

М.Ю. РАЙВАХОВСЬКИЙ, А.Г. АНДРЕЄВ

ДОСЛІДЖЕННЯ НДС ЛОПАТІ НИЗЬКОНАПІРНОЇ ПОВОРОТНО-ЛОПАТЕВОЇ ГІДРОТУРБИНИ

В ході цього дослідження розробляється та оптимізується програмне забезпечення для аналізу напружено-деформованого стану лопаті низьконапірної поворотно-лопатевої гідротурбіни. Аналізується математична модель, згідно з якою лопать, яка насправді є пологою оболонкою і закріплена частково, замінюється пластиною змінної жорсткості, що представляє в плані кільцевий сектор з затисненим внутрішнім дуговим краєм. В ході дослідження розроблено прикладне програмне забезпечення, яке дозволяє за допомогою варіаційного методу Рітца проводити дослідження напружено-деформованого стану різних лопатей в залежності від їх геометричних і механічних параметрів, а також зовнішніх навантажень. Геометричними параметрами лопаті є: внутрішній і зовнішній радіуси кільцевого сектора, кут кільцевого сектора, максимальна товщина лопаті і інтерполяційна сітка для знаходження відносних товщин лопаті. Механічними параметрами є модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлена лопать, навантаження приймається рівномірно розподіленим. Оскільки товщина лопаті змінна, входними даними є відносні товщини лопаті в різних точках. Для обчислення проміжних значень застосовуються білінійна інтерполяція і інтерполяція Лагранжа 9-ї степені. Аналізується точність і обчислювальна складність методів чисельного інтегрування, а саме інтерполяція підінтегральної функції поліномом з подальшим аналітичним обчисленням і використання квадратурної формули, отриманої в результаті повторного інтегрування із застосуванням формули Сімпсона. На підставі порівняння результатів робиться висновок про доцільність застосування поліноміальної інтерполяції з подальшим аналітичним розв'язком. За допомогою розробленого програмного комплексу проводиться розрахунок напружено-деформованого стану пластини, яка апроксимує реальну модель лопаті ЛМЗ (ПЛ510), результати якого порівнюються з експериментальними даними. Здійснюється аналіз декількох конфігурацій лопаті.

Ключові слова: лопать, пластина, гідротурбіна, оптимізація, напружено-деформований стан, варіаційний метод Рітца.

Н. Ю. РАЙВАХОВСКИЙ, А. Г. АНДРЕЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ НДС ЛОПАСТИ НИЗЬКОНАПОРНОЙ ПОВОРОТНО-ЛОПАСТНОЙ ГИДРОТУРБИНЫ

В ходе этого исследования разрабатывается программное обеспечение для исследования напряженно-деформированного состояния лопасти низконапорной поворотной-лопастной гидротурбины. Анализируется математическая модель, согласно которой лопать, которая на самом деле является пологой оболочкой и закреплена частично, заменяется пластиной переменной жесткости, представляющей в плане кольцевой сектор с защемленным внутренним дуговым краем. В ходе исследования разработано прикладное программное обеспечение, которое позволяет при помощи вариационного метода Ритца производить исследование напряженно-деформированного состояния различных лопастей в зависимости от их геометрических и механических параметров, а также внешних нагрузок. Геометрическими параметрами лопасти являются: внутренний и внешний радиусы кольцевого сектора, угол кольцевого сектора, максимальная толщина лопасти и относительные толщины в разных точках. Механическими параметрами являются модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена лопать, нагрузка принимается равномерно распределенной. Поскольку толщина лопасти переменная, входными данными являются относительные толщины лопасти в разных точках. Для вычисления промежуточных значений применяются билинейная интерполяция и интерполяция Лагранжа 9-й степени. Анализируется точность и временная сложность методов численного интегрирования, а именно интерполяция подынтегральной функции полиномом с последующим аналитическим вычислением и использование квадратурной формулы, полученной в результате повторного интегрирования с применением формулы Симпсона. На основании сравнения результатов делается вывод о целесообразности применения полиномиальной интерполяции с последующим аналитическим решением. При помощи разработанного программного комплекса производится расчет напряженно-деформированного состояния пластины, которая аппроксимирует реальную модель лопасти ЛМЗ (ПЛ510), результаты которого сравниваются с экспериментальными данными. Также производится анализ нескольких конфигураций лопасти.

Ключевые слова: лопать, пластина, гидротурбина, оптимизация, напряженно-деформированное состояние, метод Ритца.

M. Y. RAIIVAKHOVSKYI, A. G. ANDREEV

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF A BLADE OF A LOW-PRESSURE HYDRAULIC TURBINE

In this paper, software, that allows studying the stress-strain state of the blade of a low-pressure hydraulic turbine, is being developed. A mathematical model according to which the blade, which is actually a hollow shell and is partially fixed, is replaced by a variable stiffness plate, representing in plan an annular sector with a pinched inner arc edge, is analyzed. In this paper, application software which enables the stress-strain analysis of various blades to be investigated using the Ritz variation method, depending on their geometrical and mechanical parameters as well as external loads, is being developed. The geometrical parameters of the blade are: inner and outer radii of the annular sector, annular sector angle, maximum blade thickness and relative thicknesses at different points. Mechanical parameters are the Young's modulus and the Poisson's ratio of the material from which the blade is made, and the load is

assumed to be evenly distributed. Since the thickness of the blade is variable, the input data is the relative thicknesses of the blade at different points. Bilinear interpolation and Lagrange polynomials of 9th degree are used to calculate the intermediate values. Based on the comparison of the results, the conclusion, that using bilinear interpolation is more expedient for calculating the value of sub-integral function, is made. The accuracy and temporal complexity of the numerical integration methods are analyzed, namely interpolation of the sub-integral function by a polynomial followed by analytical calculation and the use of a quadrature formula resulting from repeated integration using the Simpson's rule. Based on the comparison of the results, the conclusion, that polynomial interpolation with the subsequent analytical solution is expedient, is made. The developed software package is used to calculate the stress-strain state of the plate that approximates the real LMZ blade (PL510). The results are compared with experimental data. Several blade configurations are also analyzed.

Key words: blade, plate, hydraulic turbine, optimization, stress-strain state, Ritz method.

Вступ. Завдяки своїм конструктивним особливостям поворотно-лопатевої гідротурбіни широко застосовуються в інженерних спорудах, в яких присутня велика витрата води, непостійний і низький тиск. Особливо широко вони застосовуються в гідроелектростанціях, вдосконалення яких особливо актуально з огляду на відсутність шкідливих викидів в процесі вироблення електроенергії. Ефективність турбіни значною мірою визначається формою і конструктивними особливостями лопаті, тому дослідження різних математичних моделей, а також методів розрахунку деформацій і напружень, що виникають в наслідок навантажень на лопать, є необхідним для подальшої оптимізації механізму.

Мета роботи. Метою цієї праці є дослідження НДС лопаті. А саме аналіз запропонованої математичної моделі і розробка програмного забезпечення для знаходження переміщень і максимальних напружень в радіальному та окружному напрямках, порівняння ефективності різних чисельних методів.

Математична модель. Лопать є слабовикривленою оболонкою змінної товщини. З огляду на складності граничних умов і диференціальних рівнянь розрахунок такої оболонки є досить трудомістким, тому на практиці доводиться застосовувати чисельні методи.

Розрахункова схема для розв'язку задачі про дослідження НДС лопаті зображена на рис. 1.

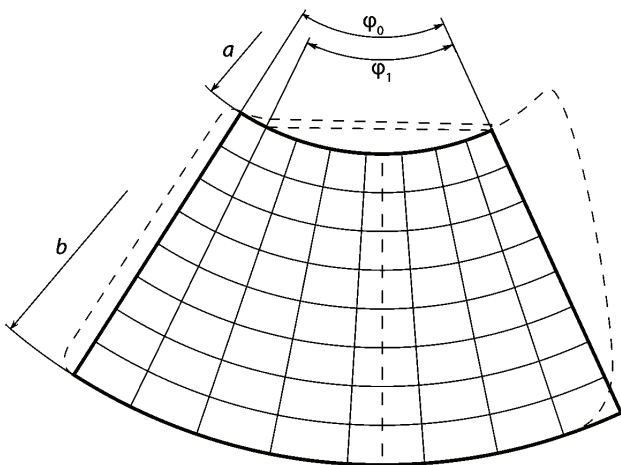


Рисунок 1 – Розрахункова схема низьконапірної лопаті (пунктирною лінією позначений контур лопаті, а суцільною – кільцевий сектор, який апроксимує її): a – внутрішній радіус, b – зовнішній радіус, φ_0 – кут сектора, φ_1 – кут фланця лопаті

Плоска пластина змінної товщини має в плані вид кільцевого сектора, який жорстко закріплений по внутрішньому краю. Згинаюче поперечне навантаження є рівномірно розподіленим і нормальним до серединної площини пластини. Дана схема значною мірою близька до реальних експлуатаційних умов низьконапірної лопаті.

На сьогоднішній день існують різні методи розв'язання задачі про НДС лопаті. Зокрема, Л.М. Качанов [1] використовував варіаційне рівняння Кастиліано, але через свою трудомісткість цей метод не знайшов широкого вжитку в інженерній практиці. С.Г. Михлин [2] теоретично дослідив ефективність математичної моделі, згідно з якою оболонку замінюють пластиною змінної жорсткості, і довів, що напруження пластини мало відрізняються від напружень у відповідній оболонці при чисто моментному напруженому стані. С.П. Шіхобалов [3] за допомогою оптичного методу провів експеримент і підтвердив результати розрахунків.

При заміні дійсної лопаті розрахунковою пластиною необхідно підбирати параметри таким чином, щоб дотримувалися рівність площ, або приймати кут в плані φ_0 рівним куту фланця лопаті φ_1 . Питання оптимального обрання φ_0 потребує окремого вивчення.

Чисельне моделювання. У цій роботі для знаходження вигнутої поверхні пластини застосовується варіаційний метод Рітца. Як відомо [4] - [5], для даної задачі застосовується ряд виду:

$$w = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} f_i(r) f_j(\varphi), \quad (1)$$

де $f_i(r)$, $f_j(\varphi)$ – відомі координатні функції, обрані з числа допустимих функцій задачі; α_{ij} – варійовані постійні.

Робота зовнішніх сил T і потенційна енергія вигину V відповідно мають вигляд:

$$T = q \int_a^b \int_0^{\varphi_0} w r dr d\varphi; \quad (2)$$

$$V = q \int_a^b \int_0^{\varphi_0} \frac{D}{2} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} r dr d\varphi, \quad (3)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини;

$\nabla^2 w = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ – оператор Лапласа; q – поперечне навантаження.

Оскільки T – лінійна функція, а V – однорідний поліном другої степені від параметрів α_{ij} , отримаємо відповідно до принципу Лагранжа рівняння вигляду

$$\frac{\partial(V-T)}{\partial \alpha_{ij}} = 0. \quad (4)$$

Отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно α_{ij} , яка має симетричну матрицю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \alpha_{ks}} = & \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \int_a^b \int_0^{\varphi_0} Dr \left\{ v f_{r_{ij}}'' \left(\frac{1}{r} f_r' + \frac{1}{r^2} f_\varphi'' \right)_{ks} + \right. \\ & + v f_{r_{ks}}'' \left(\frac{1}{r} f_r' + \frac{1}{r^2} f_\varphi'' \right)_{ij} + f_{r_{ks}}'' f_{r_{ij}}'' \left(\frac{1}{r} f_r' + \frac{1}{r^2} f_\varphi'' \right)_{ij} \times \\ & \times \left(\frac{1}{r} f_r' + \frac{1}{r^2} f_\varphi'' \right)_{ks} + 2(1-v) \times \\ & \times \left[\left(\frac{1}{r} f_\varphi' \right)'_{r_{ij}} \times \left(\frac{1}{r} f_\varphi' \right)'_{r_{ks}} \right] \left. \right\} dr d\varphi = q \int_a^b \int_0^{\varphi_0} r f_{ks} dr d\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Перш ніж визначити координатні функції, перейдемо до безрозмірних координат:

$$\rho = \frac{r-a}{b-a}; \quad \theta = \frac{\varphi}{\varphi_0}. \quad (6)$$

В цьому дослідженні координатні функції обрані в такому вигляді:

$$f_i(\rho) = \rho^{i+1}; \quad (7)$$

$$f_i(\theta) = \theta^{j+1}; \quad (8)$$

При такому обранні координатних функцій задовольняються лише геометричні граничні умови:

$$w = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (r = a). \quad (9)$$

Вхідні дані для розрахунку відповідно з розрахунковою схемою рис. 1 представлені в табл. 1.

Таблиця 1 – Параметри пластини ПЛ510

Параметр пластини	Значення параметра
Радіус зовнішньої окружності b	0,5 м
Радіус внутрішньої окружності a	0,23 м
Кут сектора φ_0	1,2 рад
Модуль Юнга E	70 ГПа
Коефіцієнт Пуассона ν	0,34
Максимальна товщина h_0	0,0424 м

На рис. 1 зображена інтерполяційна сітка для задання змінної товщини лопати. У кожному вузлі сітки відома відносна товщина пластини:

$$\bar{h} = \frac{h}{h_0}, \quad (10)$$

де \bar{h} – відносна товщина пластини; h – товщина пластини; h_0 – максимальна товщина пластини.

Програма для розрахунків реалізована на мові програмування C++. Для координатних функцій був реалізований окремий клас, що дозволило аналітично

обчислювати значення їх похідних. Для розв'язання системи (5) був запрограмований метод Гаусса. Коефіцієнти при невідомих в цій системі є подвійними інтегралами. Для отримання значень коефіцієнтів при α_{ij} можна скористатися квадратурною формулою, отриманої при послідовному інтегруванні із застосуванням формули Сімпсона [6]. Знаходження проміжних значень товщини проводилося як за допомогою білінійної, так і за допомогою інтерполяції Лагранжа 9-ї степені (рис. 2). При цьому розбіжність між отриманими значеннями переміщень не перевищувала $4,373 \times 10^{-5}$ м, але час роботи алгоритму для розрахунку коефіцієнтів СЛАР при α_{ij} (5) з використанням інтерполяції Лагранжа збільшувався, що є важливим фактом для оптимізації програми. Наприклад, при розрахунку для 15 коефіцієнтів алгоритм із застосуванням білінійної інтерполяції працював 43,5 с, в той час як із застосуванням інтерполяції Лагранжа – 115,4 с.

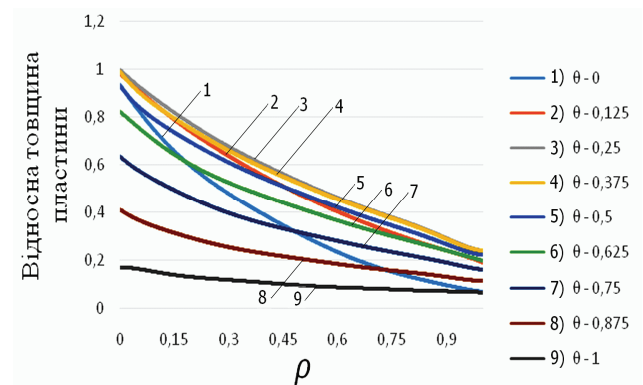


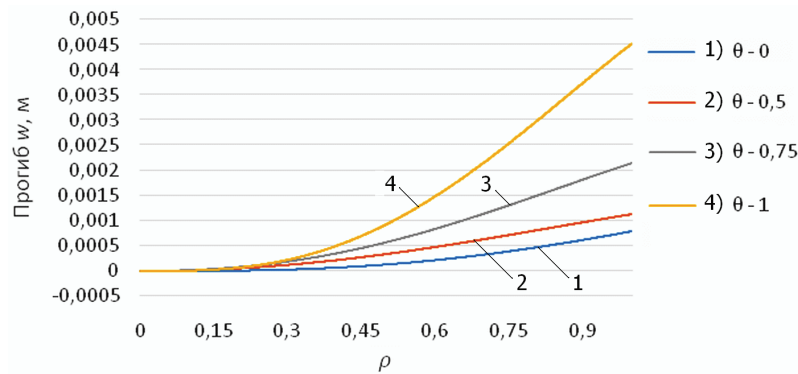
Рисунок 2 – \bar{h} при використанні інтерполяції Лагранжа

Проте можна розглянути ще один спосіб оптимізації алгоритму. Для обчислення подвійного інтеграла проведемо поліноміальну інтерполяцію підінтегральної функції та обчислимо інтеграл аналітично. Для реалізації поставленого завдання реалізований клас, що описує поліном від двох змінних, в якому перевантажені основні арифметичні оператори і реалізований метод аналітичного обчислення подвійного інтеграла від многочлена. При використанні цього методу розрахунок зайняв 0,686 с. При цьому максимальна розбіжність зі значеннями переміщень отриманих внаслідок застосування квадратурних формул склало не більше $3,62 \times 10^{-5}$ м. Як бачимо, ця оптимізація дозволила скоротити час роботи програми приблизно в 63 рази.

На рис. 3 наведені графіки прогинів при різних θ в залежності від ρ , при $i = 1,3$ та $j = 1,5$. Також розрахунки проводилися при 20 і 25 доданках суми (1), але порівняння показало гарну збіжність результатів, тож збільшення кількості доданків більше 15 не дає особливого приросту точності.

Порівняння з експериментальними даними показало, що похибка не перевищує 5×10^{-4} м.

Тепер, знаючи переміщення, можемо аналітично обчислити згинальні моменти [7, с. 146].

Рисунок 3 – Переміщення w

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]; \quad (11)$$

$$M_\varphi = -D \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]. \quad (12)$$

А знаючи згинальні моменти, обчислимо максимальні радіальні та окружні напруження [8, с. 307]:

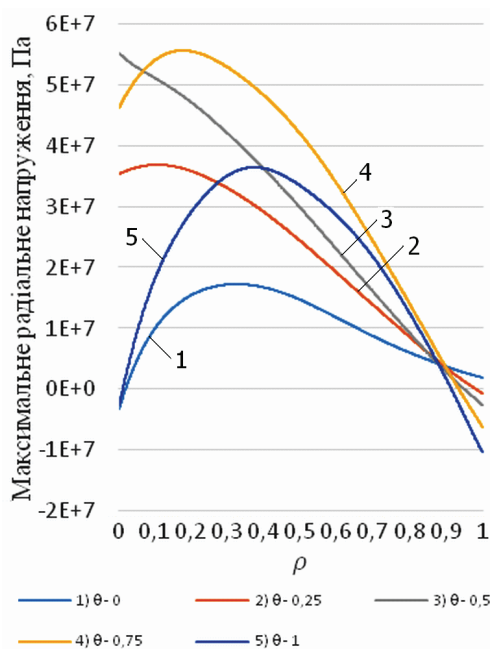
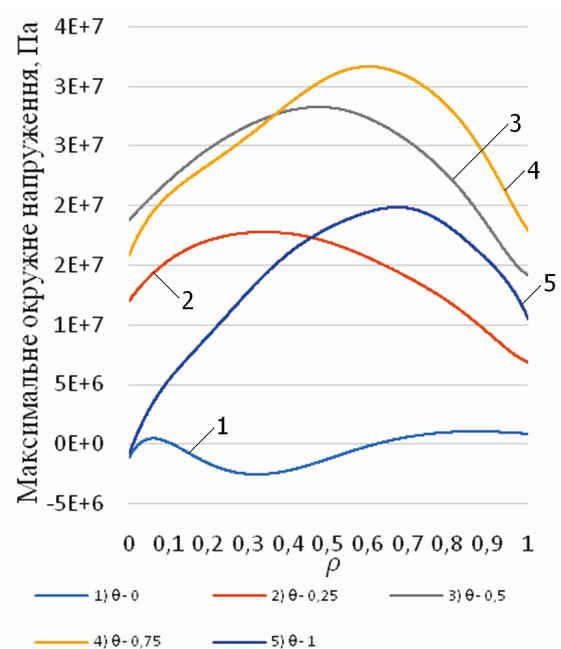
$$\sigma_r = \pm \frac{6M_r}{h^2}; \quad (13)$$

$$\sigma_\varphi = \pm \frac{6M_\varphi}{h^2}. \quad (14)$$

На рис. 4 зображені максимальні радіальні напруження, а на рис. 5 – окружні.

Оскільки для обчислення напружень потрібна товщина пластини, значення якої ми отримуємо приблизно, застосовувалася інтерполяція Лагранжа, використання якої більш доречно ніж білінійної інтерполяції, бо у другому випадку отримані напруження не будуть гладкими функціями.

У табл. 2 наведені результати розрахунків максимального радіального та окружного напружень, переміщення 5-ти лопатей з різними параметрами але однаковою інтерполяційною сіткою для відносної товщини пластини. При всіх розрахунках навантаження q приймалася рівним 147100 Па.

Рисунок 4 – Максимальне радіальне напруження σ_r Рисунок 5 – Максимальне окружне напруження σ_φ

Таблиця 2 – Результати для різних конфігурацій лопаті

№	Параметри						$\sigma_{r \max}$, ГПа	$\sigma_{\varphi \max}$, ГПа	w_{\max} , мм
	b , см	a , см	φ_0 , рад	E , ГПа	ν	h_0 , см			
I	20	10	1,2	70	0,34	2,5	0,0234	0,0133	0,48
II	20	10	1,3	70	0,34	2,5	0,025	0,0144	0,54
III	30	15	1,4	70	0,34	2,5	0,06	0,03	3
IV	30	15	1,6	70	0,34	5	0,0175	0,01	0,47
V	40	15	1,7	70	0,34	2,5	0,172	0,099	21,5

На рис. 6 зображений інтерфейс програми, де видно, що для розрахунків можливе регулювання таких параметрів лопаті: зовнішній і внутрішній радіус кільцевого сектора, кут кільцевого сектора, максимальна товщина пластини, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу, з якого виготовлена лопать. Ін-

терполяційна сітка визначається за допомогою введення з файлу. Також є можливість визначення кількості доданків в сумі (1).

Це дослідження і розробка програмного забезпечення є логічним продовженням роботи [9].

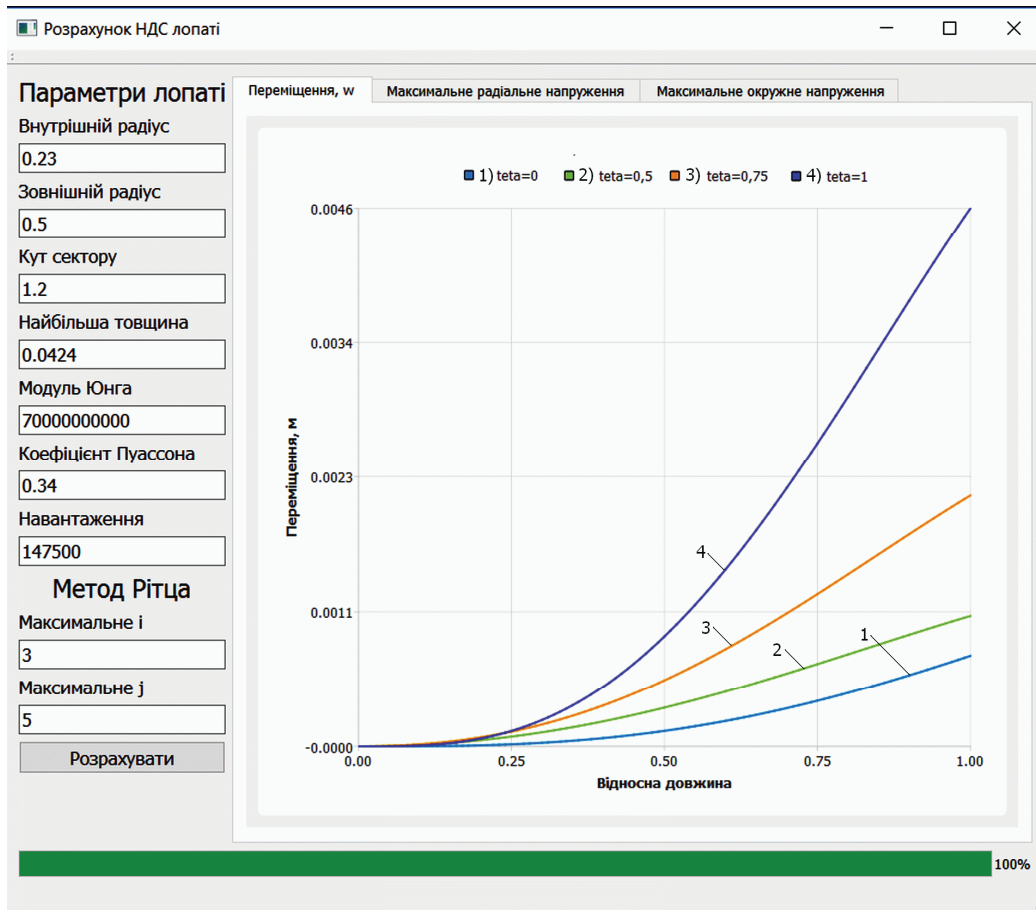


Рисунок 6 – Інтерфейс програми

Висновки. Розглянуто математичну модель, згідно з якою лопать розглядається як пластина змінної жорсткості. На основі цієї математичної моделі розроблено та оптимізовано програмне забезпечення, яке дозволяє досліджувати НДС лопаті в залежності від її параметрів і навантажень. Для знаходження переміщень був використаний варіаційний метод Рітца. Порівняння розрахункових значень переміщень з експериментальними даними показало розбіжність не більше 5×10^{-4} м. Зроблені такі висновки:

За певних умов лопать можна розглядати як пластину змінної жорсткості.

При розв'язанні поставленої задачі для обчислення інтегралів найбільш доцільно провести інтерполяцію підінтегральної функції, а потім розв'язати інтеграл аналітично. Незважаючи на те, що застосування квадратурних формул може давати більшу точність, вхідні дані про товщини надавалися в табличному вигляді, тому їх застосування не є доцільним. В результаті такої оптимізації швидкість роботи програми збільшилася в 63 рази.

Список літератури

1. Михлин С.Г. Упругие оболочки, близкие к плоским пластинам, Сб. Вопросы прочности лопасти водяной турбины. Ленинград: Изд. ЛГУ, 1954. 328 с.
2. Шихобалов С.П., Краснов В.М. и др. Экспериментальное исследование напряженного состояния лопасти водяной турбины. Москва: Гостехиздат, 1964.
3. Качанов Л.М. Расчет прочности лопасти водяной турбины. Сб. Вопросы прочности лопасти водяной турбины. Ленинград: Изд. ЛГУ, 1954. 328 с.
4. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. Москва - Ленинград: Физматлит, 1962, 708 с.
5. Пратусевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. Москва: Гостехиздат, 1948. 400 с.
6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, Т.1. Москва: ГИФМЛ, 1962. 464 с.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Учебник для ВТУЗов. Москва: Наука, 1986. 512 с.
8. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. Учеб. Пособие для инж.-строит. специальностей вузов. Москва: Высшая школа, 1982. 264 с.
9. Андреев А.Г., Лысенко Б.М. Расчет на прочность лопасти низконапорной поворотно-лопастной гидротурбины. Энергомашиностроение. 1961. №6. С. 24-26.

Bibliography (transliterated)

1. *Mihlin S.G.* Uprugie obolochki, blizkie k ploskim plastinam, Sb. Voprosy prochnosti lopasti vodyanoy turbiny, Leningrad: Izd. LGU, 1954. 328 p.
2. *Shihobalov S.P., Krasnov V.M. i dr.* Eksperimentalnoe issledovanie napryazhennogo sostoyaniya lopasti vodyanoy turbiny. Moscow: Gostehizdat, 1964.
3. *Kachanov L.M.* Raschet prochnosti lopasti vodyanoy turbiny. Leningrad: Izd. LGU, 1954. 328 p.
4. *Kantorovich L.V. Krylov V.I.* Priblizhennyye metody vysshego analiza. Moscow-Leningrad: Fizmatlit, 1962, 708 p.
5. *Pratusevich Ya.A.* Variatsionnyye metody v stroitelnoy mehanike. Moscow: Gostehizdat, 1948. 400 p.
6. *Berezin I.S., Zhidkov N.P.* Metody vyichisleniy. Bn.1. Moscow: GIFML, 1962. 464 p.
7. *Feodosev V.I.* Soprotivlenie materialov. Uchebnik dlya VTUZov. Moscow: Nauka, 1986. 512 p.
8. *Samul V.I.* Osnovyye teorii uprugosti i plastichnosti. Ucheb. Posobie dlya inzh.-stroit. spetsialnostey vuzov. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 264 p.
9. *Andreev A.G., Lyisenko B.M.* Raschyot na prochnost lopasti nizkonapornoy povorotno-lopastnoy gidroturbiny. Energomashinostroenie. 1961. № 6. P. 24-26.

Надійшла (received) 17.09.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Райваховський Микола Юрійович (Райваховский Николай Юрьевич, Raivakhovskiy Mykola Yuriiovich) – студент, кафедра «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ». Тел: +380506692430. E-mail: raivakhovskiy@gmail.com

Андрєєв Арнольд Георгійович (Андреев Арнольд Георгиевич, Andreev Arnol'd Georgiiovich) – кандидат технічних наук, доцент кафедри «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ». Тел: (057) 707-68-79. E-mail: andreev707@ukr.net