

*А.П. КОЖУШКО, О.Л. ГРИГОР'ЄВ*

### **ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТРАНСПОРТУВАННЯ РІДКОГО ВАНТАЖУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ НА ПАРАМЕТРИЧНИЙ РЕЗОНАНС В УМОВАХ ПЕРЕРОЗПОДІЛУ МАС В ЦИСТЕРНІ**

Моделюється процес транспортування рідкого вантажу в баку або цистерні при наявності поверхні розділу між рідиною і газом. Коливання стінок призводять до перетікання вздовж вільної поверхні і перерозподілу маси рідини в цистерні. Показано, що при несприятливих умовах пов'язані вертикальні і горизонтальні коливання рідини призводять до виникнення параметричного резонансу. Формулюються принципи і призначаються етапи розробки нової математичної моделі, здатної досліджувати процес транспортування рідкого вантажу з урахуванням основних лінійних і нелінійних зв'язків між параметрами руху, а також можливістю появи резонансів. При описі коливань рідини використовується дискретна модель парціальних осциляторів, в яку внесено ряд допустимих спрощень. Прийняті принципи використані для дослідження поздовжніх і поперечних коливань трактора, який на причепі перевозить цистерну з рідиною. Виконано розрахункове дослідження зміни параметрів руху транспортного засобу в околиці параметричного резонансу.

**Ключові слова:** колісний трактор, цистерна, динаміка, коливання, параметричний резонанс.

*А.П. КОЖУШКО, А.Л. ГРИГОРЬЕВ*

### **ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ТРАНСПОРТИРОВКИ ЖИДКИХ ГРУЗОВ И ИССЛЕДОВАНИЯ НА ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В УСЛОВИЯХ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС В ЦИСТЕРНЕ**

Моделируется процесс транспортировки жидкого груза в баке или цистерне при наличии поверхности раздела между жидкостью и газом. Колебания стенок приводят к перетеканию вдоль свободной поверхности и перераспределению массы жидкости в цистерне. Показано, что при неблагоприятных условиях связанные вертикальные и горизонтальные колебания жидкости приводят к возникновению параметрического резонанса. Формулируются принципы и назначаются этапы разработки новой математической модели, способной исследовать процесс транспортировки жидкого груза с учетом основных линейных и нелинейных связей между параметрами движения, а также возможностью появления резонансов. При описании колебаний жидкости используется дискретная модель парциальных осцилляторов, в которую внесен ряд допустимых упрощений. Принятые принципы использованы для исследования продольных и поперечных колебаний трактора, который на прицепе перевозит цистерну с жидкостью. Выполнено расчетное исследование изменения параметров движения транспортного средства в окрестности параметрического резонанса.

**Ключевые слова:** колесный трактор, цистерна, динамика, колебания, параметрический резонанс.

*A.P. KOZHUSHKO, A.L. GRIGORIEV*

### **BASIC PRINCIPLES OF MATHEMATICAL MODELING DYNAMICS TRANSPORTATION LIQUID CARGO AND RESEARCH ON PARAMETRIC RESONANCE UNDER CONDITIONS OF OIL REDISTRIBUTION IN A TANK**

The process of transportation of a liquid cargo in a tank or cistern is simulated in the presence of an interface between liquid and gas. Oscillations of the walls lead to overflow along the free surface and redistribution of the mass of liquid in the tank. It is shown that, under unfavorable conditions, coupled vertical and horizontal oscillations of the liquid lead to the appearance of parametric resonance. Principles are formulated and stages are assigned for the development of a new mathematical model capable of investigating the process of transporting a liquid cargo, taking into account the main linear and nonlinear relationships between the motion parameters, as well as the possibility of resonances. When describing fluid oscillations, a discrete model of partial oscillators is used, into which a number of permissible simplifications have been introduced. The outlined simplifications are based on the principle of equivalent replacement of the real shape of the container with the shape of a rectangular parallelepiped. The principle of reduction is to preserve the size of the free surface of the liquid and the mass of the liquid in the tank. It is established that for problems with ergonomic criteria, it is enough to use three partial oscillators for each form of oscillations: longitudinal, transverse and torsional. The principles adopted were used to study the longitudinal and lateral vibrations of a tractor that transports a tank with a liquid on a trailer. A computational study of the change in the parameters of the vehicle movement in the vicinity of the parametric resonance is carried out. During the simulation it is shown that the parametric resonance is significantly influenced by the properties of the transported fluid and the characteristics of the external kinematic excitation.

**Key words:** wheeled tractor, tank (cistern), dynamics, oscillations, parametric resonance.

**Вступ та постановка задач дослідження.** Сьогдні при дослідженні роботи будь-якої системи перед науковцем, залежно від поставлених задач, виникає

питання, в якій формі її вирішувати: статичній, квазі-статичній або динамічній. Найбільш складною є вирішення задач в динамічній формі, адже це вимагає вра-

хування усіх складових, що діють на систему. При дослідженні механічної системи вирішення задач динаміки руху потребує дослідження коливального процесу. Основний та єдиний показник, який характеризує динамічні властивості руху будь-якої системи – це коливання. Коливанням називають явище, яке характеризує зміну стану системи біля точки рівноваги. Як відомо, коливання діляться на *вільні* (власні), *вимушені* (зовнішні), *автоколивання* та *параметричні*.

Дія коливань на складну систему може нести як руйнівний характер так і не мати впливу на неї. Оцінка впливу коливань на об'єкт базується на побудові динамічних моделей, які, по своїй природі, можуть бути одномасовими та багатомасовими (зокрема, й континуальними або дискретно-континуальними). Останні більш точні, тому і вимагають від науковця застосування поглибленого математичного апарату.

Кожен з видів коливань розглядається окремо від інших. Так загальний принцип визначення частот вільних коливань системи зводиться до рішення системи лінійних диференціальних рівнянь багатомасових моделей аналітичним, чисельним та іншими способами.

Великого розповсюдження набули рекурентні методи [1]: метод Толле, метод Терських, метод Хольцера та інші. Метод Толле базується на рівності нулю сумі моментів сил пружності та сил інерції мас системи при вільних коливаннях. Метод Терських складається з вирішення диференціальних рівнянь у вигляді ланцюгової дробі. З роботи [2] відомо, що за допомогою даного методу на доброму рівні виконується перевірка отриманих результатів, але також можуть виникати випадки неправильних рішень – це пов'язано зі специфікою розрахунків, а саме в момент проходження через нуль. Метод Хольцера ґрунтується на рівності кінетичної енергії на масах системи від інерційного моменту і потенційної енергії на її ділянках від еластичного моменту, який настає під час вільних коливань. В роботі [3] вказано, що окреслений метод дуже схожий на метод Толле, але в порівнянні з іншими він найбільш складний при реалізації.

При описі в'язкопружних середовищ в контексті розгляду лінійних задач відомими [4] є модель Кельвіна-Фойгта, модель Максвелла та модель стандартного лінійного тіла.

Широкого загалу набув матричний чисельно-аналітичний метод інтегрування рівнянь руху механічної системи із зосередженими параметрами [5]. Окреслений метод дозволяє представити загальні рішення Коши у вигляді лінійної форми з матричними коефіцієнтами. Метод розроблявся для дослідження механічних систем з розтягнутим спектром власних частот, де він дозволяв відмовитись від неявних або інших видів схем типу Адамса. Однак при дослідженні вільних коливань гідромеханічних вузлів в роботі [6] наведено переваги застосування різницевих схем Адамса при розрахунку вузлів, які описуються жорсткою системою диференціальних рівнянь при наявності погано обумовленої матриці коефіцієнтів.

Зважаючи на вище сказане стає зрозумілим, що дослідження вільних коливань системи несе першоче-

ргову важливість в розрізі питання динаміки руху. Особливо актуальні питання пов'язані з впливом рідини, що транспортується, на механічну складову руху.

Формування математичної моделі при дослідженні зовнішніх коливань відбувається шляхом утворення зовнішніх сил або кінематичних збурень, які здійснюють позитивну роботу та забезпечують додатковий енергетичний вплив на загальну коливальну систему. Така дія здійснює не затухаючий коливальний рух системи.

Що стосується автоколивань та параметричних коливань, то для їх дослідження необхідно підбирати умови роботи системи, при яких вони спостерігаються. Однією з таких систем є складна система руху колісного трактора та цистерни. Тракторні цистерни мають від'ємність в порівнянні з автомобільними – це відсутність внутрішніх перегородок всередині цистерни [7], що зумовлює безперервний рух рідини від однієї стінки ємності до іншої і, як результат, відбувається перерозподіл мас (перетікання рідини).

На сьогоднішній день існує декілька засобів для вирішення задач з дослідження руху рідини [8]: модель ідеальної нестискуваної рідини (рівняння Ейлера); квазігідродинамічні моделі; модель в'язкої нестискуваної рідини (рівняння Нав'є-Стокса) та інші. Вирішення окреслених вище моделей вдається за допомогою нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. При обчисленні необхідно також вводити крайові умови. Це обумовлено наявністю вільної поверхні рідини. Труднощі виникають на етапі перетворення континуальної моделі в модель зі звичайними диференціальними рівняннями.

Тому при аналізі руху в'язкої нестискуваної рідини в тракторній цистерні доцільно використовувати відносно простий чисельний алгоритм, який би враховував вільні та вимушені низькочастотні поверхневі коливання рідини, що б дало змогу більш якісно оцінювати лінійну та нелінійну моделі руху транспортно-го засобу.

**Особливості та етапи процесу створення математичної моделі для дослідження динаміки в транспортних засобах з рідким вантажем.** Досліджувана гідромеханічна система досить складна та складається з багатьох елементів, які впливають на вільні коливання з різного діапазону частот: механічного (до 16 Гц), звукового та ультразвукового. Тому перш за все необхідно визначити, які ж частоти цікавлять дослідника. При аналізі руху колісного трактора з цистерною [7] (а також автомобілів - паливозаправників, танкерів і т.д., рис.1) головним вважають діапазон частот від 0,5...2 Гц, який впливає на фізіологічний стан водія (або екіпажу). Якщо дослідника цікавить й міцнісний аналіз, тоді діапазон частот розширюється.

Зрозуміло, що металеві (рамні, корпусні, стрижневі) конструкції в цих задачах доречно вважати абсолютно жорсткими (для чого, інколи, доводиться збільшувати розрахункову піддатливість амортизаторів, шин та інших *слабких місць*). Тоді динаміка цієї частини транспортно-го засобу буде описуватися відоми-

ми рівняннями руху та пружності для дискретних систем з зосередженими параметрами. Але коливання рідини, що має вільну поверхню, традиційно описується моделлю з розподіленими масами (рівняннями Нав'є–Стокса та хвилями Релея, [9, 10]). Проте, в 60–70х роках минулого сторіччя для моделювання старту ракети на рідкому паливі, було розроблено [11]

- *потенційну постановку задачі*, при якій коливальний рух рідини (за виключенням вузького пристінного шару) вважався безвихровим, та
- *метод парціальних осциляторів*, який дозволив для низькочастотних коливань замінити континуальну модель рідини дискретною моделлю.

Саме такий підхід, на наше переконання, необхідно використовувати в усіх інших технічних додатках, але число осциляторів повинно обиратися з урахуванням основної постановки задач.

Крім того, на відміну від моделей паливних баків ракети, де важливо врахувати їх реальну форму, що вимагає складних розрахунків [12], зважаючи на специфіку вирішуваних задач при транспортуванні рідкого вантажу

- доцільно проводити еквівалентну заміну реальної форми ємності (циліндричної, овальної, «валізної» і т.д.) на форму прямокутного паралелепіпеда [9].



Рисунок 1 – Паливозаправник на базі автомобіля КрАЗ-63221

Принципом приведення є збереження розмірів вільної поверхні рідини та маси рідини в цистерні.

В задачах з ергономічними критеріями (або обмеженнями), як показує практика,

- достатньо використовувати 3 парціальних осцилятора для кожної форми коливань: поздовжньої, поперечної та крутильної.

В задачах про крутильні коливання класична методика [12] використовує відомий потенціал Жуковського  $f(x, y)$  для повільних обертань, який для ємності із розмірами вільної поверхні  $a \times b$  описується доцільно складною формулою:

$$\Psi(x, y) = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\beta_k)^3} \cdot \left[ \frac{a^2 \operatorname{sh}(\beta_k y / a) \sin(\beta_k x / a)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k b / a)} - \frac{b^2 \operatorname{sh}(\beta_k x / b) \sin(\beta_k y / b)}{\operatorname{ch}(0.5 \beta_k a / b)} \right],$$

де  $\beta_k = \pi \cdot (1 + 2k)$ , а початок системи координат  $xOy$  розташований в центрі цистерни (рис.3).

Для задач про транспортування рідини в цистернах, де  $a \gg b$ , а криволінійність траєкторії руху не є надмірною,

- потенціал Жуковського припустимо замінити апроксимацією наступного простого вигляду

$$\Psi(x, y) \approx x \cdot y,$$

як суттєво спрощує й усі наступні розрахунки.

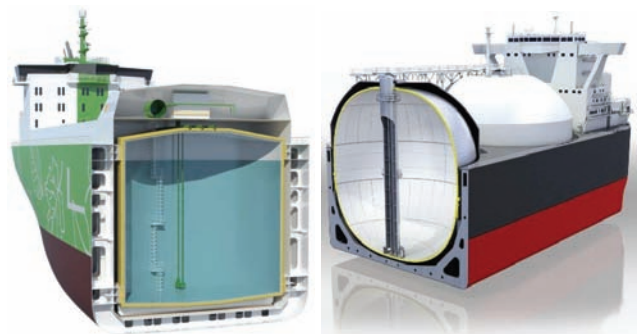


Рисунок 2 – Морські танкери: а – нафтовий; б – газовий (LPG)

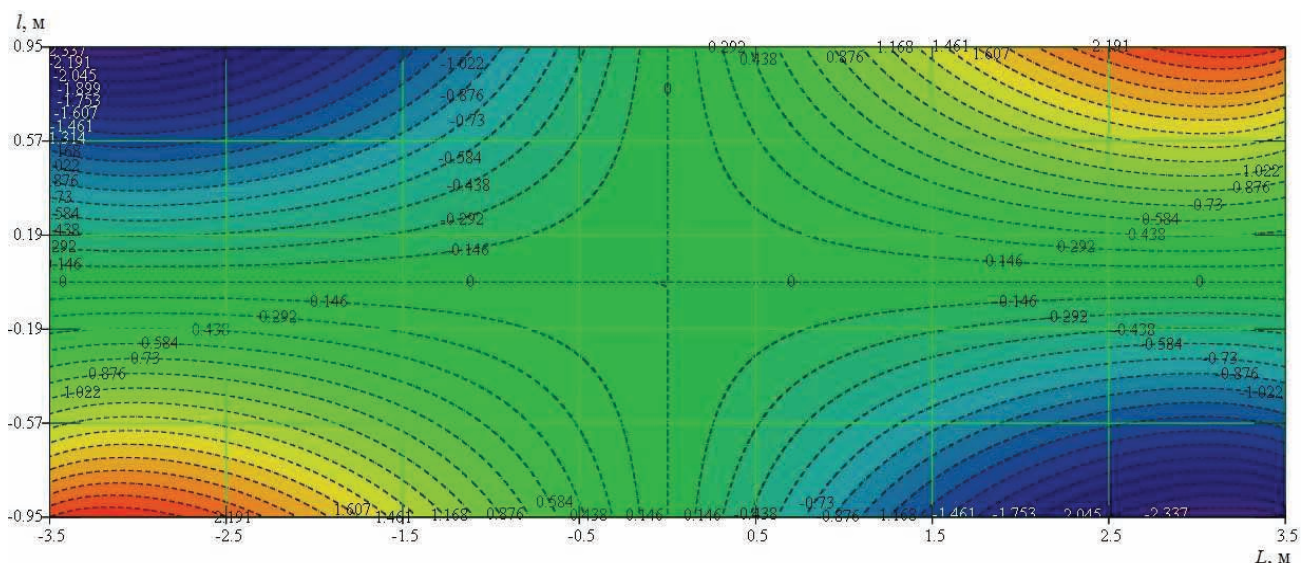


Рисунок 3 – Лінії рівня потенціалу Жуковського для крутильних коливань цистерни з розмірами 7000 x 1900 мм

З урахуванням кількості парціальних осциляторів дискретна математична модель транспортного засобу буде складатися з 25 і більше мас та мати сильно розтягнутий спектр вільних коливань. Останній недолік змушує використовувати для інтегрування такої системи надмірно малий розрахунковий крок, що ускладнює обчислення задачі дослідження динаміки (бо також необхідно враховувати й багато режимів руху, різні рівні рідини, тощо).

Тому, до її практичного використання,

- доцільно виконати спрощення моделі і пружні зв'язки, які утворюють високі частоти, замінити жорстким зв'язком (а відповідні маси об'єднати). Для виконання цього спрощення необхідно
- систему диференціальних рівнянь, яка описує й нелінійні зв'язки, лінеаризувати, записати в матричній формі та, використовуючи стандартні процедури лінійної алгебри, визначити частоти і форми вільних коливань даної системи.

Спрощена таким чином модель замінюється нелінійною, для чого відновлюються ті зв'язки, які були нелінійними в початковій системі, а потім були лінеаризовані. Таким чином, отримуємо нелінійну модель, яка є придатною для виконання динамічного розрахунку процесів транспортування рідких вантажів.

Дамо пояснення, чому шукана математична модель повинна бути нелінійною. При русі транспортного засобу по шляху із складним рельєфом в рідині збуджуються не лише поздовжні, поперечні та крутильні коливання, але й вертикальні зміщення, які призводять до періодичної зміни її ваги.

В рівнянні для поздовжніх коливань  $k$ -того парціального осцилятора [10]

$$\ddot{x}_k + (f/\pi) \cdot \omega_k \cdot \dot{x}_k + \omega_k^2 \cdot x_k = -a_x(t)$$

квадрат частоти знаходиться за формулою

$$\omega_k^2 = \beta_k \cdot (g + a_z(t)) \cdot \text{th}(\beta_k H),$$

де  $H$  – рівень рідини;  $a_x(t), a_z(t)$  – прискорення цистерни в поздовжньому та вертикальному напрямках;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\beta_k = (2k-1) \cdot \pi / a$  – хвильове число;  $f$  – декремент затухання коливань.

**Вільні коливання в поздовжній площині.** Як зазначено у попередньому пункті, перш ніж створювати складну математичну модель з урахуванням більшості факторів, які впливають на динамічну складову коливального руху, необхідно розробити лінійну (або лінеаризовану) модель, яка буде враховувати усі відомі зв'язки між елементами та формуватися й аналізуватися при використанні матричного аналізу. Лінеаризовану модель для складної коливальної системи (рис. 4) утворюють 19 диференціальних рівняння другого порядку, тобто при русі такої системи збуджується 19 частот вільних коливань, які відповідають групі поздовжніх коливань.

При моделюванні складові величини коливального процесу об'єднуються у вигляді вектора – стовпця

$$\overset{\Gamma}{Y} = (y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C, \varphi_T, \varphi_K, y_{II}, y_3^M, y_4^M, \varphi_{II}, x_1^P, x_2^P, x_3^P, x_{II}, x_T, x_K, x_T^M, x_{II}^M)^T, \quad (1)$$

де  $y_T, y_1^M, y_2^M, y_K, y_C$  – вертикальне переміщення рами, переднього та заднього мостів, кабіни, сидіння трактора;  $\varphi_T, \varphi_K$  – кут нахилу остову трактора та кабіни;  $y_{II}, y_3^M, y_4^M$  – вертикальне переміщення платформи, першого та другого мостів причіпного агрегату;  $\varphi_{II}$  – кут нахилу причіпного агрегату;  $x_1^P, x_2^P, x_3^P$  – рух рідини, яка приймає участь в коливальному процесі;  $x_T, x_{II}$  – поздовжній рух трактора та причіпного агрегату;  $x_K$  – поздовжній рух кабіни з сидінням;  $x_T^M, x_{II}^M$  – поздовжній рух контактної точки між шинами та дорогою на передніх колесах трактора та причіпного агрегату.

Тобто, цей коефіцієнт залежить від ваги рідини, що створює передумови появи параметричного резонансу. При цьому може виникнути

- внутрішній параметричний резонанс, який за умови  $a_x(t) = 0$  описується рівнянням Мат'є,
- зовнішній параметричний резонанс, який за умови співпадіння або кратності частот зміни прискорень  $a_x(t)$  та  $a_z(t)$  описується рівнянням Хілла.

Оскільки частоти та амплітуди зазначених прискорень залежать від багатьох чинників, дослідити розвиток параметричного резонансу та визначити умови стійкості руху можливо лише при використанні моделі всього транспортного засобу. Причому, ця модель повинна бути нелінійною.

Зауважимо, що коефіцієнт  $\omega_k^2$  залежить також і від рівня  $H$  рідини в цистерні, що суттєво ускладнює розрахункові дослідження параметричного резонансу. До того ж від значення  $H$  залежить набуття внутрішнього резонансу, коли дві спектральні лінії частот вільних коливань перетинаються (або зближуються і «відштовхуються» [13]). Важливо, що таке явище можна передбачити на основі аналізу лінеаризованої моделі, і це слід вважати додатковим аргументом на користь її створення.

Таким чином, окреслено фундаментальний підхід до математичного моделювання руху транспортного засобу при перевезенні рідкого вантажу. Зауважимо, що теоретичне підґрунтя для такого підходу виникло досить давно, і його елементи можна знайти в трудах багатьох класиків прикладної механіки та теорії коливань. Але його практична реалізація базується на застосуванні ефективної обчислювальної техніки, чого нашим вчителям бракувало, а зараз стало доступним для всіх. Тому раніше подібні задачі подібними методами вирішувалися рідко, мабуть лише при науковому дослідженні нових зразків ракетної або іншої кошторисної техніки відповідального призначення.

Подальший матеріал даної статті окреслює процес створення математичної моделі для дослідження динаміки та параметричного резонансу на прикладі колісного трактора та причіпної цистерни.

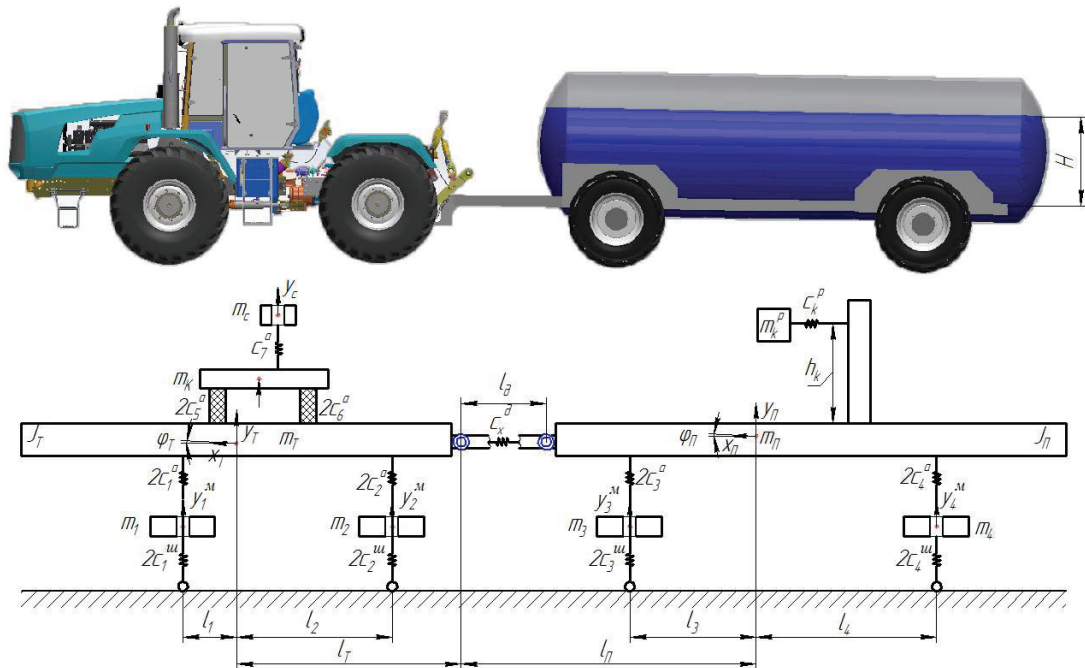


Рисунок 4 – Схема колісного трактора ХТЗ-242К та цистерни BSA KTW 20 для лінеаризованої моделі

Рівняння коливань загальної форми для дискретної моделі має наступний вигляд

$$M \cdot \ddot{\bar{Y}} + C \cdot \dot{\bar{Y}} = \bar{0}; \quad (2)$$

$$M = \text{diag} (m_T, m_1, m_2, m_K, m_C, J_T, J_K, m_{\Pi} + \\ + m_P, m_3, m_4, J_{\Pi}, m_1^p, m_2^p, m_3^p, m_{\Pi} + \\ + m_3 + m_4 + m_P, m_T + m_1 + m_2, m_K + m_C, m_T^u, m_{\Pi}^u),$$

де  $M$  – це діагональна інерційна матриця, яка складена із мас та моментів інерції;  $C$  – матриця жорсткості, відповідно;  $m_T$  – маса остову трактора (разом з двигуном та, для агрегату із причепом, половиною дишла);  $m_K$  – маса кабіни;  $m_C$  – маса сидіння (разом із трактористом),  $m_{\Pi}$  – маса рами та оболонки цистерни (разом з дишлом або, для причепа, його половиною);  $m_P$  – маса глибинної частини рідини, що рухається разом із оболонкою;  $m_1^p, m_2^p, m_3^p$  – маси поверхневих шарів рідини, де відбуваються низькочастотні коливання [9];  $m_1, \dots, m_4$  – маси мостів (разом із колесами);  $m_T^u$  – сумарні обертальні маси коліс трактора та двигуна, що приведені до руху шини по дорозі,

$$m_T^u = \frac{(2J_T^K + J_M^{\partial\theta} i_{TP}^2)}{r_K^2};$$

$J_T^K$  – момент інерції моста трактора;  $J_M^{\partial\theta}$  – момент інерції маховика і валів двигуна;  $i_{TP}$  – передавальне відношення трансмісії від валу двигуна до осі колеса;  $r_K$  – радіус колеса трактора;  $m_{\Pi}^u$  – сумарні обертальні маси коліс цистерни, що приведені до руху шини по дорозі;  $J_T, J_K, J_{\Pi}$  – моменти інерції при обертанні трактора, кабіни та цистерни на кути  $\varphi_T, \varphi_K, \varphi_{\Pi}$  відносно їх центрів мас.

Відмітимо, що в лінеаризованій моделі матриця  $F$ , яка складена із коефіцієнтів внутрішнього тертя, розглядатися не буде, адже задачею динамічного аналізу є знаходження резонансних частот, а коефіцієнт демпфірування на величину цих частот майже не впливає.

На горизонтальній дорозі трактор з цистерною має безліч положень рівноваги, оскільки за умови

$$x_{\Pi} - x_T = \text{const},$$

$$x_K - x_T = 0, \quad x_T^u - x_T = 0, \quad x_{\Pi}^u - x_{\Pi} = 0;$$

$$x_j^p - x_{\Pi} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

координата  $x_T$  може залишатися довільною. Тому матриця  $C$  є виродженою, і одна із частот нульова.

Якщо система, що моделюється, під час руху залишається динамічно стійкою, то виконується додаткова умова  $C \geq 0$ , тоді всі власні числа цієї матриці – невід'ємні. Проте при значному від'ємному значенні сили  $R_x$  ця система може втрачати стійкість; при цьому одна із частот матриці  $C$  також становиться від'ємною, а у агрегаті спостерігається так званий *галопуючий резонанс*.

При формуванні пов'язаних форм коливань машинно-тракторного агрегату приведемо рівняння (2) до наступного вигляду:

$$\frac{d^2}{dt^2} \bar{Y}^* + C^* \cdot \bar{Y}^* = \bar{0},$$

де  $C^* = M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} > 0$ ,  $\bar{Y}^* = M^{1/2} \cdot \bar{Y}$ .

Звідки отримаємо рівняння для кругових частот  $\omega$  вільних коливань:

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0.$$

Матриці жорсткостей  $C$  для трактора з цистерною можуть бути наведені в блочному вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] & [C_{TX}^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{II}] & [C_{II}^T] \\ [C_{TX}] & [C_{IX}] & [C_X] \end{bmatrix} + \frac{R_x}{l_0} \cdot \begin{bmatrix} [C_T^\Psi] & [C_{III}] & [\Theta_2^T] \\ [C_{III}^T] & [C_{II}^\Psi] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix} + R_x \cdot \begin{bmatrix} [C_T^R] & [\Theta_1] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_1^T] & [C_{II}^R] & [\Theta_2^T] \\ [\Theta_2] & [\Theta_2] & [\Theta_3] \end{bmatrix}; \quad (3)$$

де квадратні блоки  $C_T$ ,  $C_T^\Psi$ ,  $C_T^R$ ,  $C_{II}$ ,  $C_{II}^\Psi$ ,  $C_{II}^R$ ,  $C_{III}$  – це матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться, відповідно, до трактора, цистерни та агрегату в цілому і мають однаковий розмір  $[7 \times 7]$ ,

$$C_T = \begin{bmatrix} \sum_{j=1,2,5,6} c_j^a & -c_1^a & -c_2^a & -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* \\ -c_1^a & c_1^a + c_1^u & 0 & 0 & 0 & -c_1^u L_1 - G_T^1 \psi_T & 0 \\ -c_2^a & 0 & c_2^a + c_2^u & 0 & 0 & c_2^u L_2 - G_T^2 \psi_T & 0 \\ -\sum_{j=5,6} c_j^a & 0 & 0 & \sum_{j=5,6,7} c_j^a & -c_7^a & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* \\ 0 & 0 & 0 & -c_7^a & c_7^a & 0 & c_7^a l_7^* \\ c_6^a l_6 - c_5^a l_5 + G_T \psi_T & -c_1^u L_1 - G_T^1 \psi_T & c_2^u L_2 - G_T^2 \psi_T & c_5^a l_5 - c_6^a l_6 & 0 & \sum_{j=1,2} c_j^a L_j^2 + \sum_{j=5,6} c_j^a l_j^2 + c_x^\delta H_T^2 + c_T^u h_T^2 + G_T h_T & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j \\ c_5^a l_5^* - c_6^a l_6^* & 0 & 0 & c_6^a l_6^* - c_5^a l_5^* & c_7^a l_7^* & -\sum_{j=5,6} c_j^a l_j^* l_j & \sum_{j=5,6,7} c_j^a l_j^{*2} + c_x^k h_K^2 + G_K h_K \end{bmatrix};$$

$$C_{II} = \begin{bmatrix} \sum_{j=3,4} c_j^a & -c_3^a & -c_4^a & G_{II} \psi_{II} & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^a & c_3^a + c_3^u & 0 & -c_3^u L_3 - G_{II}^3 \psi_{II} & 0 & 0 & 0 \\ -c_4^a & 0 & c_4^a + c_4^u & c_4^u L_4 - G_{II}^4 \psi_{II} & 0 & 0 & 0 \\ G_{II} \psi_{II} & -c_3^u L_3 - G_{II}^3 \psi_{II} & c_4^u L_4 - G_{II}^4 \psi_{II} & \sum_{j=3,4} c_j^u L_j^2 + \sum_{k=1}^3 (c_k^p h_k^2 + G_k^p h_k) + c_x^\delta H_{II}^2 + c_{II}^u h_{II}^2 + G_{II} h_{II} & -c_1^p h_1 - G_1^p & -c_2^p h_2 - G_2^p & -c_3^p h_3 - G_3^p \\ 0 & 0 & 0 & -c_1^p h_1 - G_1^p & c_1^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2^p h_2 - G_2^p & 0 & c_2^p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_3^p h_3 - G_3^p & 0 & 0 & c_3^p \end{bmatrix};$$

$$C_T^\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_T & 0 & 0 & 0 & 0 & l_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{II}^\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -l_{II} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{II} & 0 & 0 & l_{II}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C_{III} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_{III} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_T & 0 & 0 & l_T l_{III} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_T^R = \text{diag}(0, 0, 0, 0, 0, l_T, 0); \quad C_{II}^R = \text{diag}(0, 0, 0, l_{II}, 0, 0, 0);$$

квадратний блок  $C_X$  – це матриця зв'язку повздовжніх переміщень (її розмір  $[5 \times 5]$ ),

$$C_X = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^3 c_k^p + c_x^\delta + c_{II}^u & -c_x^\delta & 0 & 0 & -c_{II}^u \\ -c_x^\delta & c_x^\delta + c_x^k + c_T^u & -c_x^k & -c_T^u & 0 \\ 0 & -c_x^k & c_x^k & 0 & 0 \\ 0 & -c_T^u & 0 & c_T^u & 0 \\ -c_{II}^u & 0 & 0 & 0 & c_{II}^u \end{bmatrix};$$

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$  – нульові матриці розмірів  $[7 \times 7]$ ,  $[5 \times 7]$  та  $[5 \times 5]$ , які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів;  $C_{TX}, C_{PIX}$  – неквадратні матриці жорсткості зв'язку, що мають розмір  $[5 \times 7]$ ,

$$C_{TX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x^\delta H_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_K - c_x^\delta H_T + c_T^u h_T & -c_x^K h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_K & c_x^K h_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_T^u h_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_{PIX} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \sum_{j=1}^3 (c_j^p h_j + G_j^p) - G_y - c_x^\delta H_{II} + c_{II}^u h_{II} - R_y & -c_1^p & -c_2^p & -c_3^p \\ 0 & 0 & 0 & c_x^\delta H_{II} + G_y + R_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{II}^u h_{II} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В цих матрицях з літери «с» починаються позначення коефіцієнтів жорсткості. А саме,  $c_1^a, c_2^a, \dots, c_7^a$  – це жорсткість у вертикальному напрямку амортизаторів чи ресор мостів трактора і цистерни, опор кабіни, сидіння водія, відповідно;  $c_1^u, c_2^u, \dots, c_4^u$  – сумарна радіальна жорсткість шин на відповідному мосту трактора або цистерни;  $c_{II}^u, c_{II}^u$  – сумарна тангенціальна жорсткість шин трактора або причіпного агрегату, підрахована для усіх мостів разом;  $c_x^K$  – сумарна жорсткість опор кабіни у горизонтальному напрямку;  $c_x^\delta, c_y^\delta$  – жорсткість дишла у горизонтальному та вертикальному напрямках;  $c_1^p, c_2^p, c_3^p$  – коефіцієнти жорсткості зв'язку між шаром рідини та оболонкою цистерни, саме ці коефіцієнти використовуються у рівняннях низькочастотних коливань рідини [9]

$$m_k^p \cdot \frac{d^2 x_k^p}{dt^2} + c_k^p \cdot \dot{x}_k^p = c_k^p \cdot (x_{II} + h_k \cdot \varphi_{II}) + G_k^p \cdot \varphi_{II}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$m_k^p$  – маса  $k$ -го шару;  $G_k^p$  – сила ваги цього шару.

Величини, які починаються з літери «l», як і на рис. 3, позначають відстані у горизонтальному напрямку. Так  $l_1-l_6$  – це відстань від центру мас трактора або цистерни до їх мостів, опор кабіни, сидіння, відповідно;  $l_5^*, l_6^*, l_7^*$  – від центру мас кабіни до її опор і сидіння;  $l_T, l_{II}$  – від точок з'єднання дишла до центру мас трактора та цистерни;  $l_\delta$  – це довжина дишла.

Величини  $L_1-L_4$  – це значення плеча сили, скореговані з урахуванням тангенціальної жорсткості шини,

$$L_1 = l_1 + \left( \frac{G_T}{C_T^u} \right) \cdot \Psi_T; \quad L_2 = l_2 - \left( \frac{G_T}{C_T^u} \right) \cdot \Psi_T;$$

$$L_3 = l_3 + \left( \frac{G_{II}}{C_{II}^u} \right) \cdot \Psi_{II}; \quad L_4 = l_4 - \left( \frac{G_{II}}{C_{II}^u} \right) \cdot \Psi_{II},$$

$\Psi_T, \Psi_{II}$  – коефіцієнт зчеплення шин трактора та при-

чепа з дорогою.

Для коліс цистерни коефіцієнт зчеплення визначається за формулою

$$\Psi_{II} = \Psi_{TP} \cdot \dot{x}_{II},$$

де  $\Psi_{TP}$  – це коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від властивостей дорожнього покриття, про що мова буде у цієї ж статті далі. Для трактора цей коефіцієнт, окрім тертя, залежить від крутного моменту двигуна та передавального числа трансмісії і змінюється у достатньо широких межах, а саме:

– від від'ємного значення  $\Psi_T \approx -1$ , яке відповідає розгону при найбільшому передавальному відношенні;

– до позитивного значення  $\Psi_T = \Psi_{II}$ , що відповідає руху трактора при відключеній передачі.

Величини, які починаються з літери  $h$ , позначають відстані у вертикальному напрямку. Так  $h_T, h_{II}$  – це відстань від осі колеса до центру мас трактора або цистерни;  $H_T, H_{II}$  – відстані від точок приєднання зчіпного пристрою до центру мас трактора та цистерни;  $h_k$  – від центру мас кабіни до її опор;  $h_k$  – це відстань між центрами мас  $k$ -го шару рідини та цистерни.

Літерою «G» позначено сили ваги. Так  $G_T, G_{II}, G_K$  – це сила ваги трактора (разом із кабіною), причепа чи напівпричепа (разом із рідиною), кабіни трактора (разом із сидінням та трактористом);  $G_T^1, G_T^2, G_{II}^3, G_{II}^4$  – частки ваги, які навантажують відповідний міст;  $R_y$  – вертикальна сила, що діє на гак трактора.

Використовуючи для характерного режиму складену лінеаризовану модель та конкретні значення параметрів для конструкції трактора з цистерною отримуюмо розподіли частот вільних коливань (табл. 1) при рівні рідини в цистерні  $H = 1.5$  м (обумовлено значенням максимального перерозподілу [9]).

Кожній частоті із табл. 1 відповідає форма вільних коливань. Коефіцієнти кожної ( $k$ -тої) власної форми було нормовано у відповідності до правила

$$\dot{Y}_j^* = M^{1/2} \cdot \dot{Y}_{j,j}, j = 0, 1, \dots, 18.$$

Якщо тепер утворити суми

$$T_k = 0.5 \cdot A_k^2 \cdot \omega_k^2 \cdot \sum_{j=0}^{18} (Y_j^*)^2,$$

де  $A_k, \omega_k = 2\pi \cdot \nu_k$  – амплітуда та кругова частота коливань, то ці суми відповідатимуть кінетичній енергії коливання. Тому сума квадратів координат  $\dot{Y}_j^*$  дорівнює 1, а таке нормування називають *енергетичним*.

В процесі розрахунку отримуємо залежності частот вільних коливань від рівня рідини  $H$  (рис. 5).

Таблиця 1 – Компоненти нормованих форм вільних коливань

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\nu$	<b>0</b>	<b>0.27</b>	<b>0.34</b>	<b>0.54</b>	<b>0.57</b>	<b>0.72</b>	<b>0.76</b>	<b>0.86</b>	<b>1.21</b>	<b>1.32</b>	<b>1.58</b>
$y_T$	0	0.01	0.02	-0.01	0	0.14	0.01	0.16	<b>0.69</b>	<b>-0.43</b>	0.09
$y_1^u$	0	0.03	0	0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.2	0	-0.06	-0.04
$y_2^u$	0	0	0.01	-0.01	0	0.06	0.01	0.07	<b>0.29</b>	-0.18	0.04
$y_K$	0	0	0.14	-0.01	0	<b>0.97</b>	-0.05	-0.14	-0.13	0.06	-0.01
$y_C$	0	-0.01	<b>0.99</b>	-0.02	-0.01	-0.15	0	0	0	0	0.02
$\varphi_T$	0	0.09	-0.01	0.03	-0.07	-0.12	-0.12	<b>-0.62</b>	-0.21	-0.03	-0.13
$\varphi_K$	0	0.01	-0.03	-0.06	-0.04	-0.02	-0.03	-0.16	-0.09	-0.02	<b>0.98</b>
$y_{II}$	0	0.02	0	0.01	-0.02	-0.02	-0.06	-0.42	0.58	<b>0.57</b>	-0.01
$y_3^u$	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
$y_4^u$	0	0.01	0	0	-0.01	-0.01	-0.02	-0.1	0.14	0.14	0
$\varphi_{II}$	0	-0.11	0	-0.02	0.08	0.03	0.12	<b>0.48</b>	-0.04	<b>0.64</b>	0.1
$x_1^p$	<b>0.54</b>	<b>-0.83</b>	-0.01	0.05	-0.01	-0.01	-0.03	-0.1	0	-0.05	-0.01
$x_2^p$	0.14	0.08	0	<b>-0.3</b>	<b>0.93</b>	-0.01	-0.02	-0.1	0	-0.04	0
$x_3^p$	0.06	0.03	0	-0.03	-0.02	0.03	<b>0.98</b>	-0.19	0	-0.03	0
$x_{II}$	<b>0.57</b>	<b>0.35</b>	0	-0.13	-0.14	0	-0.04	0.08	0	0.05	-0.01
$x_T$	<b>0.53</b>	<b>0.34</b>	0	-0.12	-0.14	0	-0.04	0.05	0	0.01	-0.01
$x_K$	0.17	0.16	0.02	<b>0.93</b>	<b>0.26</b>	0.01	0.02	0.02	0	0	0.07
$x_T^u$	0.21	0.13	0	-0.05	-0.05	0	-0.02	0.02	0	0	0
$x_{II}^u$	0.1	0.06	0	-0.02	-0.02	0	-0.01	0.02	0	0.02	0

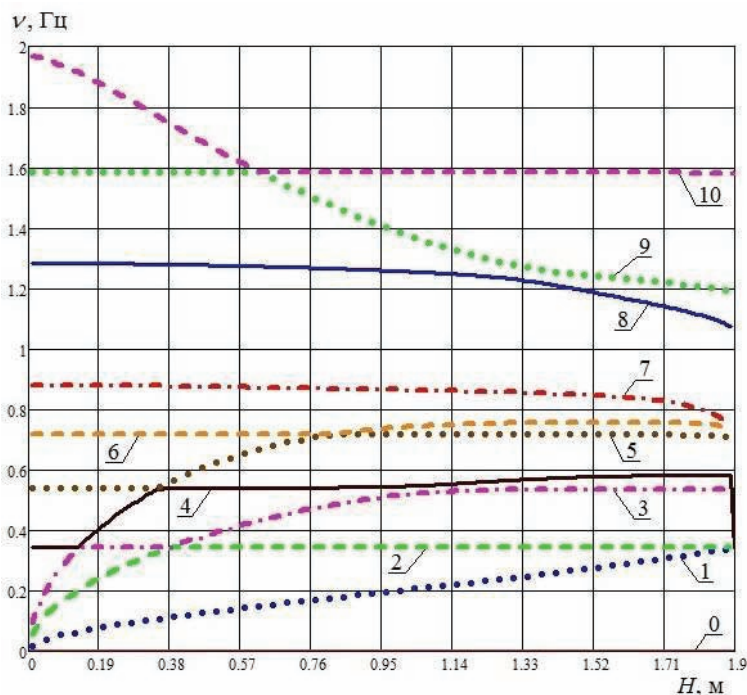


Рисунок 5 – Залежність найнижчих та низьких частот вільних коливань від рівня рідини  $H$



Аналізуючи отримані залежності, зробимо висновки про те, що величина рівня рідини  $H$  має істотний вплив на частоти. Окремо слід виділити те, що графіки частот, які спостерігаються на рис. 5 – перетинаються. До того, при наближенні спектральних значень одне до одного, спостерігається своєрідна «взаємодія» відповідних гармонік (наприклад, гармоніки 3 і 4 у табл. 1). Це свідчить про особливості руху спектру у пучках лінійних операторів, які описано в [13].

На основі аналізу результатів динамічного аналізу встановлено можливість і доречність цілої низки спрощень математичної моделі. Перелічимо їх із додаванням необхідних пояснень:

– Маса заднього моста об'єднується з остовом (рамою) трактора, а мостів причіпного агрегату з його платформою. При цьому жорсткість мостів приводиться до жорсткості шин за правилом обернених величин, а саме:

$$\frac{1}{c_{\Sigma}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}.$$

– Коливання рам трактора та цистерни (разом з їхніми мостами) у горизонтальному напрямку вважа-

ються синфазними, тобто поздовжня піддатливість дишла приймається нескінченно великою, і відповідний силовий зв'язок змінюється на кінематичний (зауважимо, що об'єднання не стосується горизонтального руху кабіни і сидіння).

– Тангенціальною піддатливістю шин та крутильною піддатливістю елементів трансмісії можливо знехтувати, що дає змогу привести момент інерції двигуна та шин до інерційних мас трактора та причепа.

Як наслідок зроблених та втілених рекомендацій, кількість динамічних параметрів, що моделюються диференціальними рівняннями другого порядку, скорочується з 19 до 11, і це число добре відповідає кількості низькочастотних гармонік (табл. 1).

Зауважимо, що динамічний аналіз спрощеної моделі можливо проводити за допомогою тих самих матриць (3), якщо відповідні коефіцієнти жорсткості зв'язку між масами, що об'єднуються, збільшити на декілька порядків. Дослідження довело, що після вказаної трансформації група низьких частот практично не змінюється.

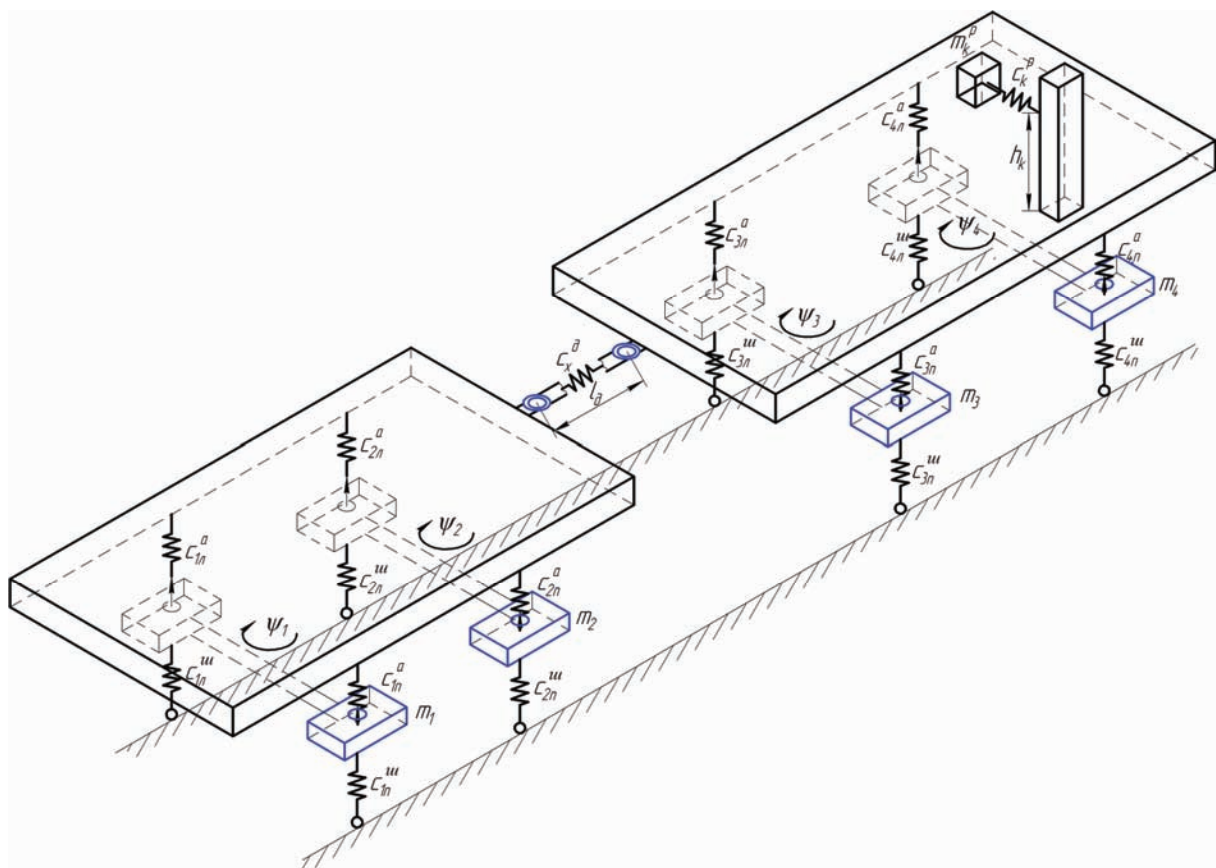


Рисунок 6 – Розрахункова схема при дослідженні поперечно-кутових вільних коливань

**Вільні коливання в поперечні площині.** Дослідження поперечно-кутових вільних коливань базується на побудові розрахункової схеми (рис. 6).

При моделюванні складові величини коливально-го процесу об'єднуються у вигляді вектора – стовпця

$$\bar{Y} = (\psi_T, \psi_1, \psi_2, \psi_K, \psi_3, \psi_4, \psi_{II}, z_1^p, z_2^p, z_3^p), \quad (4)$$

де  $\psi_T, \psi_1, \psi_2, \psi_K$  – поперечні кути нахилу остову (рами), переднього та заднього мостів, кабіни трактора;  $\psi_3, \psi_4, \psi_{II}$  – поперечні кути нахилу першого та другого мостів, платформи причіпного агрегату;  $z_1^p, z_2^p, z_3^p$  – рух рідини, яка приймає участь в поперечному коливальному процесі.

Рівняння коливань загальної форми для дискретної моделі має наступний вигляд

$$M \cdot \ddot{\bar{Y}} + C \cdot \dot{\bar{Y}} = \bar{0};$$

$$M = \text{diag} \left( J_T^\Pi, J_1^\Pi, J_2^\Pi, J_K^\Pi, J_3^\Pi, J_4^\Pi, J_\Pi^\Pi, m_1^p, m_2^p, m_3^p \right), \quad (5)$$

де  $J_T^\Pi, J_K^\Pi, J_\Pi^\Pi$  – моменти інерції при обертанні трактора, кабіни та цистерни на кути  $\psi_T, \psi_K, \psi_\Pi$  відносно їх центрів мас в поперечній площині;  $J_1^\Pi, J_2^\Pi$  та  $J_3^\Pi, J_4^\Pi, J_3^{*\Pi}$  – моменти інерції при обертанні мостів трактора та платформ цистерн;  $m_1^p, m_2^p, m_3^p$  – маси поверхневих шарів рідини в поперечній площині руху, де відбуваються низькочастотні коливання [9].

Наступним кроком користуємось алгоритмом, який наведено в роботі [10], звідки отримуємо рівняння власних частот  $\omega$ :

$$\det(\omega^2 I - C^*) = 0.$$

$$C_T = \begin{bmatrix} (c_1^a + c_2^a) d_1^2 & -c_1^a \cdot d_1^2 & -c_2^a \cdot d_2^2 & -c_5^a d_{k1}^2 - c_6^a d_{k2}^2 \\ -c_1^a \cdot d_1^2 & c_1^a \cdot d_1^2 + c_1^u \cdot d_1^2 & 0 & 0 \\ -c_2^a \cdot d_2^2 & 0 & c_2^a \cdot d_1^2 + c_2^u \cdot d_1^2 & 0 \\ -c_5^a d_{k1}^2 - c_6^a d_{k2}^2 & 0 & 0 & c_5^a d_{k1}^2 + c_6^a d_{k2}^2 \end{bmatrix}; \quad C_{\Pi\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_\Pi = \begin{bmatrix} c_3^a \cdot d_{\text{оп}}^2 + c_3^u \cdot d_3^2 & 0 & -c_3^a \cdot d_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4^a \cdot d_{\text{оп}}^2 + c_4^u \cdot d_4^2 & -c_4^a \cdot d_4^2 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^u \cdot d_3^2 & -c_4^u \cdot d_4^2 & (c_3^a + c_4^a) d_{\text{оп}}^2 + \sum_{m=1}^3 (c_m^p h_m^2 + G_m^p h_m) & -c_1^p h_1 - G_1^p & -c_2^p h_2 - G_2^p & -c_3^p h_3 - G_3^p \\ 0 & 0 & -c_1^p h_1 - G_1^p & c_1^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2^p h_2 - G_2^p & 0 & c_2^p & 0 \\ 0 & 0 & -c_3^p h_3 - G_3^p & 0 & 0 & c_3^p \end{bmatrix};$$

$$C_T^\Psi = \text{diag}(1, 0, 0, 0); \quad C_\Pi^\Psi = \text{diag}(0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Як і вище, у матрицях з літери «с» починаються позначення коефіцієнтів жорсткості.  $A$  саме,  $c_1^a, c_2^a, \dots, c_6^a$  – це сумарна жорсткість у вертикальному напрямку амортизаторів чи ресор мостів трактора і цистерни, опор кабіни, відповідно;  $c_1^u, c_2^u, \dots, c_4^u$  – сумарна радіальна жорсткість шин на відповідному мосту трактора або цистерни;  $c_1^p, c_2^p, c_3^p$  – коефіцієнти жорсткості зв'язку між шаром рідини та оболонкою цистерни в поперечній площині дії, саме ці коефіцієнти використовуються у рівняннях низькочастотних коливань рідини

$$m_m^p \cdot \frac{d^2 z_m^p}{dt^2} + c_m^p \cdot z_m^p = c_m^p \cdot (z_\Pi + h_m \cdot \psi_\Pi) + G_m^p \cdot \psi_\Pi, \quad m = 1, 2, 3$$

де  $m_m^p$  – маса  $m$ -го шару;  $G_m^p$  – сила ваги цього шару;  $h_m, m = 1, 2, 3$  – це відстань між центрами мас  $m$ -го шару рідини та цистерни.

В рівнянні (6) використані наступні позначення:  $d_T, d_1$  та  $d_2$  – відстань від центру мас трактора, пе-

Матриці жорсткостей  $C$  для колісного трактора з причіпною цистерною може бути наведена в блочно-му вигляді:

$$C = \begin{bmatrix} [C_T] & [\Theta_1] \\ [\Theta_1^T] & [C_\Pi] \end{bmatrix} + F_z \cdot \begin{bmatrix} [C_T^\Psi] & [C_{\Pi\Pi}] \\ [C_{\Pi\Pi}^T] & [C_\Pi^\Psi] \end{bmatrix}; \quad (6)$$

де квадратні блоки  $C_T, C_T^\Psi$  – це матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться до трактора і мають однаковий розмір  $[4 \times 4]$ ;  $C_\Pi, C_\Pi^\Psi$  – матриці коефіцієнтів жорсткості, які відносяться до причіпної цистерни, а також мають однаковий розмір  $[6 \times 6]$ ;  $C_{\Pi\Pi}$  – матриці зв'язку коефіцієнтів жорсткості, які узгоджують коливальний рух трактора та цистерн, мають розмір  $[4 \times 6]$ ;  $\Theta_1$  – нульові матриці розмірів  $[4 \times 4]$ , які вказують на відсутність силового зв'язку між відповідними групами елементів.

реднього та заднього мостів до пружних елементів лівого або правого бортів трактора;  $d_{\text{оп}}, d_3$  та  $d_4$  – відстань від центру мас причіпного агрегату, переднього та заднього мостів до пружних елементів лівого або правого бортів агрегату.

$$F_z = \frac{0,5 r_{kr} \cdot (m_\Pi + m(H))}{1 + \frac{0,5 r_{kr} \cdot (m_\Pi + m(H))}{C_\Pi}}, \quad (7)$$

$r_{kr}$  – радіус шарніру тягово-зчіпного пристрою (рис. 7);  $m_\Pi$  – маса платформи цистерни;  $m$  – маса рідини в горизонтальній ємності (яка залежить від рівня рідини  $H$ );  $W$  – об'єм матеріалу, який використовується в тягово-причіпному пристрої;  $G$  – модуль здвигу ( $G = 8 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>). Радіус шарніру тягово-зчіпного пристрою становить 0,09 м (рис. 7).

Використовуючи алгоритм динамічного аналізу транспортного засобу для поздовжній площині, проведемо динамічний аналіз в поперечній площині руху МТА. Кожній частоті відповідає форма вільних коливань; форми для низьких частот наведено у табл. 2.



Рисунок 7 – Зображення тягово-зчіпного пристрою трактора та агрегатів перемінної маси

В процесі розрахунку отримуємо залежності вільних частот від рівня рідини наповненості  $H$  (рис. 8) при дослідженні поперечно-кутових коливань.

Проводячи динамічний аналіз руху колісного трактора з цистерною відмітимо, що графіки частот, які спостерігаються на рис. 8, не перетинаються. Окрім того, при наближенні спектральних значень одне до одного, спостерігається ефект відштовхування спектральних траєкторій (наприклад, гармоніки 4 у табл. 2), який приводив до відсутності кратних резонансів. Це свідчить про ефект обміну координат у власних формах при проходженні зони наближеного резонансу. Що дає передумови до ствердження про те, що в зоні обміну координат спостерігається несприятливий рух в поперечній площині.

Таблиця 2 – Компоненти нормованих форм вільних коливань

Номер	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\nu$	<b>0</b>	<b>0.61</b>	<b>1.22</b>	<b>1.79</b>	<b>2.45</b>	<b>4.14</b>	<b>8.79</b>	<b>10.59</b>	<b>10.73</b>	<b>25.38</b>
$\psi_{\Gamma}$	<b>0.65</b>	-0	-0	-0	-0.01	0.01	0	0	-0	<b>-0.76</b>
$\psi_1$	0.03	-0	-0	-0	-0.02	<b>-1</b>	-0	0	0	0.02
$\psi_2$	<b>0.75</b>	-0	-0	-0	-0.06	0.03	0.06	0	0.01	<b>0.65</b>
$\psi_{\kappa}$	0.05	-0	-0	-0	-0	0	<b>-1</b>	0	0	0.04
$\psi_3$	0	0	0	0.01	0.12	-0	-0	<b>0.71</b>	<b>0.7</b>	-0
$\psi_4$	0	0	0	0.01	0.12	-0	-0	<b>-0.71</b>	<b>0.7</b>	-0
$\psi_{\Pi}$	0.06	0.04	0.03	0.05	<b>0.98</b>	-0.01	-0	0	-0.16	0.03
$z_1^p$	0	<b>1</b>	-0.01	-0	-0.04	0	0	0	0	-0
$z_2^p$	0	0.01	<b>1</b>	-0	-0.03	0	0	0	0	-0
$z_3^p$	0	0	0	<b>1</b>	-0.05	0	0	0	0	-0

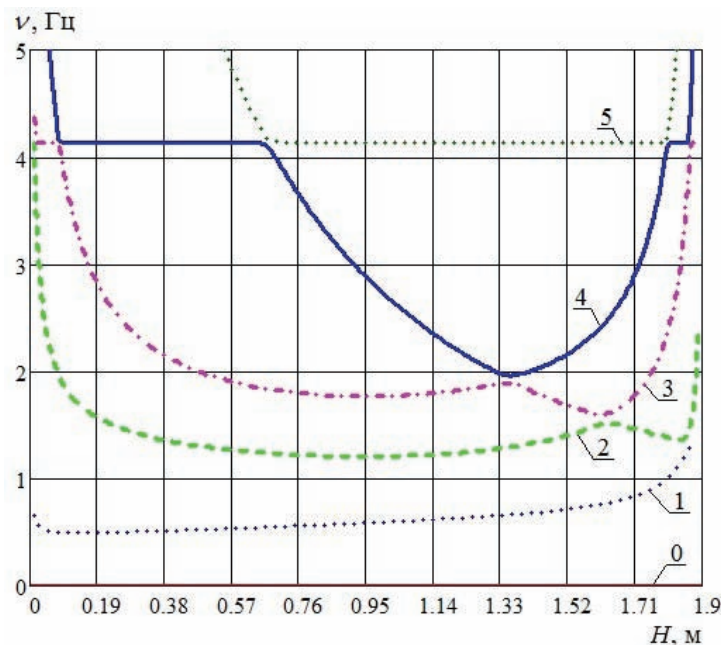


Рисунок 8 – Залежність частот вільних коливань від рівня рідини  $H$

#### Вимушені коливання в поздовжній площині.

Для комплексного формування математичної моделі руху вертикальних, поздовжніх та кутових переміщень колісного трактора з цистерною необхідно побудувати розрахункові схеми з виділенням основних складових, які діють при русі по нерівній поверхні.

Під нерівностями шляху у цій роботі ми будемо розуміти їх миттєві середні значення для лівого та правого колеса на кожному із чотирьох мостів окремо; саме ці фактори збуджують пов'язані коливання, і для їх аналізу достатньо застосовувати так звані *велосипедні розрахункові схеми*, які й показано на рис. 9.

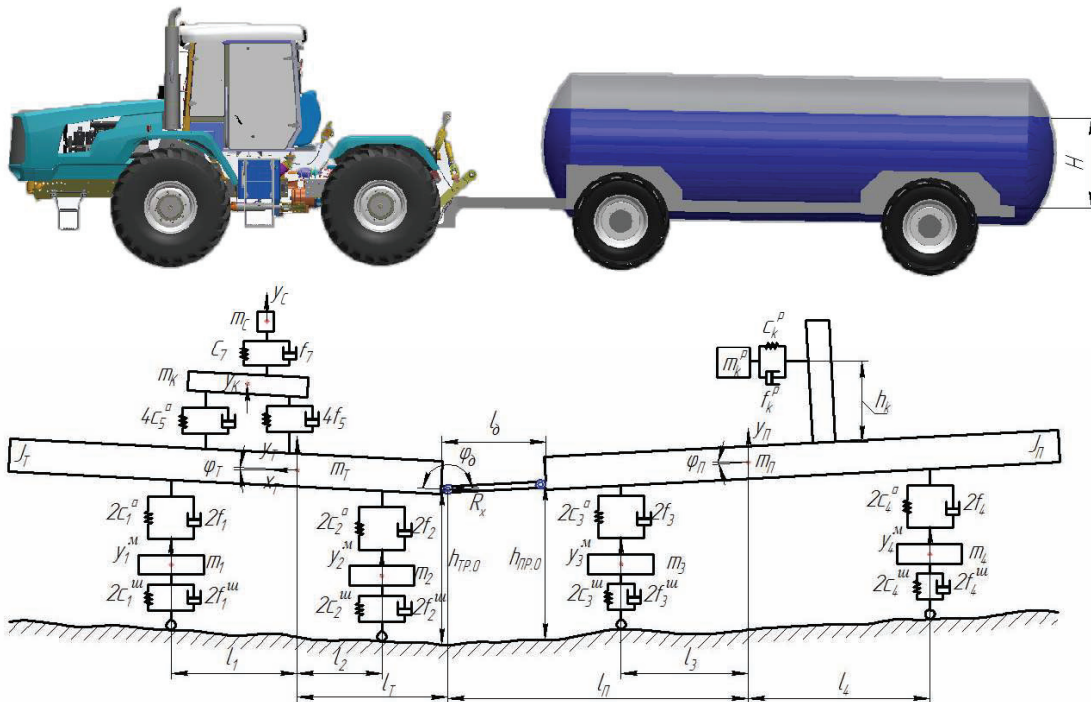


Рисунок 9 – Схема колісного трактора ХТЗ-242К та цистерни BSA KTW 20 для нелінійної моделі

Оскільки кути передач зусилля між трактором і причепом є малими, повздовжні коливання більшості зосереджених мас (корпусів трактора і цистерни, мостів і шин, але не рідини у цистерні або кабіни з сидінням) припустимо вважати синфазними.

В рівняннях, що наведено нижче, для опису динамічних характеристик ми у більшості випадків зберегли ті ж самі позначення, що вище було застосовано у елементах матриць.

Надані у тексті підстрочні пояснення стосуються наступних позначень:

- для окремих діючих сил, які у лінеаризованій моделі не конкретизувалися;
- для коефіцієнтів тертя, які у лінеаризованій моделі не використовувалися;

$$\sum P_{TP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M - \sum_{l=5}^6 P_l + R_x \cdot (\varphi_0 - \psi_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_П - \dot{\varphi}_T));$$

$$P_l = c_l^a \cdot (y_l^M - y_{Tl}) + f_l \cdot (\dot{y}_l^M - \dot{y}_{Tl}); P_l = c_l^a \cdot ((y_T \mp l_l \cdot \varphi_T) - (y_K \mp l_l \cdot \varphi_K)) + f_l \cdot ((\dot{y}_T \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_T) - (\dot{y}_K \mp l_l \cdot \dot{\varphi}_K)), l = 5, 6;$$

$$P_1^M = c_1^{uu} \cdot (y_{TP1} - y_1^M) + f_1^{uu} \cdot (\dot{y}_{TP1} - \dot{y}_1^M) + G_1^M; P_2^M = c_2^{uu} \cdot (y_{TP2} - y_{T2}) + f_2^{uu} \cdot (\dot{y}_{TP2} - \dot{y}_{T2}) + G_2^M;$$

$$P_{TP} = \sum_{i=1}^2 P_i^M \dot{y}_{TPi} + \dot{x}_T \psi_{TP} \sum_{i=1}^2 P_i^M; y_{Ti} = y_T \mp l_i \cdot \varphi_T, i = 1, 2; P_C = c_7^a \cdot (y_K + l_7 \cdot \varphi_K - y_C) + f_7 \cdot (\dot{y}_K + l_7 \cdot \dot{\varphi}_K - \dot{y}_C).$$

Повздовжні переміщення трактора (крім кабіни) і цистерни (крім поверхневих шарів рідини) відбуваються із однаковою швидкістю та прискоренням, що відповідає рівнянню поступального руху центра мас:

$$\left( m_T + \sum_{i=1}^4 m_i + m_{П} + m_P + m_{DV} \right) \cdot \ddot{x}_T = (M_{кр} \cdot i_{TP}) / r_K - P_{BS} - P_{TP} - P_{TPP} + P_K;$$

де сила спротиву причепа об'єднує вплив тертя та кута нахилу дороги,

- для чинників, які збуджують коливання.

Вертикальні переміщення рами трактора, переднього моста, кабіни та сидіння відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

$$m_T \cdot \ddot{y}_T = \sum P_{TP};$$

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1^M = P_1^M - P_l;$$

$$m_K \cdot \ddot{y}_K = \sum_{l=5}^6 P_l - P_C;$$

$$m_C \cdot \ddot{y}_C = P_C,$$

де похідна за часом позначена крапкою, а діючі сили визначаються за формулами

$$P_{TPP} = \sum_{i=3}^4 P_i^M \cdot \dot{y}_{TPi} + \dot{x}_T \psi_{TP} \cdot \sum_{i=3}^4 P_i^M;$$

$$P_i^M = c_i^{uu} \cdot (y_{TPi} - y_{Pi}) + f_i^{uu} \cdot (\dot{y}_{TPi} - \dot{y}_{Pi}) + G_i^M;$$

$$y_{Pi} = y_{П} \mp l_i \cdot \varphi_{П}, i = 3, 4;$$

$$P_K = c_x^K \cdot (x_K - x_T) + f_x^K \cdot (\dot{x}_K - \dot{x}_T).$$

Повздовжні переміщення кабіни і сидіння описуються диференціальним рівнянням

$$(m_K + m_C) \cdot \ddot{x}_T = -P_K.$$

Куткові переміщення корпусу і кабіни трактора

визначаються із диференціальних рівнянь обертально-го руху:

$$J_T \cdot \ddot{\varphi}_T = \sum M_{TP} + R_x (H_T - h_{T.0} + l_T \cdot (\varphi_\delta - \varphi_T));$$

$$J_K \cdot \ddot{\varphi}_K = P_6 l_6 - P_5 l_5 - P_7 l_7,$$

де

$$\sum M_{TP} = P_2^M l_2 - P_1 l_1 + P_5 l_5 - P_6 l_6 +$$

$$+ R_x (h_T - \psi_T R_T \text{sign}(\dot{\varphi}_\Pi - \dot{\varphi}_T)) -$$

$$- H_T \left( \frac{M_{кр} i_{TP}}{r_K} - P_{ГРTP} - (1 - \Delta l) P_{ГРPP} \right) + R_y l_T;$$

$$h_T = h_{T.0} + l_T \cdot \varphi_\delta.$$

В цих формулах та рівняннях  $m_{DV}$  – це складова інерційної маси трактора, яка визначається параметрами двигуна та трансмісії,  $m_{DV} = J_m^{об} \cdot i_{TP}^2 / r_K^2$ ;  $J_m^{об}$  – момент інерції маховика та валів двигуна;  $P_i$ ,  $P_l$ ,  $P_7$  – динамічні складові пружних сил, що діють на підресорені маси остова трактора, кабіни, сидіння;  $P_i^M$  – динамічна складова сумарної радіальної сили, що діє на мости трактора з боку шин;  $P_K$  – сила взаємодії кабіни та рами трактора;  $R_x$ ,  $R_y$  – позовдвжня та вертикальна складова сили, яка прикладена до дишла з боку гаку трактора;  $P_{ГРTP}$ ,  $P_{ГРPP}$  – сумарна сила, що діє на трактор чи цистерну з боку ґрунту у горизонтальному напрямку;  $\ddot{x}_T$ ,  $\dot{x}_T$ ,  $x_T$  – позовдвжнє прискорення, швидкість, переміщення трактора;  $P_{B\Sigma}$  – сила, що створюється коливанням рідини в цистерні;  $M_{кр}$  – крутний момент двигуна  $J_T$ ,  $J_K$  – момент інерції трактора та кабіни;  $H_T$  – відстань від осей мостів до центру мас трактора;  $h_{T.0}$  – відстань (по вертикалі) від осі мостів до гаку трактора;  $\psi_T$  – коефіцієнт сухого тертя у гаку (та шарнірі дишла у випадку цистерни);  $R_T$  – радіус, на якому діє сила сухого тертя;  $\Delta l$  – сумарний коефіцієнт розкладання сил між мостами цистерни і гаком трактора.

Вертикальні переміщення корпусу цистерни разом з мостами знаходимо з диференціальних рівнянь

$$(m_\Pi + m_P) \cdot \ddot{y}_\Pi = \sum P_{PP},$$

де діючі сили

$$R_x = \frac{\left[ \frac{(M_{кр} \cdot i_{TP})}{r_K} - P_{ГРTP} - (1 - \Delta l) P_{ГРPP} + P_K \right] \cdot m_{П,x} + [\Delta l \cdot P_{ГРPP} + P_{B\Sigma}] \cdot m_{T,x}}{m_{T,x} + m_{П,x}},$$

а кут нахилу дишла становитиме

$$\varphi_\delta = \frac{(y_\Pi - l_\Pi \cdot \varphi_\Pi - y_T - l_T \cdot \varphi_T - \Delta c - \Delta h_\delta)}{l_\delta},$$

де

$$\Delta c = \left( m_{\Sigma P} \cdot g \cdot \Delta l / \left( \sum_{i=3}^4 \frac{1}{1/c_i^a + 1/c_i^u} \right) \right) + \Delta h_\delta,$$

$m_{T,x} = m_T + m_1 + m_2$  – маса остову та мостів трактора;

$m_{T,x} = m_T + m_1 + m_2$  – маса рами і мостів цистерни;

$m_{\Sigma P}$  – маса рідини у цистерні;  $\varphi_\Pi$  – кут нахилу цистерни;  $\Delta c$  – усадка цистерни після заповнення її рідиною;

$$\sum P_{PP} = \sum_{i=3}^4 P_i^M - R_x \cdot (\varphi_\delta - \psi_T \cdot \text{sign}(\dot{\varphi}_\Pi - \dot{\varphi}_T)).$$

Поздовжні переміщення корпусу цистерни визначаються за формулою

$$x_\Pi = x_T + h \cdot \varphi_\Pi. \quad (14)$$

Кутіві переміщення корпусу цистерни визначаються із рівнянь обертального руху

$$J_\Pi \cdot \ddot{\varphi}_\Pi = \sum M_{PP} + R_x \left( (h_\Pi - \Delta h) - l_\Pi \cdot (\varphi_\delta - \varphi_\Pi) \right),$$

$$\sum M_{PP} = P_4^M l_4 - P_3^M l_3 - M_{B\Sigma} + \Delta l \cdot P_{ГРPP} \cdot (H_\Pi + \Delta h) +$$

$$+ R_x \cdot \psi_T R_T \text{sign}(\dot{\varphi}_T - \dot{\varphi}_\Pi);$$

$$h_\Pi = h_{\Pi.0} - \Delta h - l_\Pi \cdot \varphi_\delta;$$

$$\Delta h = (m_B / (m_\Pi + m_B)) \cdot (H - h/2);$$

$$h = \frac{S}{\left( 2 \cdot \sqrt{H \cdot (2R_\Pi - H)} \right)};$$

$$l = \sqrt{H \cdot (2R_\Pi - H)};$$

$$S = \begin{cases} R_\Pi^2 \cdot \arcsin(l/R_\Pi) - l \cdot (R_\Pi - H), & \text{при } H < R_\Pi; \\ \pi \cdot R_\Pi^2 - R_\Pi^2 \cdot \arcsin(l/R_\Pi) - l \cdot (R_\Pi - H), & \end{cases}$$

$J_\Pi$  – момент інерції цистерни;  $L$  – відстань від центру до краю цистерни;  $R_\Pi$  – радіус цистерни;  $\Delta h$  – зміщення центру мас цистерни в залежності від рівня рідини;  $h_{\Pi.0}$  – відстань (по вертикалі) від осі мостів до точок з'єднання зчпного пристрою, які розташовані на цистерні;  $H_\Pi$  – відстань від осі мостів до центру мас цистерни;  $H$  – рівень рідини в цистерні;  $S$  – площа вільної поверхні рідини, яка відповідає відомій висоті  $H$ ;  $h$  – еквівалентний рівень рідини (у цистерні прямокутної форми та того ж самого об'єму [9]).

*Модель зчпного пристрою.* При математичному моделюванні зчпки трактора та цистерни вводиться припущення, що роботу зчпки крюка та ушка причепа можна представити, як роботу шарніра. В даній роботі шарнір розглядається без зазору.

Поздовжня сила, яка діє на пристрій, описується рівнянням

$\Delta h_\delta$  – різниця висот між крюком трактора та віссю дишла для порожньої цистерни;  $l_\delta$  – довжина зчпного пристрою.

На рис. 10-12 показано результати моделювання руху трактора з цистерною при рівні рідини в цистерні 1,4 м. Зміни крутного моменту двигуна та коефіцієнтів тертя при розгоні та гальмуванні у розрахунку задано наближеними залежностями, адже головна мета – це моделювання сталого руху. Функції мікропрофілю задавалась на основі матеріалів з роботи [10], в якій автори запропонували використовувати дві гармонійні складові, що описують зміну мікропрофілю та макропрофілю дороги, а саме:

$$y_{ГРj} = A_\lambda \cdot \sin(2\pi \cdot (x_T - \Delta L_j) / L_\lambda) + A_\Lambda \cdot \left(1 - \cos(2\pi \cdot (x_T - \Delta L_j) / L_\Lambda)\right), j = 1, 2, 3, 4,$$

де  $A_\lambda$  – амплітуда мікроколивень ґрунту;  $L_\lambda$  – довжина хвилі мікроколивень;  $A_\Lambda$  – амплітуда макроколивень поверхні;  $L_\Lambda$  – довжина хвилі макроколивень;  $\Delta L_j$  –

фазові зсуви, які визначаються відстанню між мостами транспортного засобу.

Звернемо увагу на те, що для результатів моделювання, які показані в даній роботі, при обчисленні використовується одна гармонійна складова функції мікропрофілю ( $A_\lambda = 0,008$  м та  $L_\lambda = 2$  м).

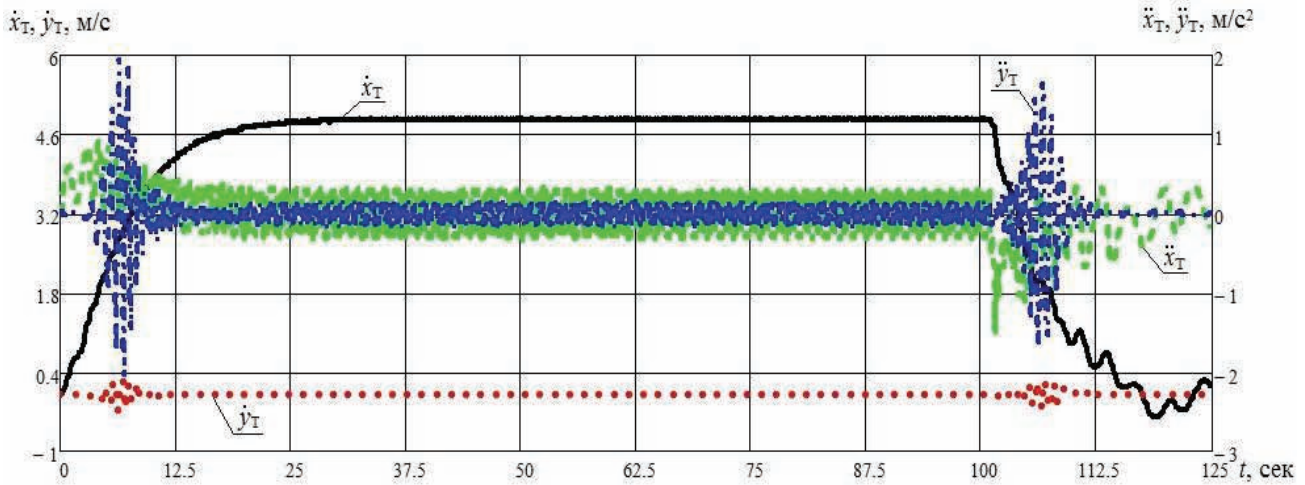


Рисунок 10 – Графіки швидкості та прискорення остова трактора

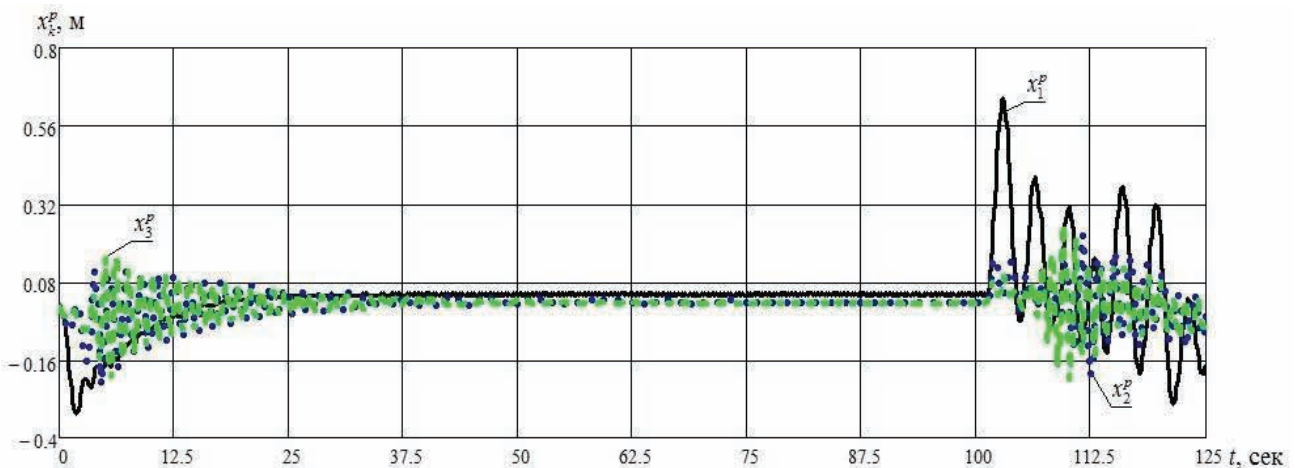


Рисунок 11 – Графіки горизонтальних зсувів поверхневих шарів рідини

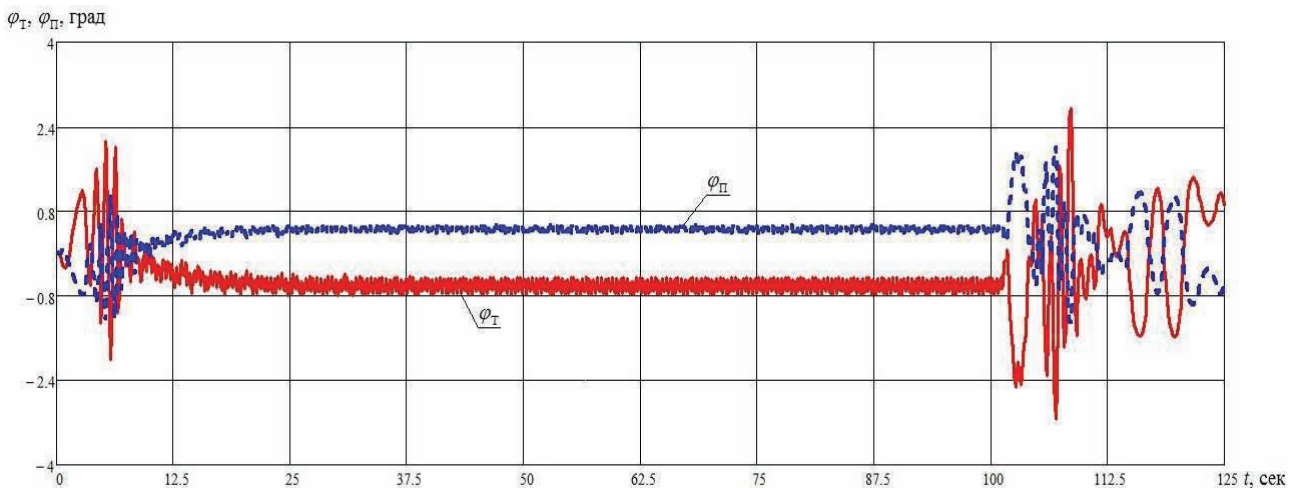


Рисунок 12 – Графіки зміни кутів нахилу рами трактора та цистерни

**Вимушені коливання в поперечній площині.**

При складанні нелінійних моделей руху в поперечній площині необхідно враховувати те, що поперечно-кутові коливання мають великий вплив при виконанні повороту. Але невідомим залишається вплив перемінної маси цистерни на поперечні коливання при прямолінійному русі. Тому сформуємо розрахункові схеми

$$J_1^{\text{II}} \ddot{\psi}_T + 2(f_1 + f_2) d_T^2 \dot{\psi}_T + 2(c_1^a + c_2^a) d_T^2 \psi_T - 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_K - 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_K - 2d_1^2 (f_1 \dot{\psi}_1 - c_1^a \psi_1) - 2d_2^2 (f_2 \dot{\psi}_2 - c_2^a \psi_2) = 0;$$

$$J_1^{\text{II}} \ddot{\psi}_1 + 2(f_1 d_T^2 + f_1^{\text{III}} d_1^2) \dot{\psi}_1 + (2c_1^a d_T^2 + 2c_1^{\text{III}} d_1^2) \psi_1 - 2f_1 d_T^2 \dot{\psi}_T - 2c_1^a d_T^2 \psi_T = c_1^{\text{III}} d_1 (y_{\text{ГР1}}^a - y_{\text{ГР1}}^n) + f_1^{\text{III}} d_1 (\dot{y}_{\text{ГР1}}^a - \dot{y}_{\text{ГР1}}^n);$$

$$J_2^{\text{II}} \ddot{\psi}_2 + 2(f_2 d_T^2 + f_2^{\text{III}} d_2^2) \dot{\psi}_2 + 2(c_2^a d_T^2 + c_2^{\text{III}} d_2^2) \psi_2 - 2f_2 d_T^2 \dot{\psi}_T - 2c_2^a d_T^2 \psi_T = c_2^{\text{III}} d_2 (y_{\text{ГР2}}^a - y_{\text{ГР2}}^n) + f_2^{\text{III}} d_2 (\dot{y}_{\text{ГР2}}^a - \dot{y}_{\text{ГР2}}^n);$$

$$J_K^{\text{II}} \ddot{\psi}_K + 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_K + 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_K - 2(f_1 d_{\kappa 1}^2 + f_2 d_{\kappa 2}^2) \dot{\psi}_T - 2(c_1^{\kappa} d_{\kappa 1}^2 + c_2^{\kappa} d_{\kappa 2}^2) \psi_T = 0,$$

звідки

$$2c_1^a = c_{1a}^a + c_{1n}^a; \tag{8}$$

$$\psi_1 = (y_{1n}^{\text{III}} - y_{1n}^{\text{III}}) / 2d_1 \rightarrow y_{1n}^{\text{III}} = \psi_1 / d_1, \tag{9}$$

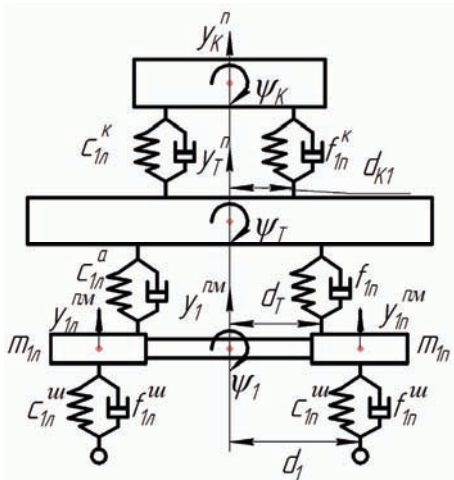
де  $y_{1n}^{\text{III}}$  – вертикальне переміщення переднього моста внаслідок дії поперечного кута нахилу  $\psi_1$ .

Вираз (8) та (9) має таку ж математичну природу, як і при визначенні інших жорсткостей та вертикаль-

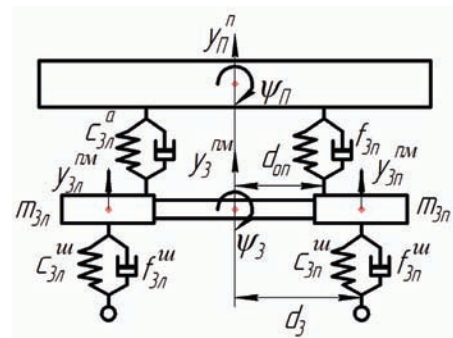
$$J_{\text{II}}^{\text{II}} \ddot{\psi}_{\text{II}} + 2(f_3 + f_4) d_{\text{on}}^2 \dot{\psi}_{\text{II}} + 2(c_3^a + c_4^a) d_{\text{on}}^2 \psi_{\text{II}} - 2f_3 d_3^2 \dot{\psi}_3 - 2c_3^a d_3^2 \psi_3 - 2f_4 d_4^2 \dot{\psi}_4 - 2c_4^a d_4^2 \psi_4 = 0;$$

$$J_3^{\text{II}} \ddot{\psi}_3 + (2f_3 d_{\text{on}}^2 + 2f_3^{\text{III}} d_3^2) \dot{\psi}_3 + (2c_3^a d_{\text{on}}^2 + 2c_3^{\text{III}} d_3^2) \psi_3 - 2f_3 d_3^2 \dot{\psi}_{\text{II}} - 2c_3^a d_3^2 \psi_{\text{II}} = c_3^{\text{III}} d_3 (y_{\text{ГР3}}^a - y_{\text{ГР3}}^n) + f_3^{\text{III}} d_3 (\dot{y}_{\text{ГР3}}^a - \dot{y}_{\text{ГР3}}^n);$$

$$J_4^{\text{II}} \ddot{\psi}_4 + (2f_4 d_{\text{on}}^2 + 2f_4^{\text{III}} d_4^2) \dot{\psi}_4 + (2c_4^a d_{\text{on}}^2 + 2c_4^{\text{III}} d_4^2) \psi_4 - 2f_4 d_4^2 \dot{\psi}_{\text{II}} - 2c_4^a d_4^2 \psi_{\text{II}} = c_4^{\text{III}} d_4 (y_{\text{ГР4}}^a - y_{\text{ГР4}}^n) + f_4^{\text{III}} d_4 (\dot{y}_{\text{ГР4}}^a - \dot{y}_{\text{ГР4}}^n).$$



а



б

Рисунок 13 – Розрахункові схеми коливань в поперечній площині: а – передній міст колісного трактора; б – передній міст цистерни

Як і у випадку з моделюванням поздовжнього руху, для поперечних коливань бралися однакові умови для дії зовнішніх збурювальних сил. При моделюванні поперечно-кутового руху помічено наявність параметричних коливань (рис. 14).

При прямолінійному русі поперечно-кутові коливання не такі небезпечні, як поздовжньо-кутові та вертикальні, але при комбінації цих коливань та певних зовнішніх факторів можливо спостереження явища параметричного резонансу [14, 15]. Відомо, що параметричний резонанс характеризується зростанням з

відповідних систем (рис. 13). Математична модель коливань рухомих вузлів трактора в поперечній площині описується наступними рівняннями.

Поперечно-кутові переміщення рами, переднього та заднього мостів і кабіни відповідають диференціальним рівнянням руху, складеним для відповідної маси:

них переміщень інших рухомих елементів колісного трактора в поперечній площині руху.

Математична модель поперечних коливань рухомих вузлів цистерни описується наступними рівняннями.

Поперечно-кутові переміщення платформи цистерни разом з мостами знаходимо з диференціальних рівнянь

прогресивною амплітудою коливань навколо нестійкого положення рівноваги (ділянки динамічної нестійкості).

Як видно з рис. 14, зона динамічної нестійкості виникає при рівні рідини  $H = 1,25$  м. Рівень  $H = 1,22$  м характеризується, як до резонансний, а рівень  $H = 1,28$  м – після резонансний.

Виникнення параметричного резонансу обумовлено зростанням амплітуди коливань другого шару рідини. З рис. 15 помітно, що частота коливання другого шару рідини в 2 рази вища, ніж частота коливан-

ня вертикальних прискорень рами трактора, і це є ознакою саме параметричного резонансу.

Великий вплив на формування явища параметричного резонансу здійснюють властивості рідини, що транспортується, зокрема логарифмічний декремент затухання (ЛДЗ)  $\delta$ . На рис. 14 показані результати при транспортуванні рідини при  $\delta = 0,1$  (вода), а на рис. 16 – при  $\delta = 0,07$  (20-ти % розчин цукру). Порівнюючи результати з рис. 14 та 16 звернемо увагу на те, що зниження величини ЛДЗ призводить до збільшення зони параметричного резонансу, а також збільшення частоти параметричних коливань. В той же час збільшення величини ЛДЗ, наприклад до  $\delta = 0,33$  (рослина олія), повністю виключає появу параметричного резонансу.

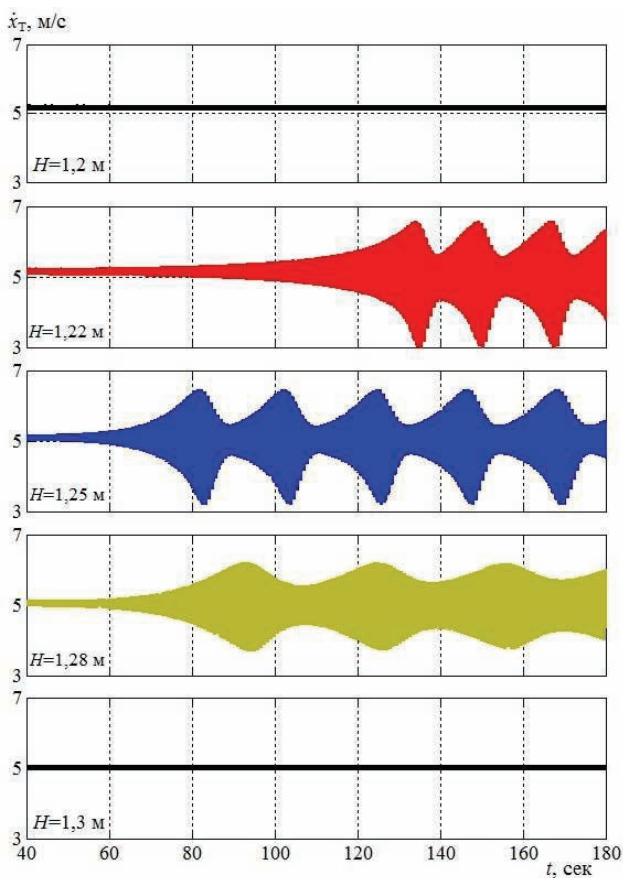


Рисунок 14 – Залежність курсової швидкості руху транспортного засобу від рівня рідини  $H$  (при  $\delta = 0,1$ )

При виникненні параметричного резонансу, що спостерігається, велику роль відіграють зовнішні кінематичні чинники та збурювальні сили. Зокрема таким чинником виступає довжина хвилі мікроколивань рельєфу на дорожньому полотні. Зміна середньої швидкості трактора, що відбувається під впливом тертя, підвищеного за рахунок резонансу, дозволяє системі на деякий проміжок часу відстроюватися від умов виникнення резонансу, але згодом цей режим повертається знов і знов. Тому було доцільно провести аналіз зміни зони параметричного резонансу при варіюванні довжини хвилі мікроколивань  $L_\lambda$ . Відмітимо, що на рис. 14 дослідження проводились при  $L_\lambda = 2$  м.

Збільшуючи довжину хвилі на 5% (тобто до зна-

чення  $L_\lambda = 2,1$  м), відмічаємо, що зона динамічної нестійкості зміщується в бік зменшення висоти рівня наповнення (рис. 17); приблизно на 8% в порівнянні з результатами при  $L_\lambda = 2$  м.

При зменшенні довжини хвилі на 5% ( $L_\lambda = 1,9$  м) зона динамічної нестійкості зміщується в бік збільшення висоти рівня наповнення (рис. 18); приблизно на 7% в порівнянні з результатами при  $L_\lambda = 2$  м.

Відмітимо, що при зменшенні довжини хвилі мікронерівності звужується і зона динамічної нестійкості агрегату.

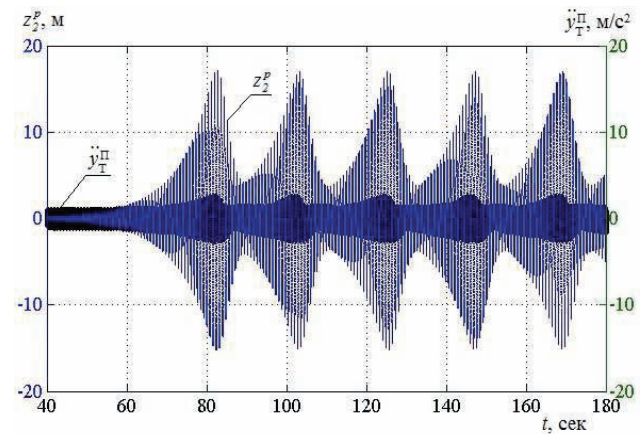


Рисунок 15 – Залежності поперечних переміщень слою рідини  $z_2^p$  та вертикального прискорення рами трактора  $y_T^{\text{II}}$  в режимі сталого руху при  $H = 1,25$  м

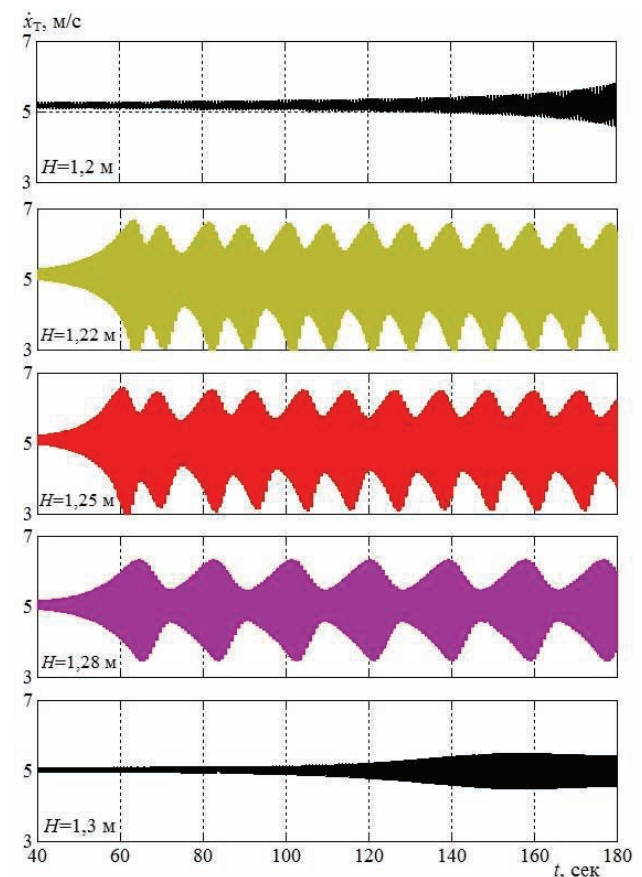


Рисунок 16 – Залежність курсової швидкості руху транспортного засобу від рівня рідини  $H$  (при  $\delta = 0,07$ )



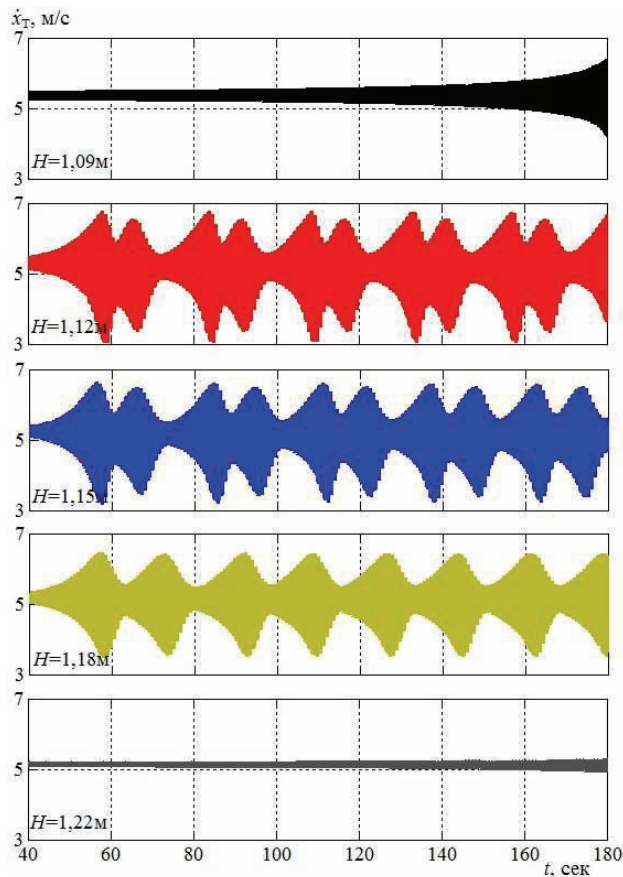


Рисунок 17 – Залежність курсової швидкості руху засобу (при  $L_\lambda = 2,1$  м) від рівня рідини  $H$

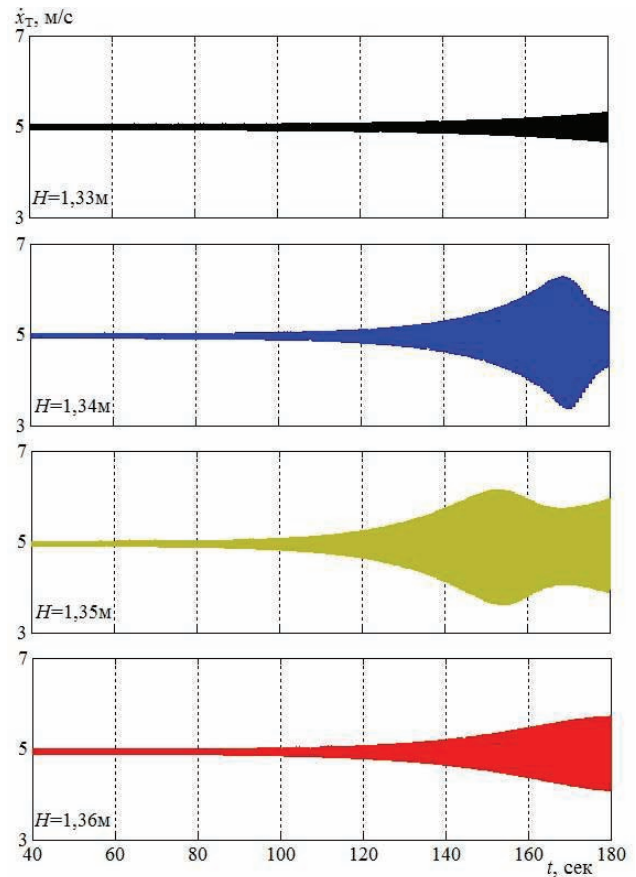


Рисунок 18 – Залежність курсової швидкості руху засобу (при  $L_\lambda = 1,9$  м) від рівня рідини  $H$

**Висновки.** Представлено основні принципи математичного моделювання динаміки транспортування рідкого вантажу, зокрема на прикладі руху колісного трактора при транспортуванні причіпної цистерни, яка має вільну поверхню рідини. Окреслений метод динамічного аналізу ґрунтується на дослідженні коливального руху складної системи, проводиться аналіз на вільні та вимушені коливання.

Проведення такого аналізу дозволяє спростити математичні моделі, а також отримати базову інформацію, яка дозволить переходити до розрахункового визначення експлуатаційних та ергономічних показників досліджуваної системи.

Наведена методика дозволяє дослідити виникнення параметричних коливань. Помічено, що при дослідженні поперечних коливань трактора з цистерною виникає параметричний резонанс. Дослідження показали, що на такі коливання суттєво впливають властивості рідини та параметри кінематичного з'єднання системи.

#### Список літератури

1. Ларин А.А. Развитие методов расчета крутильных колебаний в Харьковском политехническом институте с 1930 по 1970 годы. Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Динамика и прочность машин. 2007. № 22. С. 90-97.
2. Терских В.И. Метод цепных дробей в применении к исследованию механических систем. Т.1: Простые линейные и нелинейные системы. Ленинград: Судпромгиз, 1955. 375 с.
3. Ефремов Л.В. Теория и практика исследований кру-

тильных колебаний силовых установок с применением компьютерных технологий. Санкт-Петербург: Наука, 2007. 276 с.

4. Канду В.В. Анализ нелинейных колебаний тонких пластинок, находящихся в условиях внутреннего и внешнего резонансов: дис. ... канд. техн. наук : 05.23.17 / Канду Владимир Валерьевич; Воронеж. гос. техн. ун-т., 2019. 164 с.

5. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Матричный численно-аналитический метод интегрирования уравнений движения многомассовой цепной системы. Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. 2011. № 42. С. 68-81.

6. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов. Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. 2012. № 2. С. 74-87.

7. Кожушко А.П. Анализ конструктивных особенностей причіпних та напівпричіпних цистерн у складі машинно-тракторного агрегату. Вісник НТУ «ХПИ». Серия: Нові рішення в сучасних технологіях. 2019. № 5. С. 34-40.

8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва: Наука, 1978. 736 с.

9. Кожушко А.П., Григор'єв О.Л. Математичне моделювання низькочастотних коливань в'язкої рідини в горизонтальній ємності з вільною поверхнею. Вісник НТУ «ХПИ». Серия: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2018. № 3. С. 41-51.

10. Кожушко А.П., Григор'єв О.Л. Моделювання пов'язаних коливань колісного трактора та цистерни з рідиною на прямому шляху зі складним рельєфом. Вісник НТУ

«ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2018. № 27. С. 34-61.

11. Микішев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Москва: Машиностроение, 1968. 532 с.

12. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. Москва: Вычислительный центр АН СССР, 1966. 269 с.

13. Кожушко А.П., Набока О.О., Григор'єв О.Л. Спектральні ефекти та теореми про властивості пучка симетричних матриць в задачах динаміки складних механічних систем. Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. 2019. № 8. С. 214-223.

14. Fossen, T.I., Nijmeijer, H. Parametric Resonance in Dynamical Systems. Springer. 2012. 330 p.

15. Avramov K.V. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics. Journal of Sound and Vibration. 2009. № 322. P. 476-489.

#### References (transliterated)

1. Larin A.A. Razvitiye metodov rascheta krutilnykh kolebaniy v Harkovskom politehnicheskome institute s 1930 po 1970 gody. Vestnik NTU «KhPI». Seriya: Dinamika i prochnost mashin. 2007. № 22. P. 90-97.

2. Terskih V.P. Metod tsepykh drobey v primeneniі k issledovaniyu mekhanicheskikh sistem. T.1: Prostyie lineynye i nelineynye sistemy. Leningrad: Sudpromgiz, 1955. 375 p.

3. Efremov L.V. Teoriya i praktika issledovaniy krutilnykh kolebaniy silovyykh ustanovok s primeneniem kompyuternyykh tehnologiy. Sankt-Peterburg: Nauka, 2007. 276 p.

4. Kandu V.V. Analiz nelineynykh kolebaniy tonkikh plastinok, nahodyaschihsya v usloviyah vnutrennego i vneshnego rezonansov: dis. ... kand. tehn. nauk : 05.23.17 / Kandu Vladimir Valerevich; Voronezh. gos. tehn. un-t., 2019. 164 p.

5. Gryhoriev A.L., Gevorkyan Yu.L. Matrichnyy chislenno-analiticheskiy metod integrirovaniya uravneniy dvizheniya mnogomassovoy tsepy systemy. Vestnik NTU «KhPI». Seriya: Matematicheskoe modelirovanie v tehnike i tehnologiyah. 2011. № 42. P. 68-81.

6. Gryhoriev A.L., Gevorkyan Yu.L. Lineynye i lineirizovannye matrichnyie modeli dlya analiza dinamiki i ustoychivosti klapannykh gidromekhanicheskikh uzlov. Vestnik NTU «KhPI». Seriya: Matematicheskoe modelirovanie v tehnike i tehnologiyah. 2012. № 2. P. 74-87.

7. Kozhushko A.P. Analiz konstruktivnykh osoblyvostey prychipnykh ta napivprychipnykh tsystem u skladi mashynno-traktornogo ahrehatu. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Novi rishennia v suchasnykh tekhnolohiiakh. 2019. № 5. P. 34-40.

8. Loytsyanskiy L.G. Mehanika zhidkosti i gaza. Moscow: Nauka, 1978. 736 p.

9. Kozhushko A.P., Gryhoriev A.L. Matematychnye modeliuvaniya nyzkochastotnykh kolyvan viazkoi ridyny v horyzontalnoi yemnosti z vilnoi poverkhniei. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modeliuvaniya v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh. 2018. № 3. P. 41-51.

10. Kozhushko A.P., Gryhoriev A.L. Modeliuvaniya poviazanykh kolyvan kolisnogo traktora ta tsystemy z ridynoi na priamomu shliakhu zi skladnym reliefom. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modeliuvaniya v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh. 2018. № 27. P. 34-61.

11. Mikishev G.N., Rabinovich B.I. Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkostyu. Moscow: Mashinostroenie, 1968. 532 p.

12. Moiseev N.N., Petrov A.A. Chislennyye metody rascheta sobstvennykh chastot kolebaniy ogranichenogo ob'ema zhidkosti. Moskva: Vyichislitelnyy tsentr AN SSSR, 1966. 269 p.

13. Kozhushko A.P., Naboka O.O., Gryhoriev A.L. Spektralni efekty ta teoremy pro vlastyvoli puchka symetrychnykh matryts v zadachakh dynamiky skladnykh mekhanichnykh system. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematychnye modeliuvaniya v tekhnitsi ta tekhnolohiiakh. 2019. № 8. P. 214-223

14. Fossen, T.I., Nijmeijer, H. Parametric Resonance in Dynamical Systems. Springer. 2012. 330 p.

15. Avramov K.V. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics. Journal of Sound and Vibration. 2009. № 322. P. 476-489.

Надійшла (received) 02.10.2020

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Кожушко Андрій Павлович (Кожушко Андрей Павлович, Kozhushko Andriy Pavlovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Тел.: (057) 707-64-64. E-mail: Andreykozhushko7@gmail.com.

**Григор'єв Олександр Львович (Григорьев Александр Львович, Grigoriev Alexander L'vovich)** – доктор технічних наук, професор, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Тел.: (057) 707-60-35. E-mail: kpi.mmtt@gmail.com.