УДК 534:539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2020.1.219641

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, М.В. СЛІПЧЕНКО, О.І. СПОЛЬНІК

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ

Елементи конструкцій при експлуатації можуть піддаватись динамічним навантаженням, що призводить до виникнення коливань, які можуть привести до небезпечних станів. Дисипативні коливання є небезпечними за несиметрії характеристики пружності. В даній роботі описано вільні затухаючі коливання дисипативного осцилятора з несиметричною квадратично нелінійною характеристикою пружності, при наявності сухого тертя Кулона. Метою дослідження є виведення точних формул для обчислення переміщень осцилятора в часі та визначення розмахів коливань і тривалостей напівциклів, які залежать від амплітуд із-за нелінійності системи. Перший інтеграл рівняння руху виражено в елементарних функціях, а другий – в еліптичних функціях Якобі. З першим інтегралом пов’язано обчислення розмахів коливань, а з другим – переміщення осцилятора в часі. Показано, що із-за несиметрії пружної характеристики процес вільних коливань залежить від того в який бік було надано стартове відхилення системі від положення статичної рівноваги. Тривалості напівциклів виражено через повні еліптичні інтеграли першого роду. Одержаний розв'язок зберігає форму і при відсутності в системі сухого тертя, коли система консервативна, а розмахи коливань у бік протилежний початковому відхиленню можуть бути більші ніж початкове відхилення. Виведені формули для першого циклу коливань легко поширити на любий цикл коливань. Запропоновано компактну наближену формулу для обчислення значень еліптичного синуса. Проведено порівняння переміщень, одержаних з її використанням в аналітичних розв’язках і чисельним інтегруванням вихідного диференціального рівняння на комп’ютері. Одержано гарну узгодженість результатів розрахунку двома способами, чим підтверджена вірогідність формул. Їх практична реалізація потребує обчислень повних еліптичних інтегралів першого роду, що не складно здійснювати інтерполяцією табличних даних, що надруковані в багатьох виданнях із спеціальних функцій.

Ключові слова: точний аналітичний розв'язок, квадратично нелінійна пружність, сухе тертя, переміщення у часі, еліптичні функції Якобі, еліптичні інтеграли першого роду.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, М.В. СЛИПЧЕНКО, О.И. СПОЛЬНИК

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КВАДРАТИЧНО НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Элементы конструкций при эксплуатации могут подвергаться динамическим нагрузкам, что приводит к возникновению колебаний, которые могут привести к опасным состояниям. Диссипативные колебания являются опасными из-за несимметрии характеристики упругости. В данной работе описано свободные затухающие колебания диссипативной осциллятора с несимметричной квадратично нелинейной характеристикой упругости при наличии сухого трения Кулона. Целью исследования является вывод точных формул для вычисления перемещений осциллятора во времени и определение размахов колебаний и длительностей полуцикл, которые зависят от амплитуд из-за нелинейности системы. С первым интегралом связано вычисления размахов колебаний, а со вторым – перемещение осциллятора во времени. Показано, что из-за несимметрии упругой характеристики процесс свободных колебаний зависит от того в какую сторону было задано стартовое отклонения системы от положения статического равновесия. Продолжительности полуциклов выражены через полные эллиптические интегралы первого рода. Полученное решение сохраняет форму и при отсутствии в системе сухого трения, когда система консервативна, а размахи колебаний в сторону противоположную начальном отклонению могут быть больше чем первоначальное отклонение. Выведеные формулы для первого цикла колебаний легко распространить на любой цикл колебаний. Предложена компактная приближенная формула для вычисления значений эллиптического синуса. Проведены сравнения перемещений, полученных с ее использованием в аналитических решениях и численным интегрированием исходного дифференциального уравнения на компьютере. Получена хорошая согласованность результатов расчета двумя способами, чем подтверждена адекватность формул. Их практическая реализация требует вычислений полных эллиптических интегралов первого рода, что не сложно осуществить интерполяцией табличных данных, опубликованных во многих изданиях по специальным функциям.

Ключевые слова: точное аналитическое решение, квадратично нелинейная упругость, сухое трение, перемещение во времени, эллиптические функции Якоби, эллиптические интегралы первого рода.

V.P. OLSHANSKIY, M.V. SLIPCHENKO, O.I. SPOLNIK

ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF FREE VIBRATIONS OF A QUADRATIC NONLINEAR OSCILLATOR WITH DRY FRICTION

Elements of structures during operation can be subjected to dynamic loads, which due to oscillations that can lead to dangerous conditions. Dissipative oscillations are dangerous due to the asymmetry of the elasticity characteristic. This paper describes free damped oscillations of a dissipative oscillator with an asymmetric quadratically nonlinear characteristic of elasticity in the presence of Coulomb dry friction. The aim of the study is to derive exact formulas for calculating the oscillator displacements in time and to determine the amplitude and duration of the half-cycles, which depend on the amplitudes due to the nonlinearity of the system. The first integral of the equation of motion is expressed in elementary functions, and the second – in Jacobi elliptic functions. The first integral is associated with the calculation of the ranges of oscillations, and with the second - the movement of the oscillator in time. It is shown that, due to the asymmetry of the elastic characteristic, the process of free vibrations depends on the direction in which the starting deviation of the system from the position of static equilibrium was set. The durations of the half-cycles are expressed in terms of complete elliptic integrals of the first kind. The obtained solution retains its shape even in the absence of dry friction in the system, when the system is conservative, and the range of oscillations in the direction opposite to the initial deviation may be greater than the initial deviation. The derived formulas for the first cycle of oscillations can be easily extended to any cycle of oscillations. A compact approximate formula is proposed for calculating the values of the elliptic sine. Comparisons of displacements obtained with its use in analytical solutions and numerical integration of the original differential equation on a computer are made. Good consistency of the calculation results was obtained in two ways, thereby confirming the adequacy of the formulas. Their practical implementation requires the calculation of complete elliptic integrals of the first kind, which is not difficult to implement by interpolating tabular data published in many publications on special functions.

Key words: exact analytical solution, quadratically nonlinear elasticity, dry friction, time displacement, Jacobi elliptic functions, elliptic integrals of the first kind.

Вступ. Елементи конструкцій при експлуатації можуть піддаватись динамічним навантаженням, що призводить до виникнення коливань. Ці коливання моделюють різними способами, враховуючи ті чи інші особливості конструкції, роблячи відповідні допущення чи спрощення. Для більшості коливань притаманна деяка сила опору, що призводить до згасань коливань, яка часто викликана сухим тертям. Характеристики пружності коливальної системи також можуть бути симетричними чи асиметричними, що впливає на деякі особливості коливань. В даній роботі розглянемо нелінійні коливання осцилятора з квадратично нелінійною пружністю за наявності сухого тертя.

Огляд публікацій і постановка мети досліджень. Дослідження вільних коливань осцилятора з несиметричною квадратично нелінійною пружністю проводили в [1]. Там методами Крилова-Лінстедта і Бубнова-Гальоркіна побудовано два наближені розв'язки нелінійної консервативної задачі та проведено їх порівняння. Відзначено особливості задачі, що виникають внаслідок несиметрії силової характеристики. Точний аналітичний розв'язок консервативної задачі для симетричної силової характеристики надруковано в [2], де переміщення осцилятора в часі виражено через еліптичні функції Якобі. Викладений там спосіб інтегрування квадратур використовуємо і тут для розв'язків більш складної задачі стосовно руху дисипативного осцилятора, коли внаслідок дії сили сухого тертя відбувається затухання вільних коливань. На відміну від [2], процес коливань, що розглядаємо, обмежений у часі, тобто має скінчене число циклів до повної зупинки, чим він якісно відрізняється від руху консервативної системи. До того ж прийнята несиметрична пружна характеристика вносить певні особливості в динаміку. В функціях Якобі будуємо точний аналітичний розв'язок нелінійного рівняння руху.

Метою роботи є виведення точних формул для обчислення переміщень осцилятора в часі та визначення розмахів коливань і тривалостей напівциклів, які залежать від амплітуд із-за нелінійності системи.

Для досягнення поставленої мети «беремо» перший і другий інтеграли диференціального рівняння руху, використовуючи спеціальні функції та затабульовані еліптичні інтеграли.

Основна частина роботи. Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1 x + c_2 x^2 + F_T \operatorname{sign}\left(\dot{x}\right) = 0 , \qquad (1)$$

у якому; m – маса осцилятора; c_1, c_2 – коефіцієнти жорсткості; F_T – сила сухого тертя; $x = x(t)$ – переміщення осцилятора у часі t; крапка над x означає похідну по t.

Розглянемо два варіанти початкових умов:

а) $x\left(0\right) = -a_0$; $\dot{x}\left(0\right) = 0$ і б) $x\left(0\right) = a_0$; $\dot{x}\left(0\right) = 0$. (2)

Тут $a_0 > 0$ початкове збурення системи.

У першому варіанті осцилятор отримує меншу початкову потенціальну енергію, ніж у другому, а тому робить менше циклів за час вільних коливань до повної зупинки. Отже розрізняємо початкові умови за знаком відхилення від початкового положення $x = 0$.

1. Розглянемо перший напівцикл коливань $x \in \left[-a_0 ; a_1\right]$, спричинених початковими умовами (2,а). Рух буде відбуватись, якщо:

$$c_1 a_0 - c_2 a_0^2 > F_T .$$

На виділеному переміщенні $\dot{x} \geq 0$ і рівняння (1) має вигляд:

$$m\ddot{x} + c_1 x + c_2 x^2 + F_T = 0 .$$

Уведенням невідомої змінної $y = \dot{x}^2$ $\left(\ddot{x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\right)$ його порядок понижуємо до першого:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2c_1}{m}x + \frac{2c_2}{m}x^2 + \frac{2F_T}{m} = 0 . \qquad (3)$$

Проінтегрувавши (3), з урахуванням того, що $y(-a_1) = 0$ отримуємо:

$$y\left(x\right) = \frac{2c_2}{3m}\left(x + a_0\right)\left(B + 2Ax - x^2\right), \qquad (4)$$

де $2A = a_0 - \dfrac{3c_1}{2c_2}$; $B = \dfrac{3}{2c_2}\left(c_1 a_0 - 2F_T\right) - a_0^2$.

Оскільки $y(a_1) = 0$, то із (4) одержуємо формулу розмаху a_1:

$$a_1 = \sqrt{A^2 + B} + A . \qquad (5)$$

Щоб вивести формулу $x(t)$ виразу (4) надаємо вигляд:

$$y\left(x\right) = \frac{2c_2}{3m}\left(x + a_0\right)\left[b_1^2 - \left(x + a_0\right)\right]\left[b_2^2 + \left(x + a_0\right)\right] . \qquad (6)$$

Тут $b_1^2 = \sqrt{A^2 + B} + A + a_0 = a_1 + a_0$; $b_2^2 = \sqrt{A^2 + B} - A - a_0$.

Враховуючи (6), обчислимо другий інтеграл рівняння руху:

$$t = \int_{-a_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{y(x)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2c_2}} \int_{-a_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(x+a_0)\left[b_1^2 - (x+a_0)\right]\left[b_2^2 + (x+a_0)\right]}}.$$

Перейдемо до нової змінної інтегрування $u^2 = x + a_0$. Тоді:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{x+a_0}} \frac{du}{\sqrt{\left(b_1^2 - u^2\right)\left(b_2^2 + u^2\right)}}.$$

Цей інтеграл відноситься до спеціальних. Згідно з [3]:

$$t = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \mathrm{F}(\gamma, r). \tag{7}$$

Тут $\gamma = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x+a_0}}{b_1} \cdot \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{\sqrt{b_2^2 + x + a_0}}\right)$; $r = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$; $\mathrm{F}(\gamma, r)$ – неповний еліптичний інтеграл першого роду.

Поклавши в (7) $x_0 = a_1$, отримуємо формулу тривалості t_{1*} першого напівциклу:

$$t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \mathrm{K}(r),$$

де $\mathrm{K}(r)$ повний еліптичний інтеграл першого роду, таблиці якого є в [4, 5] та інших виданнях із спеціальних функцій.

Уведенням позначення:

$$\tau = \frac{\sqrt{c_2\left(b_1^2 + b_2^2\right)}}{\sqrt{6m}} t,$$

виразу (6) надаємо вигляд:

$$\mathrm{F}(\gamma, r) = \tau,$$

звідки випливає формула переміщення осцилятора:

$$x(t) = \frac{b_1^2 b_2^2 \operatorname{sn}^2(\tau, r)}{b_1^2 + b_2^2 - b_1^2 \operatorname{sn}^2(\tau, r)} - a_0, \tag{8}$$

в якій $\operatorname{sn}(\tau, r)$ – еліптичний синус Якобі.

Розглянемо далі рух осцилятора на другому напівциклі $x \in [a_1; -a_2]$. Він буде відбуватись, якщо:

$$c_1 a_1 + c_2 a_1^2 > F_T,$$

де a_1 визначено в (5).

На виділеному відрізку переміщення $\dot{x} \le 0$ і рівняння (1) отримує форму:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2c_1}{m} x + \frac{2c_2}{m} x^2 - \frac{2F_T}{m} = 0.$$

Його розв'язок, що задовольняє умові $y(a_1) = 0$, має вигляд:

$$y(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{c_2}{m} (a_1 - x)\left(D + 2Cx + x^2\right). \tag{9}$$

Тут $2C = \frac{3c_1}{2c_2} + a_1$; $D = \frac{3}{2c_2}\left(c_1 a_1 - 2F_T\right) + a_1^2$.

Оскільки $y(-a_2) = 0$, то із (9) випливає формула визначення a_2, тобто розмаху в кінці другого напівциклу:

$$a_2 = C - \sqrt{C^2 - D}.$$

Вираз (9) подаємо добутком:

$$y(x) = \frac{2}{3} \frac{c_2}{m} (a_1 - x)\left[d_1^2 - (a_1 - x)\right]\left[d_1^2 - (a_1 - x)\right],$$

у якому $d_1^2 = C + \sqrt{C^2 - D} + a_1$; $d_2^2 = C - \sqrt{C^2 - D} + a_1 = a_2 + a_1$.

Введемо заміну $z^2 = a_1 - x$, тоді другий інтеграл рівняння руху отримує вигляд:

$$t - t_{1*} = -\frac{\sqrt{3m}}{\sqrt{2c_2}} \int_{a_1}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(a_1 - x)\left[d_1^2 - (a_1 - x)\right]\left[d_2^2 - (a_1 - x)\right]}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \int_0^{\sqrt{a_1 - x}} \frac{dz}{\sqrt{\left(d_1^2 - z^2\right)\left(d_2^2 - z^2\right)}}$$

і теж відноситься до спеціальних. Згідно з [3]:

$$t - t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{d_1} \mathrm{F}(\eta, \delta). \tag{10}$$

Тут $\eta = \arcsin \frac{\sqrt{a_1 - x}}{d_2}$; $\delta = \frac{d_2}{d_1}$.

Поклавши в (10) $x = -a_2$, отримуємо формулу тривалості t_1 першого циклу:

$$t_1 = t_{1*} + \frac{\sqrt{6m}}{d_1 \sqrt{c_2}} \mathrm{K}(\delta).$$

Уведенням позначення:

$$\xi = \frac{d_1 \sqrt{c_2}}{\sqrt{6m}} (t - t_{1*}),$$

замість (10), отримуємо:

$$\mathrm{F}(\eta, \delta) = \xi,$$

звідки випливає формула переміщення осцилятора на другому напівциклі:

$$x(t) = a_1 - d_2^2 \operatorname{sn}^2(\xi, \delta). \tag{11}$$

Тут знову доводиться обчислювати еліптичний синус. Це не складно зробити, при наявності таблиць повного еліптичного інтегралу першого роду, бо [4, 5]:

$$\operatorname{sn}(\xi, \delta) = \sin\left[\Theta(\xi, \delta)\right],$$

причому:

$$\Theta(\xi, \delta) \approx \frac{\pi\xi}{2\mathrm{K}} + 2\left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon \sin \frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}}{1 - \varepsilon \cos \frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}} - \frac{\varepsilon^3}{1 + \varepsilon^2} \sin \frac{\pi\xi}{\mathrm{K}}\right];$$

$$\xi = \exp\left(-\pi \frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}\right);\ \mathrm{K} = \mathrm{K}(\delta);\ \mathrm{K}\left(\sqrt{1 - \delta^2}\right).$$

Розглянемо приклад. Для проведення обчислень приймаємо: $m = 1$ кг; $c_1 = 1000$ Н/м; $c_2 = 10000$ Н/м^2; $F_T = 4$ Н; $a_0 = 0{,}05$ м. При цих числових даних на першому напівциклі: $A = -0{,}05$ м; $B = 0{,}0038$ м^2; $b_1^2 = b_2^2 = 0{,}079373$ м; $a_1 = 0{,}029373$ м; $r = 1/\sqrt{2}$; $\mathrm{K}(r) = 1{,}8541$; $t_{1*} = 0{,}113988$ с; $\mathrm{K}' = 1{,}8541$; $\varepsilon = 0{,}043214$. На другому напівциклі: $2C = 0{,}179373$ м; $D = 0{,}004068$ м^2; $d_1^2 = 0{,}182105$ м; $d_2^2 = 0{,}056005$ м; $a_2 = 0{,}026634$ м; $\delta = 0{,}554565$; $\mathrm{K}(\delta) = 1{,}71837$; $t_1 = 0{,}212623$ с; $\mathrm{K}' = 2{,}06456$; $\varepsilon = 0{,}022949$.

Результати обчислень $x(t)$ на першому напівциклі коливань записано в табл. 1, а на другому – в табл. 2. Там, для порівняння, також вказано $x(t)$, які дає чисельне інтегрування рівняння (1) на комп'ютері при початкових умовах (2,а).

Таблиця 1 – Переміщення на першому напівциклі коливань

100 t, с	фор. (8)	чисел. інтег.
	Значення 10 $x(t)/a_0$	
2	-9,1604	-9,1604
4	-6,6670	-6,6699
6	-2,7730	-2,7728
8	1,6830	1,6833
10	5,0736	5,0738
11	5,8079	5,8079

Таблиця 2 – Переміщення на другому напівциклі коливань

100 t, с	фор. (11)	чисел. інтег.
	Значення 10 $x(t)/a_0$	
12	5,7517	5,7521
14	3,7672	3,7671
16	0,3509	0,3503
18	-2,9344	-2,9353
20	-4,9544	-4,9552
100 t_1	-5,3272	-5,3277

Спостерігаються невеликі розбіжності значень $x(t)$, одержаних двома способами, незважаючи на наближене обчислення еліптичного синуса.

Виведені вище формули для першого циклу легко поширити на любий цикл коливань.

Розглянемо далі рух осцилятора при початкових умовах (2,б). Для цього варіанту початкових умов переміщення на першому напівциклі коливань описуються виразом:

$$x(t) = a_0 - e_2^2 \operatorname{sn}^2(\xi, h). \qquad (12)$$

в якому: $e_1^2 = E_1 + \sqrt{E_1^2 - E_2} + a_0$; $e_2^2 = E_1 - \sqrt{E_1^2 - E_2} + a_0 = a_0 + a_1$; $h = \dfrac{e_2}{e_2}$; $2E_1 = \dfrac{3c_1}{2c_2} + a_0$; $E_2 = \dfrac{3}{2c_2}(c_1 a_0 - 2F_T) + a_0^2$.

Тривалість першого напівциклу становить:

$$t_{1*} = \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2}} \frac{1}{e_1} \mathrm{K}(h).$$

Розмах осцилятора в кінці напівциклу дорівнює:

$$a_1 = E_1 - \sqrt{E_1^2 - E_2}.$$

Незважаючи на дію сили сухого тертя, він може бути більшим за початкове відхилення a_0, що є проявом динамічного ефекту несиметрії силової характеристики [7, 8].

Рух на другому напівциклі буде, якщо $c_1 a_1 - c_2 a_1^2 > F_T$. При виконанні цієї умови формула переміщень має вигляд:

$$x(t) = \frac{g_1^2 g_2^2 \operatorname{sn}^2(s, \lambda)}{g_1^2 + g_2^2 - g_1^2 \operatorname{sn}^2(s, \lambda)}, \qquad (13)$$

причому: $g_1^2 = \sqrt{G_1^2 - G_2} + G_1 + a_1 = a_2 + a_1$; $g_2^2 = \sqrt{G_1^2 + G_2} - G_1 - a_1$; $2G_1 = a_1 - \dfrac{3c_1}{2c_2}$; $G_2 = \dfrac{3}{2c_2}(c_1 a_1 - 2F_T) - a_1^2$; $\lambda = \dfrac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$; $s = \dfrac{\sqrt{c_2(g_1^2 + g_2^2)}}{\sqrt{6m}}(t - t_{1*})$.

Другий напівцикл закінчується при

$$t = t_1 = t_{1*} + \frac{\sqrt{6m}}{\sqrt{c_2(g_1^2 + g_2^2)}} \mathrm{K}(\lambda),$$

з амплітудним відхиленням:

$$a_2 = \sqrt{G_1^2 + G_2} + G_1.$$

Наведені формули можна застосувати далі для розрахунку руху на другому та інших циклах.

Розглянемо приклад, зберігаючи вказані вище числові дані. На першому напівциклі коливань маємо: $2E_1 = 0{,}2$ м; $E_2 = 0{,}0088$ м^2; $e_1^2 = 0{,}184641$ м; $e_2^2 = 0{,}115359$ м; $h = 0{,}790427$; $a_1 = 0{,}065359$ м $(a_1 > a_0)$; $\mathrm{K}(h) = 1{,}97736$; $\mathrm{K}' = 1{,}76080$; $\varepsilon = 0{,}060961$; $t_{1*} = 0{,}112719$ с. Для другого напівциклу отримуємо: $2G_1 = -0{,}084641$ м; $G_2 = 0{,}004332$ м^2; $g_1^2 = 0{,}101289$ м; $g_2^2 = 0{,}0552119$ м; $\lambda = 0{,}804494$; $a_2 = 0{,}035930$ м; $\mathrm{K}(\lambda) = 2{,}00427$; $\mathrm{K}' = 1{,}74619$; $\varepsilon = 0{,}064760$; $t_1 = 0{,}236819$ с.

Результати обчислень $x(t)$ формулою (12) записано в табл. 3, а за формулою (13) – в табл. 4. Одержані результати добре узгоджуються зі значенням переміщень, до яких призводить чисельне інтегрування диференціального рівняння руху на комп'ютері.

Більш повна інформація про вільні коливання надана на рис. 1 і рис. 2, де графіки одержано чисельним комп'ютерним інтегруванням рівняння руху для двох варіантів початкових умов.

У другому варіанті початкових умов (рис. 2) процес вільних коливань до повної зупинки має більше циклів і триваліший у часі.

Таблиця 3 – Переміщення на першому напівциклі

100 t, с	фор. (12)	чисел. інтег.
	Значення 10 $x(t)/a_0$	
0	0,0000	0,0000
2	7,3394	7,3396
4	1,1162	1,1168
6	-5,3986	-5,3979
8	-10,1566	-10,1560
10	-12,6394	-12,6392

Таблиця 4 – Переміщення на другому напівциклі

100 t, с	фор. (13)	чисел. інтег.
	Значення 10 $x(t)/a_0$	
12	-12,9728	-12,9728
14	-11,6598	-11,6598
16	-8,7286	-8,7290
18	-4,2045	-4,2053
20	1,2232	1,2211
22	5,7518	5,7508

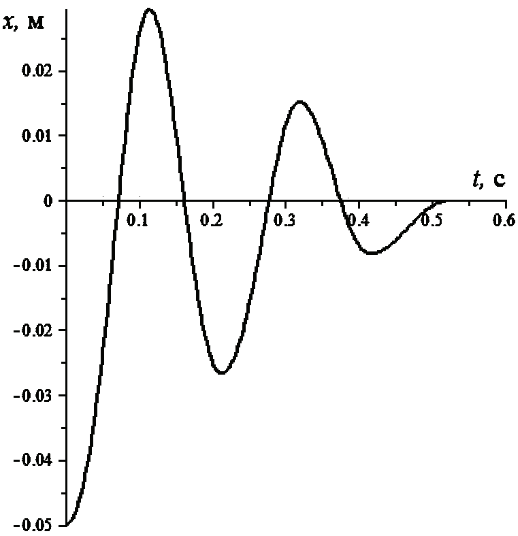

Рисунок 1 – Графік коливань при $x(0) = -0{,}05$ м

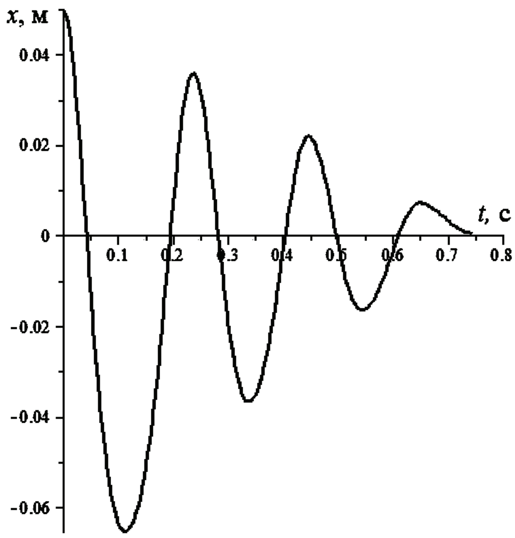

Рисунок 2 – Графік коливань при $x(0) = 0{,}05$ м

Зазначимо, що коли в одержаних вище розв’язках задач $F_T = 0$, то вони не змінять свою форму і будуть описувати вільні незатухаючі коливання, що розглядали в [1].

Висновки. Проведене дослідження показало, що точні розв’язки рівняння коливань квадратично нелінійного осцилятора з несиметричною характеристикою пружності при наявності сухого тертя і без нього виражається через еліптичні функції Якобі. Обчислення розмахів коливань зводиться до компактних рекурентних співвідношень, а визначення тривалостей напівциклів потребує обчислень повних еліптичних інтегралів першого роду. Наведені наближені формули досить точно виражають значення еліптичних функцій, що підтверджено гарною узгодженістю переміщень осцилятора, обчислених з їх використанням і чисельним інтегруванням диференціального рівняння коливань на комп’ютері.

Список літератури

1. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.

2. *Olshanskiy V, Olshanskiy S., Slipchenko M.V.* On free oscillations of a quadratic nonlinear ascillation. Ukrainaian journal of mechanical engineersng and matarials science. 2017. V.3, No 2. P. 1-11.

3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. 1100 с.

4. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

6. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.* Аналітичний розв'язок задачі пружного удару конуса по півпростору. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. 2019. № 2. С. 41-45.

7. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.* Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі. Вісник Вібрації в техніці та технологіях. 2018. № 2 (89). С. 36-40.

8. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.* Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. 2018. № 33 (1309). С. 33-36.

References (transliterated)

1. *Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M.* Teoriya kolyvan i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]. Kyyiv, High School. 2004. 525 p.

2. *Olshanskiy V, Olshanskiy S., Slipchenko M.V.* On free oscillations of a quadratic nonlinear ascillation. Ukrainaian journal of mechanical engineersng and matarials science. 2017. V.3, No 2. P. 1-11.

3. Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M. Tablitsyi integralov, summ, ryadov i proizvedeniy [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Nauka. 1962. 1100 p.

4. *Abramovits A., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Science. 1979. 832 p.

5. *Yanke, E., Emde, F., Lesch, F.* Spetsialnyie funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka. 1977. 344 p.

6. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Analitychnyj rozvyazok zadachi pruzhnogo udaru konusa po pivprostoru [Analytical solution of the problem of elastic impact of a cone on a half-space]. Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. 2019. No 1. P. 40-45.

7. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Pro efekt nesymetriyi sylovoyi harakterystyky kolyvalnoyi systemy pry mehanichnomu udari [On the effect of asymmetry of the force characteristic of an oscillating system during mechanical impact]. Vibrations in engineering and technology. 2018. No 2 (89). P. 36-40.

8. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Pro dynamichnyj efekt nesymetriyi sylovoyi harakterystyky kolyvalnoyi systemy pry impulsnomu navantazhenni [On the dynamic effect of asymmetry of the force characteristic of an oscillatory system under pulse loading]. Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. 2018. No 33 (1309). P. 33-36.

Надійшла (received) 9.10.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. Тел. (066) 010-09-55. E-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Сліпченко Максим Володимирович (Слипченко Максим Владимирович, Slipchenko Maksym Volodimirovich) – кандидат технічних наук, доцент, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. Тел. (066) 712-09-89. E-mail: Slipchenko1982@gmail.com

Спольнік Олександр Іванович (Спольник Александр Иванович, Spolnik Oleksandr Ivanovich)– доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. Тел. (067) 764-84-64. E-mail: Alexspo@ukr.net