мягкая» и коэффициент динамичности попадает в промежуток $(2, 3)$, то есть он больше, чем в линейной системы. Во втором случае деформирования существуют статическое и динамическое критические значения силы, превышение которых приводит к потере устойчивости системы. Динамическое критическое значение силы меньше, чем статическое. Поскольку перемещение осциллятора выражаются через функции Якоби, предложенная формула приближенного их вычисления с использованием таблицы полного эллиптического интеграла первого рода. Приведены результаты расчетов, которые иллюстрируют возможности изложенной теории. Для сравнения, параллельно с использованием аналитических решений, проводилось численное компьютерное интегрирование дифференциального уравнения движения. Сходимость результатов расчета двумя способами подтвердила адекватность выведенных формул, которые годятся также для анализа движения квадратично нелинейного осциллятора с симметричной характеристикой упругости. Таким образом, рассмотренная нелинейная задача имеет аналитическое решение в эллиптических функциях, а процесс движения зависит от того, в какую сторону действует внешняя сила. Кроме того, при воздействии силы в сторону меньшей жесткости возможна потеря устойчивости системы.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, квадратичная нелинейность, ступенчатый силовый импульс, эллиптические функции Якоби.

The unsteady oscillations of an oscillator with a quadratic nonlinearity in the expression of the elastic force under the action of an instantaneously applied constant force are described. The analytical solution of a second-order nonlinear differential equation is expressed in terms of periodic Jacobi elliptic functions. It is shown that the dynamic coefficient of a nonlinear system depends on the value of the instantaneously applied force and the direction of its action, since the elasticity characteristic of the system is asymmetric. If the force is directed towards positive displacements, then the characteristic of the system is "rigid" and the dynamic coefficient is in the interval $(\sqrt{3}; 2)$, that is, it is smaller than that of a linear system. In the case when the force is directed towards negative displacements, the elasticity characteristic of the system is «soft» and the dynamic coefficient falls into the gap $(2, 3)$, that is, it is larger than in the linear system. In the second case of deformation, there are static and dynamic critical values of the force, the excess of which leads to a loss of stability of the system. The dynamic critical force value is less than the static one. Since the displacement of the oscillator is expressed in terms of the Jacobi functions, the proposed formula for their approximate calculation using the table of the full elliptic integral of the first kind. The results of calculations are given, which illustrate the possibilities of the stated theory. For comparison, in parallel with the use of analytical solutions, numerical computer integration of the differential equation of motion was carried out. The convergence of the calculation results in two ways confirmed the adequacy of the derived formulas, which are also suitable for analyzing the motion of a quadratically nonlinear oscillator with a symmetric elastic characteristic. Thus, the considered nonlinear problem has an analytical solution in elliptic functions, and the process of motion depends on the direction in which the external force acts. In addition, when a force is applied towards a lower rigidity, a loss of system stability is possible.

Keywords: nonlinear oscillator, quadratic nonlinearity, stepwise force impulse, Jacobi elliptic functions.

Вступ. Коливання є широко розповсюдженими в елементах конструкцій. Дослідженню коливань присвячено багато робіт, але й нині ця область викликає зацікавленість дослідників. Однією з властивостей нелінійних коливань є існування коливальних систем, для яких значення коефіцієнту динамічності залежать від величини та напрямку миттєво прикладеної сили. В роботі розглянуто осцилятор з квадратичною характеристикою пружності і умови за яких можлива така залежність.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження нелінійних коливань осциляторів пов'язане з розвитком методів нелінійної механіки і має тривалу історію [1]. Значні успіхи в цій галузі науки належать Московсько-Горьківській [2] та Київській [3] школам, де розглядали в основному автоколивання, вільні та вимушені стаціонарні коливання. Накопичені роботи останніх років у згаданому напрямі теорії коливань систематизовано у вітчизняних [4-6] та зарубіжних [7] монографічних виданнях і численних статтях,

зокрема [8-11]. Відомі досягнення у вивченні нестационарних коливань нелінійних систем стосуються також режимів переходу через резонанс [12, 13], коли рух проходить із змінними амплітудами і частотами. Вагомі здобутки стали можливими завдяки розробці й застосуванню асимптотичних методів нелінійної механіки в поєднанні з чисельними методами. Існують також і інші способи наближеного аналізу таких систем [14].

Значно менше відомих публікацій висвітлюють особливості нестационарних коливань нелінійних осциляторів при імпульсних навантаженнях, хоча тут теж є можливість будувати точні аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь руху в спеціальних функціях [15, 16]. Про них далі йдеться у цій роботі.

Метою статті є дослідження особливостей руху осцилятора, що має квадратичну нелінійність у виразі сили пружності, при дії ступінчастого імпульсу.

Саме при такій нелінійності осцилятор має несиметричну силову характеристику, що вносить певні особливості в процес руху. Його вільні коливання методами нелінійної механіки досліджували в [17], де відзначено, що не всі із асимптотичних методів, без належної модернізації, придатності для аналізу руху. Тому в [17] задіяно метод І.Г. Малкіна.

Основна частина роботи.

Тут розглянуто динамічне деформування коливальної системи миттєво прикладеною сталою силою, причому будують точні аналітичні розв'язки рівняння руху. При цьому розрізняємо два випадки деформування. У першому з них зовнішню силу вважаємо спрямованою в бік більшої жорсткості системи (прийнятих додатних переміщень вгору), а в другому – в бік меншої жорсткості (від'ємних переміщень вниз).

1. У першому випадку рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m \ddot{x} + c_1 x + c_2 x^2 = PH(t), \quad (1)$$

де m – маса осцилятора; $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – характеристики пружності системи; P – значення миттєво прикладеної сили; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда.

Рівняння (1) розв'язуємо при нульових початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Уведенням позначення $y = \dot{x}^2$ рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2c_1}{m} x + \frac{2c_2}{m} x^2 = \frac{2P}{m}.$$

Проінтегрувавши його, з урахуванням прийнятих початкових умов (2), отримуємо:

$$y(x) = \frac{2P}{m} x - \frac{c_1}{m} x^2 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{m} x^3. \quad (3)$$

Позначивши розмах прямого ходу вгору символом a маємо рівняння $y(a) = 0$, яке з урахуванням (3) стає квадратним:

$$2P - c_1 a - \frac{2}{3} c_2 a^2 = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$a = -\frac{3}{4} \frac{c_1}{c_2} + \sqrt{\frac{9}{16} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{3P}{c_2}}. \quad (4)$$

Статичне відхилення осцилятора x_c під дією сили P задовольняє рівнянню:

$$c_2 x_c^2 + c_1 x_c = P$$

і становить:

$$x_c = -\frac{c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{P}{c_2}}. \quad (5)$$

Тому, згідно з (4), (5), коефіцієнт динамічності системи K_d дорівнює:

$$K_d = \frac{a}{x_c} = \frac{3}{2} \frac{\sqrt{1 + \frac{16}{3} \frac{Pc_2}{c_1^2}} - 1}{\sqrt{1 + 4 \frac{Pc_2}{c_1^2}} - 1}. \quad (6)$$

Він не залежить від m , але залежить від P , що є наслідком нелінійності системи.

Виконавши в (6) граничний перехід $P \rightarrow 0$, отримуємо:

$$\lim_{P \rightarrow 0} K_d = \frac{3 \cdot 8/3}{2 \cdot 2} = 2.$$

У другому граничному випадку $P \rightarrow \infty$ маємо:

$$\lim_{P \rightarrow \infty} K_d = \frac{3 \cdot 4/\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \sqrt{3} < 2.$$

Отже, при збільшенні значення миттєво прикладеної сили зменшується K_d на проміжку

$$K_d \in (\sqrt{3}; 2).$$

Граничний перехід $c_2 \rightarrow 0$ дає:

$$\lim_{c_2 \rightarrow 0} K_d = 2,$$

що відповідає лінійній системі.

Розглянемо далі переміщення прямого ходу $x \in [0; a]$, де другий інтеграл рівняння (1) має вигляд:

$$t = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{y(x)}} = \sqrt{m} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x \left(2P - c_1 x - \frac{2}{3} c_2 x^2 \right)}}.$$

Для його обчислення переходимо до нової змінної інтегрування $x = u^2$. Тоді:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{(a-u^2)(b+u^2)}}. \quad (7)$$

Тут $b = a + \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2}$, a – визначено в (4).

Інтеграл в (7) відноситься до табличних. Згідно з [18]:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{a+b}} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+x}}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right), \quad (8)$$

де символом F – позначено неповний еліптичний інтеграл першого роду.

Задавши в (8) $x = a$, отримуємо формулу тривалості t_1 прямого ходу (напівциклу коливач):

$$t_1 = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2(a+b)}} K\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right).$$

Тут K – повний еліптичний інтеграл першого роду, таблиці якого надруковано в [19, 20] та інших виданнях із спеціальній функцій.

Уведенням позначення $\tau = \frac{\sqrt{c_2(a+b)}}{\sqrt{6m}} t$ виразу

(8) надаємо вигляд:

$$F\left(\arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+x}}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right) = \tau.$$

Звідки, шляхом інверсії, виводимо формулу переміщення осцилятора під час прямого ходу вгору:

$$x(t) = \frac{ab \operatorname{sn}^2\left(\tau; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)}{a+b - a \operatorname{sn}^2\left(\tau; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)}, \quad (9)$$

в якій $\operatorname{sn}\left(\tau; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)$ – еліптичний синус Якобі.

На зворотному ході, коли осцилятор переміщується вниз з положення $x = a$ в положення $x = 0$ квадрат швидкості становить:

$$y(x) = \frac{2}{3} \frac{c_2}{m} (a-x)x(b+x).$$

Другий інтеграл рівняння (1) має форму:

$$t - t_1 = \int_x^a \frac{dx}{\sqrt{y(x)}} = \frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2c_2}} \int_x^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)x(b+x)}}. \quad (10)$$

Переходом до нової змінної інтегрування $x = z^2$, замість (10) одержуємо:

$$\begin{aligned} t - t_1 &= \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \times \\ &\times \left(\int_0^{\sqrt{a}} \frac{dz}{\sqrt{(a-z^2)(b+z^2)}} - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dz}{\sqrt{(a-z^2)(b+z^2)}} \right) = \\ &= t_1 - \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{a+b}} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{b+x}}; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right). \end{aligned}$$

Звідки випливає, що:

$$x(t) = \frac{ab \operatorname{sn}^2\left(\xi; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)}{a+b - a \operatorname{sn}^2\left(\xi; \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right)}. \quad (11)$$

$$\text{Тут } \xi = \frac{\sqrt{c_2(a+b)}}{\sqrt{6m}} (2t_1 - t), \quad t \in [t_1; 2t_1].$$

Формули (9) і (11) мають однакову форму, що є наслідком ідеальної пружності системи, коли перший і другий напівцикли коливач симетричні відносно вертикалі $t = t_1$ на графіку $x(t)$.

2. Далі розглянемо другий випадок деформування, при якому:

$$m \ddot{x} + c_1 x + c_2 x^2 = -PH(t). \quad (12)$$

У цьому випадку навантаження на прямому ході квадрат швидкості становить:

$$y(x) = -\frac{2P}{m} x - \frac{c_1}{m} x^2 - \frac{2}{3} \frac{c_2}{m} x^3, \quad (13)$$

де $x \in [-a_1, 0]$, a_1 – розмах коливач вниз. Його значення подається формулою:

$$a_1 = \frac{3}{4} \frac{c_1}{c_2} - \sqrt{\frac{9}{16} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \frac{3P}{c_2}}. \quad (14)$$

Оскільки тут підкореневий вираз не може бути від'ємним, це накладає обмеження на значення миттєво прикладеної сили:

$$P < P_{\text{кд}} = \frac{3}{16} \frac{c_1^2}{c_2}. \quad (15)$$

Критичне значення динамічного навантаження $P_{\text{кд}}$ не залежить від маси системи m .

Статичне відхилення системи вниз x_{c1} становить:

$$x_{c1} = -\frac{c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \frac{P}{c_2}}.$$

Тут підкореневий вираз додатній, коли:

$$P < P_{\text{кк}} = \frac{1}{4} \frac{c_1^2}{c_2}.$$

Отже критичне значення статичного навантаження $P_{\text{кк}}$ більше за критичне значення динамічного навантаження $P_{\text{кд}}$.

Якщо виконується нерівність (15), то коефіцієнт динамічності становить:

$$K_{\text{д}} = \frac{a_1}{|x_{c1}|} = \frac{3}{2} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{16}{3} \frac{Pc_2}{c_1^2}}}{1 - \sqrt{1 - 4 \frac{Pc_2}{c_1^2}}}. \quad (16)$$

Обчислення границь в (16) дає:

$$\lim_{P \rightarrow 0} K_{\text{д}} = 2; \quad \lim_{P \rightarrow P_{\text{кд}}} K_{\text{д}} = 3.$$

Таким чином, збільшення P супроводжується збільшенням коефіцієнта динамічності в інтервалі

$K_d \in (2; 3)$.

Виведемо формулу переміщення прямого ходу вниз. Для цього скористаємося другим інтегралом рівняння (12):

$$t = \int_x^0 \frac{dx}{\sqrt{y(x)}},$$

що з урахуванням (13) має вигляд:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{-x}} \frac{du}{\sqrt{(a_1 - u^2)(b_1 - u^2)}}. \quad (17)$$

Тут $b_1 = a_1 + 2\sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - \frac{3P}{c_2}}$, a_1 – визначено

в (14).

Інтеграл в (17) теж виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду. Згідно з [18]

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2 b_1}} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{a_1}}; \sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\right), \quad (18)$$

де символом F – позначено неповний еліптичний інтеграл першого роду.

Тому тривалість руху осцилятора вниз t_2 становить:

$$t_2 = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{b_1 c_2}} K\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\right).$$

Інверсія виразу (18) дає:

$$x(t) = -a_1 \operatorname{sn}^2\left(\eta; \sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\right), \quad (19)$$

Тут: $\eta = \frac{\sqrt{b_1 c_2}}{6m} t$.

Формулу (19) можна використати для розрахунку переміщень і зворотного ходу з положення $x = -a_1$ в положення $x = 0$, якщо

покласти в ній $\eta = \frac{\sqrt{b_1 c_2}}{6m} (2t_2 - t)$. При цьому

$t \in [t_2; 2t_2]$; $x \in [-a; 0]$.

Числові результати. Для реалізації одержаних аналітичних розв'язків потрібно обчислювати значення еліптичного синуса, що можна проводити за наближеною формулою [6]:

$$\operatorname{sn}\left(\tau; \sqrt{\frac{a}{a+b}}\right) = \sin\left[\Theta\left(\tau; \sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)\right], \quad (20)$$

в якій:

$$\Theta\left(\tau; \sqrt{\frac{a}{a+b}}\right) \approx \frac{\pi\tau}{2K} + 2 \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin \frac{\pi\tau}{K}}{1 - \varepsilon \cos \frac{\pi\tau}{K}} - \frac{\varepsilon^3}{2 + \varepsilon^2} \sin \frac{\pi\tau}{K} \right];$$

$$K = K\left(\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right); K' = K\left(\sqrt{1 - \frac{a}{a+b}}\right); \varepsilon = \exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right).$$

Розрахунки проводимо при $m = 2$ кг; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 3200$ Н/м²; $P = 20$ Н.

У першому варіанті навантаження: $a = 0,044677$ м; $x_c = 0,022902$ м; $K_d = 1,9508$; $b = 0,419677$ м; $K = 1,61082$; $t_1 = 0,14475$ с; $K' = 2,59630$; $\varepsilon = 0,0063229$. Результати обчислень $x(t)$, для окремих t , за формулами (9), (20), (11), (20) записано в табл. 1. Там, для порівняння, вказано також $x(t)$, до яких призводить чисельне комп'ютерне інтегрування рівняння (1).

Спостерігається гарна збіжність результатів розрахунку двома способами, що підтверджує вірогідність аналітичних розв'язків.

Більш повна картина коливань подана графічно на рис. 1, який одержано чисельним розв'язанням задачі Коші на комп'ютері.

Таблиця 1 – Значення $x(t)$ у першому варіанті навантаження

100, с	Формули (9), (20)	Чисельна інтеграція	100, с	Формули (11), (20)	Чисельна інтеграція
	Значення 100x(t), м			Значення 100x(t), м	
3	0,4365	0,4366	15	4,4525	4,4525
6	1,5887	1,5888	18	3,8177	3,8179
9	3,0185	3,0187	21	2,5226	2,5228
12	4,1379	4,1380	24	1,1266	1,1267

Таблиця 2 – Значення $x(t)$ у другому варіанті навантаження

100, с	Формули (19), (20)	Чисельна інтеграція	100, с	Формули (19), (20)	Чисельна інтеграція
	Значення -100x(t), м			Значення -100x(t), м	
4	0,7587	0,7587	20	5,7843	5,7844
8	2,5995	2,5997	24	4,5850	4,5852
12	4,5620	4,5621	28	2,6276	2,6278
16	5,7757	5,7757	32	0,7786	0,7784

У другому варіанті навантаження: $a_1 = 0,059413$ м; $x_{c1} = -0,028175$ м; $K_d = 2,1087$; $b_1 = 0,315587$ м; $K = 1,65379$; $K' = 2,28493$; $\varepsilon = 0,0130297$; $t_2 = 0,18027$ с; $P_{кд} = 37,5$ Н; $P_{кв} = 50$ Н.

Обчислені за формулою (19) та чисельним інтегруванням рівняння руху на комп'ютері $x(t)$ записано в табл. 2.

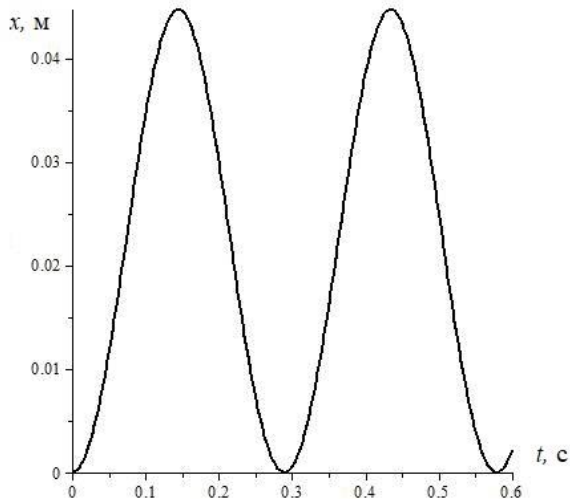


Рис. 1 – Графік коливань осцилятора при першому варіанті навантаження

Тут теж маємо гарну узгодженість результатів розрахунку двома методами.

Графік коливань осцилятора в другому варіанті навантаження подано на рис. 2.

Якісну зміну процесу руху осцилятора маємо на рис. 3, де він одержаний чисельним інтегруванням рівняння (1) при $P = 40\text{Н} > P_{кд} = 37,5$ Н.

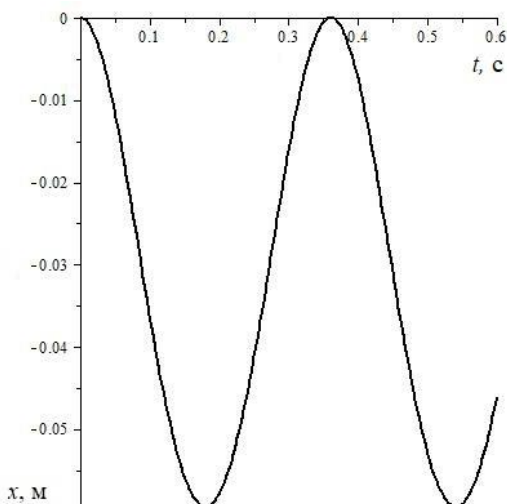


Рис. 2 – Графік коливань осцилятора при $P = 20\text{Н}$ (до $t = 0,6$ с)

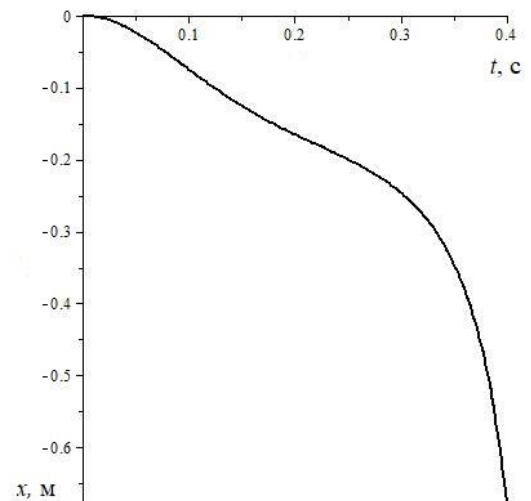


Рис. 3 – Графік руху осцилятора при $P = 40\text{Н}$ (до $t = 0,4$ с)

На рис. 3 спостерігається втрата стійкості руху коливальної системи.

Висновки. Розглянута нелінійна задача має аналітичний розв'язок в еліптичних функціях. Процес руху залежить від того, в який бік діє зовнішня сила. При дії сили в бік меншої жорсткості можлива втрата стійкості системи. Проведення чисельного комп'ютерного інтегрування диференціального рівняння руху підтвердило адекватність побудованих аналітичних розв'язків.

Список літератури

1. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь : Вебер, 2013. – 403 с.
2. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Вит, С. Э. Хайкин. – Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 916 с.
3. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
4. Аврамов В. К. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления : в 2 т. / В. К. Аврамов, Ю. В. Михлин. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
5. Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
6. Ольшанський В. П. Нелінійні коливання дисипативних осциляторів / В. П. Ольшанський, М. В. Сліпченко, О. І. Спольник, В. В. Бурлака. – Харків : Місдруку, 2020. – 268 с.
7. Cveticanin L. Strong nonlinear oscillators. Analytical Solution. 2nd edition / L. Cveticanin. – Springer : Cham, 2018. – 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1.
8. Cveticanin L. Application of Ateb and generalized trigonometric functions for nonlinear oscillations / L. Cveticanin, S. Vujkov, Cveticanin D // Arch. Appl. Mech. – 2020. – Vol. 90. P. 2579-2587. doi.org/10.1007/s00419-020-01740-0
9. Cveticanin L. Oscillation with a sum of nonintegral-order nonlinearities / L. Cveticanin, T. Pogany // Journal of Applied Mathematics. – 2012. – Vol. 12. – Article ID 649050 – 20 pages. doi.org/10.1155/2012/649050
10. Gendelman O. V. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillation. / O. V. Gendelman, A. F. Vakakis // Chaos, Solitons and Fractals. – 2000. – Vol. 11, No 10. – P. 1535-1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4
11. Танченко А. Ю. Дослідження субгармонічних режимів

коливань на прикладі системи з двома ступенями свободи при імпульсному навантаженні / А. Ю. Танченко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 38 (2018). – С. 49–56. doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152481

12. Митропольский Ю. А. Избранные труды в 2-х томах / Ю. А. Митропольский. – Киев: Наукова думка, 2012. – 504 с.

13. Goloskokov E. G. Einstationare Schwirungen mechanischer systeme / E. G. Goloskokov, A. P. Filippov. – Berlin: Akademie-Verlag. – 1971. – 352 p.

14. Ольшанский В. П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский. – Харьков: Мискдрук, 2014. – 264 с

15. Ольшанський В. П. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2017. – № 6 (1228). – С. 86–94.

16. Ольшанський В. П. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – 2017. – № 39 (1261). – С. 62–67.

17. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкості руху / М. В. Василенко, О. М. Алексійчук. – Київ: Вища школа, 2004. – 525 с.

18. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Москва: Наука, 1962. – 1100 с.

19. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / М. Абрамовиц, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.

20. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Энде, Ф. Леш – Москва: Наука, 1977. – 344 с.

References (transliterated)

1. Larin A. A. *Ocherki istorii razvitiya teorii mekhanicheskikh kolebaniy* [Essays on the history of the development of the theory of mechanical vibrations]. Sevastopol, Veber Publ., 2013. 403 p.

2. Andronov A. A., Vit A. A., Khaykin S. E. *Teoriya kolebaniy* [Oscillation theory]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1959. 916 p.

3. Bogolyubov N. N., Mitropolskiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.

4. Avramov V. K., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh sistem. Modeli, metody, yavleniya: v 2 t.* [Nonlinear dynamics of elastic systems. Models, methods, phenomena: in 2 volumes]. Moscow-Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2015, Vol. 1. 716 p.

5. Pukach P. Ya. *Yakisni metody doslidzhennya nelineynykh kolyval'nykh system* [Qualitative methods of research of nonlinear oscillatory systems]. Lviv, Lvivska politehnika Publ., 2014. 288 p.

6. Olshanskiy V. P., Slipchenko M. V., Spolnik O. I., Burlaka V. V. *Nelinijni kolyvannya dysypatyvnyh oscylyatoriv* [Nonlinear oscillations of dissipative oscillators]. Kharkiv, Miskdruk. Publ., 2020. 268 p.

7. Cveticanin L. *Strong nonlinear oscillators. Analytical solution. 2nd edition.* Springer, Cham, 2018. 317 p. doi.org/10.1007/978-3-319-58826-1

8. Cveticanin L., Vujkov S., Cveticanin D. Application of Ateb and generatized trigonometric functions for nonlinear oscillations. *Arch. Appl. Mech.* 2020, Vol. 90, pp. 2579-2587. doi.org/10.1007/s00419-020-01740-0

9. Cveticanin L., Pogany T. Oscillation with a sum of nonintegral-order nonlinearities. *Journal of Applied Mathematics.* 2012, Vol. 2012, Article ID 649050, 20 p. doi.org/10.1155/2012/649050

10. Gendelman O. V., Vakakis A. F. Transition from localization to nonlocalization in strongly nonlinear damped oscillation. *Chaos, Solitons and Fractals.* 2000, Vol. 11, No 10, pp. 1535-1542. doi.org/10.1016/S0960-0779(99)00076-4

11. Tanchenko A. Yu. *Doslidzhennia subharmonichnykh rezhymiv kolyvan na prykladi systemy z dvoma stupeniamy svobody pry impulsnomu navantazheni* [Investigation of subharmonic modes of oscillations on the example of a system with two degrees of freedom under pulse loading]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn* [Bulletin of NTU "Khpi". Series: Dynamics and strength of machines]. 2018, No 38 (2018), P. 49–56. doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152481

12. Mitropolskiy Yu. A. *Izbrannyye trudy v 2-kh tomakh* [Selected works in 2 volumes]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 2012. 504 p.

13. Goloskokov E. G., Filippov A. P. *Einstationare Schwirungen mechanischer systeme.* Berlin, Akademie-Verlag Publ., 1971. 352 p.

14. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebaniy oscylyatorov* [VBK method in calculating non-stationary oscillations of oscillators]. Kharkov, Miskdruk Publ., 2014. 264 p.

15. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Kolyvannya kubichno nelineynogo oscylyatora, sprychyneni impulsnym navantazhennyam* [Cubic oscillations of a nonlinear oscillator caused by a pulse load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modelyuvannya v tehnici ta texnologiyah* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technology]. 2017, No 6 (1228), pp. 86-94.

16. Olshanskiy V. P., Olshanskiy S. V. *Kolyvannya kvadratichno nelineynoho oscylyatora, sprychyneni impulsnym navantazhennyam* [Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by a pulse load]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Dynamika i mitsnist mashyn* [Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines]. 2017, No 39 (1261), pp. 62–67.

17. Vasylenko M. V. *Alekseychuk O. M. Teoriya kolyvan i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyiv, Vyscha shkola Publ., 2004. 525 p.

18. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.

19. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsyal'nyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Special functions reference book (with formulas, graphs and math tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.

20. Yanke Ye., Ende F., Lesh F. *Spetsyalnyye funktsii* [Special functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 344 p.

Надійшла (received) 05.12.2021

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанський Василь Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, професор кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com; ORCID: 0000-0003-1407-4476

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанський Станіслав Васильович, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, доцент кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com; ORCID: 0000-0001-7376-7550

Сліпченко Максим Володимирович (Сліпченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodymyrovych) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка; виконуючий обов'язки завідувача кафедри фізики і теоретичної механіки; тел. (066) 712-09-89. E-mail: Slipchenko1982@gmail.com; ORCID:0000-0002-9728-661X