

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

КОЛИВАННЯ, ЯКІ ОПИСУЄ МОДИФІКОВАНЕ РІВНЯННЯ РЕЛЕЯ

В статті досліджено варіанти коливального руху, який буде описувати відоме рівняння Релея, що відіграло важливу роль при моделюванні автоколивань, після заміни в ньому знаку дисипативної сили та введення там замість третього ступеня нелінійності довільного невід'ємного показника. Методом енергетичного балансу встановлено, що змінене таким чином рівняння руху, в залежності від значення показника нелінійності, може описувати різні варіанти коливань. Так рух зводиться до квазілінійних автоколивань, коли показник ступеня менший одиниці. Їх амплітуда в усталеному режимі не залежить від початкових умов. Якщо показник ступеня дорівнює одиниці, то лінійне рівняння може описувати усталені гармонічні коливання з амплітудою, що дорівнює початковому відхиленню системи від положення рівноваги або вільні коливання зі змінними розмахами. В залежності від знаку дисипативної сили розмахи або спадають або зростають з плином часу за експоненціальним законом. У другому випадку осцилятор втрачає стійкість. Якщо показник нелінійності у виразі дисипативної сили більший одиниці, то при «малих» початкових відхиленнях видозмінене рівняння описує вільні затухаючі коливання відносно нульового положення, а при «великих» стартових відхиленнях – коливання зі зростанням розмахів. Стійкий рух, спричинений «малим» стартовим збуренням, замінюється на втрату стійкості системи при «великих» збуреннях. Ці можливості рівняння типу Релея впливають не тільки із одержаних наближених аналітичних розв'язків, а також підтверджені чисельним інтегруванням модифікованого рівняння на комп'ютері. За підсумками такого інтегрування побудовано графіки коливань при різних варіантах руху. Вони стосуються конкретних розрахункових параметрів осциляторів і задовільно узгоджуються з результатами обчислень, за методом енергетичного балансу.

Ключові слова: квазілінійні автоколивання, видозмінене рівняння Релея, метод енергетичного балансу, чисельне інтегрування задачі Коші.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

КОЛЕБАНИЯ, КОТОРЫЕ ОПИСЫВАЕТ МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЛЕЯ

В статье исследованы варианты колебательного движения, которое будет описывать известное уравнение Рэлея, что сыграло важную роль при моделировании автоколебаний, после замены в нем знака диссипативной силы и введения там вместо третьей степени нелинейности произвольного неотрицательного показателя. Методом энергетического баланса установлено, что измененное таким образом уравнение движения, в зависимости от значения показателя нелинейности, может описывать различные варианты колебаний. Так движение сводится к квазилинейным автоколебаниям, когда показатель степени меньше единицы. Их амплитуда в установившемся режиме не зависит от начальных условий. Если показатель степени равен единице, то линейное уравнение может описывать установившиеся гармонические колебания с амплитудой, равной начальному отклонению системы от положения равновесия или свободные колебания с переменными размахами. В зависимости от знака диссипативной силы размахи или убывают или возрастают с течением времени по экспоненциальному закону. Во втором случае осцилятор теряет устойчивость. Если показатель нелинейности в выражении диссипативной силы больше единицы, то при «малых» начальных отклонениях видоизмененное уравнение описывает свободные затухающие колебания относительно нулевого положения, а при «больших» стартовых отклонениях – колебания с возрастанием размахов. Устойчивое движение, вызванное «малым» стартовым возмущением, заменяется на неустойчивость системы при «больших» возмущениях. Эти возможности уравнения типа Рэлея вытекают не только из полученных приближенных аналитических решений, а также подтверждены численным интегрированием модифицированного уравнения на компьютере. По итогам этого интегрирования построены графики колебаний при различных вариантах движения. Они касаются конкретных расчетных параметров осцилляторов и удовлетворительно согласуются с результатами расчетов, проведенных методом энергетического баланса.

Ключевые слова: квазилинейные автоколебания, видоизмененное уравнение Рэлея, метод энергетического баланса, численное интегрирование задачи Коши.

V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY

OSCILLATIONS DESCRIBING MODIFIED RAYLEIGH EQUATION

The article explores the options for oscillatory motion, which will describe the well-known Rayleigh equation, which played an important role in modeling self-oscillations, after replacing the sign of the dissipative force in it and introducing an arbitrary inalienable index instead of the third degree of nonlinearity there. Using the energy balance method, it was found that the equations of motion changed in this way, depending on the value of the nonlinearity index, can describe various oscillation options. So the movement is reduced to quasilinear self-oscillations, when the exponent is less than unity. Their amplitude in steady state is independent of the initial conditions. If the exponent is equal to unity, then the linear equation can describe steady harmonic oscillations with an amplitude equal to the initial deviation of the system from the equilibrium position or free oscillations with variable ranges. Depending on the sign of the dissipative magnitude, the magnitude either decreases or increases over time according to the exponential law. In the second case, the oscillator loses stability. If the non-linearity index in the expression of the dissipative force is greater than unity, then

for «small» initial deviations, the modified equation describes free damped oscillations relative to the zero position, and for «large» starting deviations, oscillations with increasing ranges. Stable motion caused by a «small» starting disturbance is replaced by system instability under «large» disturbances. These possibilities of an equation of Rayleigh type follow not only from the obtained approximate analytical solutions, but also are confirmed by numerical integration of the modified equation on a computer. Based on the results of this integration, oscillation graphs were constructed for various types of movement. They relate to specific design parameters of oscillators and are in satisfactory agreement with the results of calculations performed by the energy balance method.

Keywords: quasilinear self-oscillations, modified Rayleigh equation, energy balance method, numerical integration of the Cauchy problem.

Вступ. Як відзначено в [1], класичне рівняння Релея має важливе значення в теорії автоколивань. З ними доводиться мати справу в акустиці, електро- і радіотехніці, засобах транспорту, металообробці, сільськогосподарському виробництві, тощо. Тому важливо належним чином моделювати цей рух.

Огляд публікацій і постановка мети дослідження. Оскільки автоколивання є різновидом нелінійних коливань їм приділена значна увага в багатьох виданнях з нелінійної динаміки, зокрема в [2-4]. Автоколиванням присвячені також спеціальні окремі видання [5, 6]. Теорію, висвітлену в [7], було задіяно в [8-10] для дослідження автоколивань конкретних елементів конструкцій. Одержані там результати узагальнено в роботах [11, 12]. Асимптотичний розв'язок рівняння Релея надруковано в [13]. Якщо в указаному рівнянні поміняти знак дисипативної сили та замінити кубічну нелінійність на степеневу з невід'ємним показником, то, крім автоколивань, воно стане описувати й інші варіанти коливального руху. З цим пов'язана мета даної роботи.

Метою роботи є виявлення тих видів коливального руху, які буде описувати модифіковане рівняння Релея при різних значеннях сталих у ньому.

Для досягнення поставленої мети використовуємо метод енергетичного балансу та результати роботи [14], де вказаним методом було досліджено рух, який описує рівняння типу Релея, коли в ньому позитивні обидва доданки у виразі сили опору. На відміну від [14], тут степеневий доданок від'ємний.

Основний зміст роботи. Модифіковане рівняння Релея подаємо в формі:

$$m \ddot{x} + k_1 \dot{x} - k_2 |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + c x = 0. \quad (1)$$

Тут m – маса осцилятора; $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ – коефіцієнти опору; v – показник нелінійності; c – коефіцієнт пружності; $x = x(t)$ – переміщення системи, як функція часу t ; крапка над x означає похідну по t .

З'ясуємо, які види руху буде описувати рівняння (1) при початкових умовах:

$$x(0) = a_0; \quad \dot{x}(0) = 0,$$

де a_0 стартове відхилення системи від положення рівноваги.

За підсумками роботи [14] цей рух, при малих значеннях коефіцієнтів опору, наближено описується виразом:

$$x(t) = a(t) \cos(\omega t), \quad (2)$$

у якому:

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{c}};$$

$$a(t) = \begin{cases} \left[b + (a_0^{1-v} - b) e^{\lambda_1(v-1)t} \right]^{\frac{1}{1-v}} & \text{при } v \neq 1; \\ a_0 = a_0 \exp\left(-\frac{k_1 - k_2}{2m} t\right) & \text{при } v = 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad \lambda_1 = \frac{k_1}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{k_2 \omega^{v+1}}{\sqrt{\pi} c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}; \quad a_0 = a(0);$$

$\Gamma(z)$ – гама-функція.

Далі розглянемо три випадки значень v .

1. У першому приймаємо, що $0 \leq v < 1$. Для таких v : $\lambda_1(v-1) < 0$ і $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1(v-1)t} = 0$. Тому згідно з (3):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a_* = b^{\frac{1}{1-v}}, \quad (4)$$

незалежно від a_0 .

Величина a_* – це амплітуда автоколивань в установлених режимах, який називають граничним циклом на фазовій площині [3, 4]. Із (3) і (4) випливає, що при $a_0 > a_*$ $a(t) > a_*$, а при $a_0 < a_*$ $a(t) < a_*$. У першому випадку розмахи коливань з плином часу прямують до значення граничної амплітуди зверху, а в другому випадку – знизу.

Заслужують окремої уваги автоколивання, що відбуваються при $v = 0$. Вони спричинені спільною дією сил сухого тертя $F_T = -k_2$ і в'язкого опору $F_{OP} = k_1 \dot{x}$. При дії цих сил, враховуючи, що

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 0,5\sqrt{\pi}, \text{ замість (4), одержуємо:}$$

$$a_* = b = \frac{4 F_T}{\pi k_1} \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{F_T}{c} \frac{1+s}{1-s}, \quad (5)$$

$$\text{де } s = \frac{1 - \pi k_1 \omega / (4c)}{1 + \pi k_1 \omega / (4c)}.$$

Саме такий вираз для a_* знайдено в [12]. В роботах [15, 16] доведено, що граничний цикл з амплітудою коливань (5) є стійким. Отже розв'язок (2), (3) узагальнює відомі результати.

Користуючись формулами (3), (4), обчислимо розмахи коливань і амплітуду установлених режимів при: $m = 2$ кг; $k_1 = 8$ Нс/м; $k_2 = 4$ (с/м)^{0,4}; $v = 0,4$; $c = 1250$ Н/м. Для цих вихідних даних: $\omega = 25$ с⁻¹; $\Gamma(1,2) \approx 0,91817$; $\Gamma(1,7) \approx 0,90864$, $a_* \approx 0,0157$ м. Зна-

чення Гама-функції взяли в таблиці в [17]. Обчислені двома способами перші шість пікових відхилень на графіку коливань записано в табл. 1 і табл. 2. Значення $a(t_i)$ обчислено по формулі (3), а значення $a(t_i^*)$ – одержано чисельним комп'ютерним інтегруванням рівняння коливань (1). Результати в табл. 1 отримано для початкового відхилення $a_0 = 0,01$ м, а в табл. 2 – при $a_0 = 0,03$ м. У першому варіанті початкових умов піки зростають, а в другому – вони спадають. Розбіжності

результатів, одержаних двома способами, несуттєві, що підтверджує адекватність наближених формул (3), (4) у вказаному вище інтервалі значень v .

Графіки автоколивань в перехідному режимі для вказаних вище початкових відхилень зображено на рис. 1 і рис. 2. Вони побудовані за результатами чисельного розв'язання задачі Коші на комп'ютері.

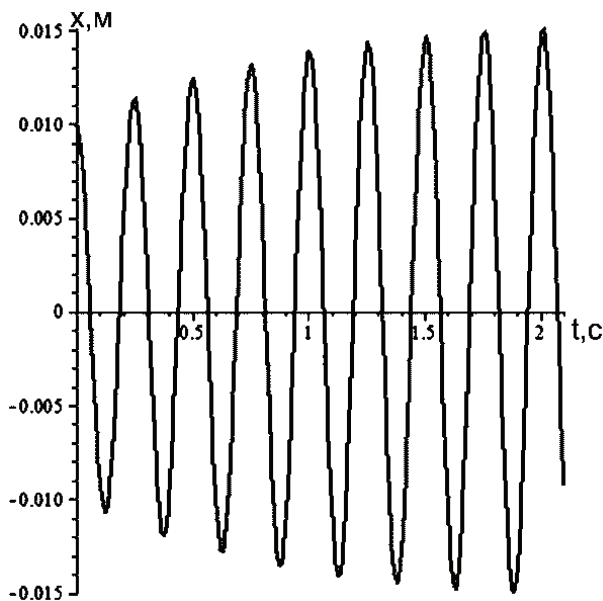
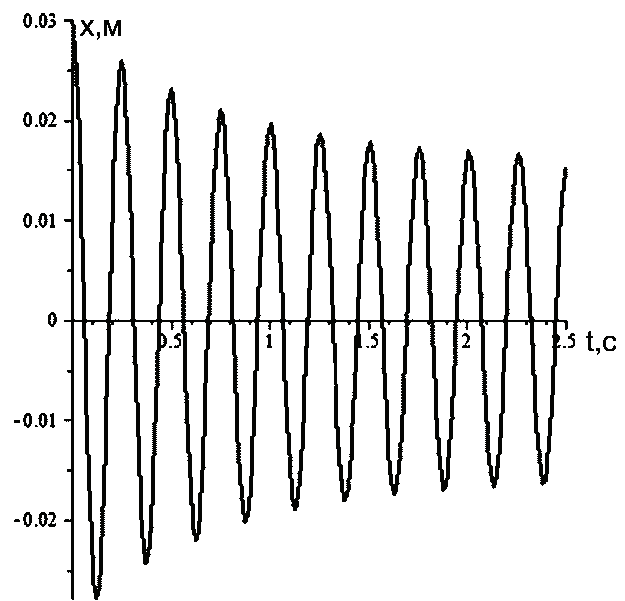
На обох рисунках, з плином часу t , розмахи асимптотично прямують до значення a^* .

Таблиця 1 – Значення $\max x(t)$, при $v = 0,4$; $a_0 = 0,01$ м

i	t_i, c	$100a(t_i), m$	t_i^*, c	$100x(t_i^*), m$
1	0,25133	1,138	0,25141	1,138
2	0,50266	1,245	0,50284	1,245
3	0,75398	1,326	0,75428	1,327
4	1,00531	1,387	1,00574	1,388
5	1,25664	1,434	1,25720	1,434
6	1,50796	1,468	1,50868	1,469

Таблиця 2 – Значення $\max x(t)$, при $v = 0,4$; $a_0 = 0,03$ м

i	t_i, c	$100a(t_i), m$	t_i^*, c	$100x(t_i^*), m$
1	0,25133	2,592	0,25162	2,592
2	0,50266	2,306	0,50321	2,306
3	0,75398	2,103	0,75478	2,103
4	1,00531	1,958	1,00631	1,958
5	1,25664	1,853	1,25784	1,853
6	1,50796	1,777	1,50937	1,777

Рисунок 1 – Графік автоколивань при $v = 0,4$; $a_0 = 0,01$ мРисунок 2 – Графік автоколивань при $v = 0,4$; $a_0 = 0,03$ м

2. При $v = 1$ рівняння (1) стає лінійним. Згідно з (2), (3) воно описує вільні коливання, спричинені стартовим відхиленням осцилятора на a_0 . Розмахи цих коливань спадають, коли $k_1 > k_2$, залишаються сталими при $k_1 = k_2$ ($a(t) = a_0 = \text{const}$) і зростають, якщо $k_1 < k_2$. У третьому випадку динамічна система втрачає стійкість.

3. Розглянемо більш детально коливання, які описує рівняння (1) при $v > 1$. Для цього покажемо $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_1(v-1)t} = \infty$. Тому, якщо $a_0 < a^*$, то $a_0^{1-v} - b > 0$ і, згідно з (3), $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$. Вільні затухаючі коливання не обмежені у часі, бо мають безліч розмахів. Якщо ж початкове відхилення $a_0 > a^*$, то $a_0^{1-v} - b < 0$ і рух зі

зростанням розмахів до нескінченності обмежений у часі, причому його тривалість t_* становить:

$$t_* = \frac{1}{\lambda_1(\nu-1)} \ln \frac{b}{b-a_0^{1-\nu}}.$$

Не складно довести, що при $\nu > 1$, згідно, з (3), $\lim_{t \rightarrow t_*} a(t) = \infty$.

Граничний режим руху, коли $a(t) = a_* = \text{const}$, є нестійким.

Щоб переконатись у такій поведінці коливальної системи при $\nu > 1$, розглянемо приклад. Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 2$ кг; $k_1 = 8$ Нс/м; $k_2 = 16$ (с/м)³; $\nu = 3$; $c = 1250$ Н/м. При таких число-

вих даних: $\omega = 25$ с⁻¹; $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$; $\Gamma(3) = 2$;

$b = 937,5$ м⁻²; $a_* = 0,03266$ м. Графіки коливань, одержані чисельним інтегруванням рівняння (1) на комп'ютері, відповідно при $a_0 = 0,025$ м і $a_0 = 0,035$ м, подано на рис. 3 і рис. 4.

Інформація про похибки формул (3) і (4) при обчисленні екстремальних переміщень осцилятора і часу їх досягнення подана в табл. 3 і табл. 4. Для порівняння там записано екстремуми $x(t^*)$ і час їх досягнення $t = t^*$, одержані чисельним методом.

Невеликі розбіжності результатів розрахунку двома способами підтверджують адекватність наближених формул (2), (3) і (4) при $\nu > 1$.

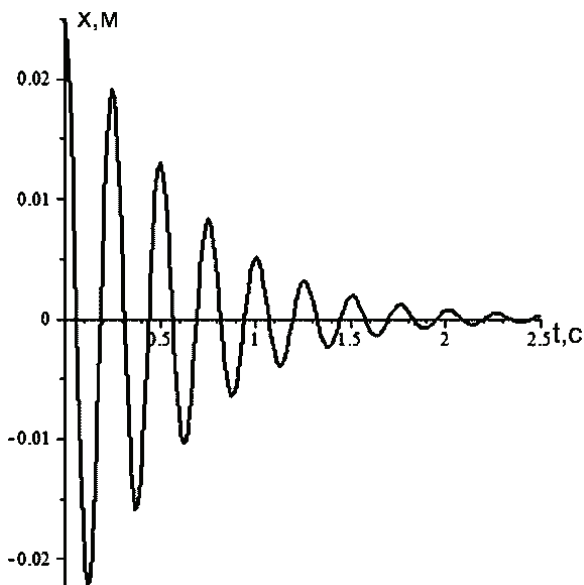


Рисунок 3 – Графік коливань при $\nu = 3$; $a_0 = 0,025$ м

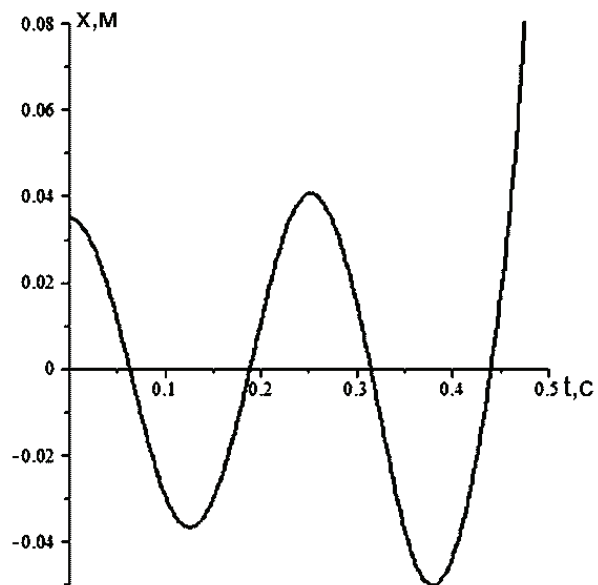


Рисунок 4 – Графік коливань при $\nu = 3$; $a_0 = 0,035$ м

Таблиця 3 – Екстремуми $x(t)$, при $\nu = 3$; $a_0 = 0,025$ м

i	$10t_i$, с	$100a(t_i)$, м	$10t_i^*$, с	$100 x(t_i^*) $, м
1	1,2566	2,218	1,2571	2,216
2	2,5133	1,908	2,5145	1,905
3	3,7699	1,595	3,7725	1,591

Таблиця 4 – Екстремуми $x(t)$, при $\nu = 3$; $a_0 = 0,035$ м

i	$10t_i$, с	$100a(t_i)$, м	$10t_i^*$, с	$100 x(t_i^*) $, м
1	1,2566	3,683	1,2607	3,678
2	2,5133	4,061	2,5238	4,044
3	3,7699	5,063	3,7969	5,022

Висновки. Проведене дослідження показало, що в залежності від значення показника нелінійності у виразі дисипативної сили, модифіковане рівняння Релея може описувати три варіанти коливань. Це квазілінійні автоколивання, вільні коливання сталої амплітуди та вільні коливання зі змінними розмахами. Розмахи можуть спадати до нуля або зростати до нескінченності з плином часу, а коливання проходять відносно положення статичної рівноваги осцилятора. Існує окремий випадок руху, коли після декількох напівци-

клів, за обмежений проміжок часу, екстремальне відхилення системи прямує до нескінченності, тобто втрачає стійкість динамічна система.

Список літератури

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504 с.
2. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. Т. 1. 716 с.

3. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. Москва: Дрофа, 2004. 591 с.

4. *Василенко М.В., Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.

5. *Лазарев Г.С.* Автоколебания при резании металлов. Москва: Высшая школа, 1971. 244 с.

6. *Крагельский И.В., Гиттис Н.В.* Фрикционные автоколебания. Москва: Наука, 1987. 181 с.

7. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград: Машиностроение, 1976. 320 с.

8. Физико-механический анализ автоколебательных режимов работы вибрационной рыхлительной лапы культиватора / *Д.Г. Войтюк, Ю.В. Човнюк, Ю.О. Гуменюк, А.П. Гуцол.* Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. 2012. № 2 (66). С. 10-16.

9. *Ловейкин В.С., Човнюк Ю.В., Костина О.Ю.* Дослідження релаксаційних автоколивань з спрощеної характеристики тертя у скребкових конвеєрах при транспортуванні сипких матеріалів. Механізація сільськогосподарського виробництва. Вісник ХНТУСГ. 2013. Вип. 135. С. 328-335.

10. *Бурлака В.В., Ольшанський В.П., Малець О.М.* До розрахунку релаксаційних автоколивань у скребкових конвеєрах. Физические и компьютерные технологии. 19 Международная научно-техническая конференция. Труды конференции. Харьков: ФЭД, 2014. С. 120-123.

11. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М.* та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2015. 116 с.

12. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тищенко Л.М.* Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2016. 264 с.

13. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва: Изд-во иностр. литературы, 1953. 258 с.

14. *Ольшанський В.П.* Вплив нелінійної складової в'язкого опору на тривалість вільних коливань осцилятора Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. 2019. № 2. С. 41-47.

15. *Бутенин Н.В., Луцк Я.Л., Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. Т.2 Динамика. Москва: Наука, 1985. 496 с.

16. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под редакцией *И.И. Блехмана.* Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.

17. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

References (transliterated)

1. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka. 1974. 504 p.

2. *Avramov K.V., Mikhlin Yu.V.* Nelineynaya dinamika uprugikh sistem [Nonlinear dynamics of elastic systems]. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2015. T.1. 716 p.

3. *Babakov I.M.* Teoriya kolebaniy [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa, 2004. 591 p.

4. *Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M.* Teoriya kolyvan i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion].

Kiev, High School. 2004. 525 p.

5. *Lazarev G.S.* Avtokolebaniya pri rezanii metallov [Auto-oscillations during metal cutting]. Moscow, Higher School. 1971. 244 p.

6. *Kragelsky I.V., Gittis N.V.* Friksionnyye avtokolebaniya [Frictional self-oscillations]. Moscow, Nauka, 1987. 181 p.

7. *Panko Ya.G.* Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mechanical Engineering, 1976. 320 p.

8. *Voytyuk D.G., Chovnyuk Yu.V., Gumenyuk Yu.O., Gutsol A.P.* Fiziko-mekhanicheskiy analiz avtokolebatel'nykh ryzhimov raboty vibratsionnoy rykhlytel'noy lapy kul'tivatora [Physico-mechanical analysis of self-oscillating redheads of a vibrating cultivating paw of a cultivator]. Vibrations in Engineering and Technology. All-Ukrainian Scientific and Technical Journal, 2012. No 2(66). P. 10-16.

9. *Loveykin V.S., Chovnyuk Yu.V., Kostina O.Yu.* Doslidzhennya relaksatsiynykh avtokolyvan z sproshchenoyi kharakterystyky tertya u skrebkovykh konveyerakh pry transportuvanni sypkykh materialiv [Investigation of relaxation self-oscillations on the simplified characteristic of friction in scraper conveyors during transportation of bulk materials]. Mechanization of agricultural productions, Bulletin of KhNTUSG, 2013. No 135. P. 328-335.

10. *Burlak V.V., Olshanskiy V.P., Malets O.M.* Do rozrakhunku relaksatsiynykh avtokolyvan u skrebkovykh konveyerakh [To the calculation of relaxation self-oscillations in scraper conveyors]. Physical and computer technology: 19th International Scientific and Technical Conference. Conference proceedings. Kharkiv, FED, 2014. P. 120-123.

11. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., Tishchenko L.N.* Kolyvannya dysypatyvnykh ostsylyatoriv [Oscillator oscillator oscillations]. Kharkiv, Miskdruk. 2015. 116 p.

12. *Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N., Olshanskiy S.V.* Dynamika dysypatyvnykh ostsylyatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Miskdruk. 2016. 264 p.

13. *Stocker J.* Nelineynyye kolebaniya v mekhanicheskikh i elektricheskikh sistemakh [Nonlinear Oscillations in Mechanical and Electrical Systems]. Moscow, Publishing house of foreign countries literature. 258 p.

14. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Vplyv nelineynoyi skladovoyi vyazkoho oporu na tryvalist vilnykh kolyvan ostsylyatora [Influence of nonlinear component of viscous resistance on the duration of free oscillations of the oscillator]. Bulletin of NTU "KPI". Series: Dynamics and strength of machines. 2019. No 2. P. 41-47.

15. *Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R.* Kurs teoreticheskoy mekhaniki [Course in Theoretical Mechanics]. Moscow, Nauka. 1985. 496 p.

16. Вибрации в технике. Справочник в шести томах [Vibration in technology. Handbook in six volumes]. Т. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems; edited by *I.I. Blekhan.* Moscow, Engineering, 1979. 351 p.

17. *Abramovits A., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Science. 1979. 832 p.

Надійшла (received) 22.03.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. Тел. (066) 010-09-55. E-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. Тел. (057) 343-29-41. E-mail: stasolsh77@gmail.com