

Д.В. БРЕСЛАВСЬКИЙ, М.В. БУКРЕЄВ, О.А. ТАТАРИНОВА

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ АНАЛІЗУ РУХУ ПРИЛАДІВ, ВСТАНОВЛЕНИХ НА ПОЛІМЕРНИХ АМОРТИЗАТОРАХ

Надано опис методу та програми розв'язання задачі аналізу руху приладу, встановленого на полімерному амортизаторі. Для опису переміщень приладу застосовано рівняння динаміки з використанням малого параметру. Значення переміщення та куту нахилу приладу отримується при моделюванні руху шляхом розв'язання інтегро-диференціальних рівнянь з використанням методу сіток. Враховано вплив температури на властивості амортизаторів, для чого розв'язується тривимірна задача нестационарної теплопровідності для амортизатору у формі паралелепіпеду. Як метод розв'язання цієї задачі використовується метод поділу змінних. Встановлено розподіли температури за об'ємом амортизатору. Проаналізовано критичний режим руху приладу та отримано залежність переміщення центру мас приладу від часу та температури. Надано опис програмного забезпечення, в якому реалізовано запропоновані методи розрахунку задач нестационарної теплопровідності та динаміки приладу.

Ключові слова: в'язкопружність, полімер, температура, рівняння руху, амортизатор, програма.

Д.В. БРЕСЛАВСКИЙ, Н.В. БУКРЕЕВ, О.А. ТАТАРИНОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ДВИЖЕНИЯ ПРИБОРОВ, УСТАНОВЛЕННЫХ НА ПОЛИМЕРНЫХ АМОРТИЗАТОРАХ

Статья содержит описание метода и алгоритмов расчета двумерных задач ползучести, сопровождающейся накоплением скрытой поврежденности, и разрушения, процесс которого обусловлен зарождением и распространением макроскопического дефекта. Основой метода решения задачи является комбинация метода конечных элементов и метода прогноза-коррекции третьего порядка для интегрирования по времени. В расчетах применяются конечноэлементный комплекс FEM Creep и компьютерная программа FEM Creepdamagefracture, реализующая процесс изменения сеток и граничных условий задачи согласованно с течением процесса разрушения. Рассмотрена модель твэла ядерного реактора атомных электростанций, включающая топливо и оболочку, выполнено моделирование накопления поврежденности и дальнейшего разрушения. Численными расчетами установлено время окончания скрытого и полного разрушения, для различных моментов определена форма дефекта.

Ключевые слова: вязкоупругость, полимер, температура, уравнение движения, амортизатор, программа.

D. V. BRESLAVSKY, M. V. BUKREEV, O. A. TATARINOVA

SOFTWARE FOR MOTION ANALYSIS OF DEVICES INSTALLED ON POLYMER SHOCK ABSORBERS

A description of the method and program for solving the problem of analyzing the motion of the device installed on the polymer shock absorber is given. The equation of dynamics using a small parameter is used to describe the motion of the device. The values of displacement and rotation angle of the device is obtained by modeling the motion by solving integro-differential equations. The procedures of the Green's functions building as well as grid methods are used. The influence of temperature on the properties of shock absorbers is taken into account by way of solving the three-dimensional problem of non-stationary thermal conductivity for a shock absorber in the form of a parallelepiped. The Fourier method of dividing variables is used as a method of solving this problem. Temperature distributions by shock absorber volume are set and analyzed. Than temperature values in nonlinear expression are used in the kernel structure in Boltzmann - Volterra equations. The critical mode of motion of the device, when external excitation has a fast growth mode, and temperature range exceeds one hundred Celsius degrees, is analyzed and the dependence of the motion of the center of mass of the device on time and temperature is obtained. The description of the software in which the presented methods of calculation for problems of nonstationary thermal conductivity and device dynamics are realized, is given. The program works in console mode, a window interface is developed for displaying graphs of functions. The examples of the program's operation both the nonstationary heat conduction problem and for shock absorber's dynamics are presented.

Key words: viscoelasticity, polymer, temperature, motion equation, shock absorber, program.

Вступ. Інтенсивний розвиток авіаційної та ракетно-космічної техніки викликав необхідність широкого використання приладів різного призначення. Внаслідок дії на літальний апарат нестационарних навантажень дані, що отримуються з приладів систем навігації та управління, можуть бути істотно викривлені. Для запобігання похибок, обумовлених вібраційними та ударними діями, прилади та їхні системи, об'єднані

корпусами, розміщуються на спеціалізованих амортизаторах [1]. Розрахунки вібростійкості приладів постійно залишаються у центрі уваги дослідників та інженерів [2-5]

Часто амортизатори виконуються повністю або частково з полімерних матеріалів, фізико-механічні властивості яких, як відомо [2, 6], істотно залежать від температури. Врахування такої залежності для функ-

ціонування ракетної та авіаційної техніки є дуже важливим, адже за короткий проміжок часу температура на борті може змінюватись у межах сотні градусів та навіть більше [1].

Не зважаючи на стрімкий розвиток в останні часи чисельних підходів, застосування аналітичних та наближених методів продовжує залишатись надійним способом для створення ефективних швидкодіючих засобів для оцінювання динамічних процесів. У зв'язку з цим у даній статті виконана спроба розробки такого засобу для оцінювання впливу температурних градієнтів на рух приладу, розташованого на полімерному амортизаторі. Застосовано математичну модель, запропоновану у роботі [2], в якій значення інтегралів у коефіцієнтах рівнянь руху обчислюються за допомогою іншого, сіткового [7]. Ядра, що входять до рівнянь, вважаються залежними від температури, а її значення отримуються шляхом використання наближеного аналітичного методу для розв'язання тривимірної задачі нестационарної теплопровідності [8] для паралелепіпеду, яким модулюється амортизатор.

Метод та алгоритм розрахунку. Розглянемо полімерний амортизатор, що виконано у формі паралелепіпеду, на якому розташовано корпус приладу. Постановку задачі та схему запозичено з роботи [2]. Згідно неї, переміщення центру мас u_1 та кут повороту φ_1 задаються у наступному вигляді

$$\begin{aligned} u_1 &= A_u \sin \omega t + B_u \cos \omega t, \\ \varphi_1 &= A_\varphi \sin \omega t + B_\varphi \cos \omega t, \end{aligned} \quad (1)$$

що моделює вплив елемента літального апарату, на якому закріплено прилад. Тут $A_u, B_u, A_\varphi, B_\varphi$ – коефіцієнти, ω – радіальна частота вимушених коливань, t – час. Індексом 1 позначено величини, що відносяться до амортизатору, 2 – до приладу.

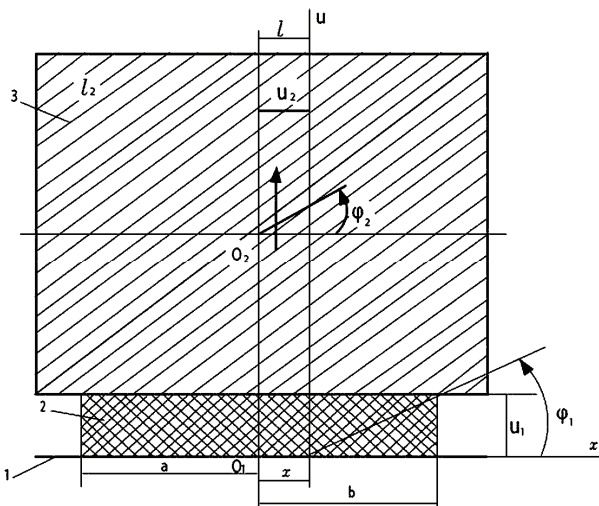


Рисунок 1 – Розрахункова схема амортизатору з розміщенням на ньому приладом [2]

Зв'язок між зусиллями $p_x(t)$ та переміщеннями $u_x(t)$ приймається у вигляді спадкової теорії Больцмана-Вольтерра[6]:

$$p_x(t) = \int_0^t R_p(t-s) du_x(s) \quad (2)$$

або

$$p_x(t) = R_p(0)u_x(0) - \int_0^t R_p(t-s)u_x(s)ds, \quad (3)$$

де $R_p(t-s) = \frac{A(T)e^{-\beta(t-s)}}{(t-s)^{1-\alpha}}$ – ядро рівняння, або функція релаксації системи. Вважаємо, що коефіцієнт A у виразі для функції ядра є залежним від температури T , $A = A(T)$.

У роботі [2] отримано систему інтегродиференціальних рівнянь, що описує процес коливань приладу та амортизатору:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{u}_2 + c_1 u_2 + c_2 \varphi_2 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t R(t-\tau) [\alpha_{11}^0 \sin \omega \tau + \alpha_{12}^0 \cos \omega \tau] d\tau - \int_0^t R(t-\tau) [c_1 u_2 + c_2 \varphi_2] d\tau \right\} + \varepsilon_1 [\alpha_{11}^0 \sin \omega t + \alpha_{12}^0 \cos \omega t], \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_4 u_2 + c_3 \varphi_2 &= \varepsilon \left\{ \int_0^t R(t-\tau) [\alpha_{21}^0 \sin \omega \tau + \alpha_{22}^0 \cos \omega \tau] d\tau - \int_0^t R(t-\tau) [c_4 u_2 + c_3 \varphi_2] d\tau \right\} + \varepsilon_1 [\alpha_{21}^0 \sin \omega t + \alpha_{22}^0 \cos \omega t], \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^0 &= c_1 A_u + c_2' A_\varphi, & \alpha_{12}^0 &= c_1 B_u + c_2' B_\varphi, \\ \alpha_{21}^0 &= c_4 A_u + c_3' A_\varphi, & \alpha_{22}^0 &= c_4 B_u + c_3' B_\varphi; \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0}, \quad c_1 = R_0(a+b), \quad c_2' = \frac{b^2 - a^2}{2} R_0,$$

$$c_2 = \left[\frac{b^2 - a^2}{2} - l(b+a) \right] R_0,$$

$$c_2 = \left[\frac{b^3 + a^3}{3} - \frac{b^2 - a^2}{2} l \right] R_0, \quad c_4 = c_2', \quad c_3' = \frac{b^3 + a^3}{3} R_0.$$

Для розв'язання рівнянь у системі (4) використаємо метод, що базується на їхній апроксимації сітковою функцією [7].

Послідовність розв'язання в загальному вигляді складається з двох етапів. На першому етапі будується функція Гріна [8], а на другому чисельним методом знаходиться розв'язок інтегрального рівняння.

Спочатку розглянемо диференціальне рівняння наступного загального вигляду

$$m \ddot{u} + \eta \dot{u} + Eu = kt \quad (5)$$

з крайовими умовами $u(0) = 0$ та $u(\tilde{t}) = 0$.

Для того, щоб знайти функцію Гріна, перепишемо його в наступному вигляді:

$$\frac{d \left(e^{\frac{\eta}{m} t} \frac{du}{dt} \right)}{dt} = \frac{\eta}{m} e^{\frac{\eta}{m} t} kt - \frac{E}{m} e^{\frac{\eta}{m} t} u. \quad (6)$$

Порівняємо рівняння (6) з наступним

$$p(x) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{dp}{dx} \frac{d}{dx} - q(x) = \varphi(x). \quad (7)$$

Звідси знаходимо, що $p(t) = e^{\frac{\eta}{m}t}$ та $q(t) = \frac{E}{m}e^{\frac{\eta}{m}t}$.

Тепер інтегральне рівняння запишемо у вигляді:

$$u(t) = \int_0^{\tilde{t}} \left(G(t, \xi) \frac{e^{\frac{\eta}{m}kt}}{m} - \frac{E}{m} e^{\frac{\eta}{m}t} u(\xi) \right) d\xi, \quad (8)$$

та переходимо до пошуку розв'язків рівняння типу (5). Розв'язуємо його як лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язками будуть функції

$$\begin{aligned} y_1 &= -e^{\alpha x} C_2 \sin(\beta x), \\ y_2 &= C_4 e^{\alpha x} (\tan(\beta \tilde{t}) \cos(\beta x) - \sin(\beta x)). \end{aligned} \quad (9)$$

Звідси отримують вигляд для функції Гріна:

$$\begin{aligned} G_1(t, \xi) &= -AC_2 C_4 e^{\alpha \xi} \sin(\beta x) e^{\alpha \xi} (\tan(\beta \tilde{t}) \cos(\beta \xi) - \sin(\beta \xi)), \\ G_2(t, \xi) &= -AC_2 C_4 e^{\alpha x} \sin(\beta \xi) e^{\alpha \xi} (\tan(\beta \tilde{t}) \cos(\beta x) - \sin(\beta x)). \end{aligned}$$

Для знаходження останньої сталої $AC_2 C_4$, скористаємося умовою на стрибку при $t = \xi$:

$$\left. \frac{dG_2(t, \xi)}{dt} \right|_{t=\xi} - \left. \frac{dG_1(t, \xi)}{dt} \right|_{t=\xi} = -\frac{1}{p(\xi)}.$$

Нехай

$$\gamma(\xi) = e^{2\alpha \xi} (\tan(\beta \tilde{t}) \cos(\beta \xi) - \sin(\beta \xi)) (\alpha \sin(\beta \xi) + \beta \cos(\beta \xi))$$

та

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= e^{2\alpha \xi} \sin(\beta \xi) (\alpha (\tan(\beta \tilde{t}) \cos(\beta \xi) - \sin(\beta \xi)) - \\ &\quad - \beta (\tan(\beta \tilde{t}) \sin(\beta \xi) - \beta \cos(\beta \xi))). \end{aligned}$$

Після підстановки отриманих виразів для функції Гріна отримуємо:

$$AC_2 C_4 = \frac{-e^{-\frac{\eta}{m}\xi}}{\gamma(\xi) - \psi(\xi)}.$$

Остаточно функція Гріна має вигляд

$$G(t, \xi) = \begin{cases} \frac{-e^{-\frac{\eta}{m}\xi}}{\gamma(\xi) - \psi(\xi)} e^{\alpha x} \sin(\beta x) e^{\alpha \xi} \cdot \\ \cdot (\tan(0,01\beta) \cos(\beta \xi) - \sin(\beta \xi)), \\ \frac{-e^{-\frac{\eta}{m}\xi}}{\gamma(\xi) - \psi(\xi)} e^{\alpha \xi} \sin(\beta \xi) e^{\alpha x} \cdot \\ \cdot (\tan(0,01\beta) \cos(\beta x) - \sin(\beta x)). \end{cases} \quad (10)$$

На другому етапі, з відомою функцією Гріна, переходимо до отримання чисельного розв'язку рівняння (6) за допомогою апроксимації $u(t)$ сітковою функцією $u_j = u(t_j)$, значення якої отримуються внаслідок розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь [7]:

$$u_i = -\sum_{j=1}^J G(t_i, t_j) \frac{e^{\frac{\eta}{m}t_j} k t_j}{m} - \frac{E}{m} e^{\frac{\eta}{m}t_i} u_j \Delta_j \quad (i = 1, 2, \dots, J). \quad (11)$$

u_j має задовольняти наступній системі лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} (1 + \alpha_{11})u_1 + \alpha_{12}u_2 + \dots + \alpha_{1J}u_J &= \beta_1, \\ \alpha_{21}u_1 + (1 + \alpha_{22})u_2 + \dots + \alpha_{2J}u_J &= \beta_2, \\ \vdots & \\ \alpha_{J1}u_1 + \alpha_{J2}u_2 + \dots + (1 + \alpha_{JJ})u_J &= \beta_J, \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\alpha_{ij} = -\frac{E}{m} e^{\frac{\eta}{m}t_j} G(t_i, t_j) \Delta_j, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^J G(t_i, t_j) \frac{e^{\frac{\eta}{m}t_j} k t_j}{m} \Delta_j.$$

У разі інтегрування за правилом трапеції [9] та постійного кроку сітки Δt , маємо:

$$\Delta_1 = \Delta_J = \frac{\Delta t}{2}, \quad \Delta_j = \Delta t \quad \text{при } j = 2, 3, \dots, J-1.$$

Далі необхідно розв'язати задачу нестационарної теплопровідності [8], щоб знайти розподіл температури у часів області Ω , яку займає амортизатор. Для цього розв'язують наступне рівняння:

$$T_t - a^2 T_{xx} - a^2 T_{yy} - a^2 T_{zz} = 0 \quad (13)$$

з крайовими умовами на границі області $\Gamma T|_{\Gamma} = \tilde{T}(x_i, t)$ та початковими умовами $T|_{\Omega}(0) = \tilde{T}_t(x_i)$.

Розв'язок шукаємо методом поділу змінних [8]. Для тривимірної області отримуємо:

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{l^3} \cdot \\ &\cdot \int_0^l \int_0^l \int_0^l \varphi(x, y) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dx dy dz \cdot \\ &\cdot e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 (n^2 + m^2 + k^2) t} \cdot \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m y}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

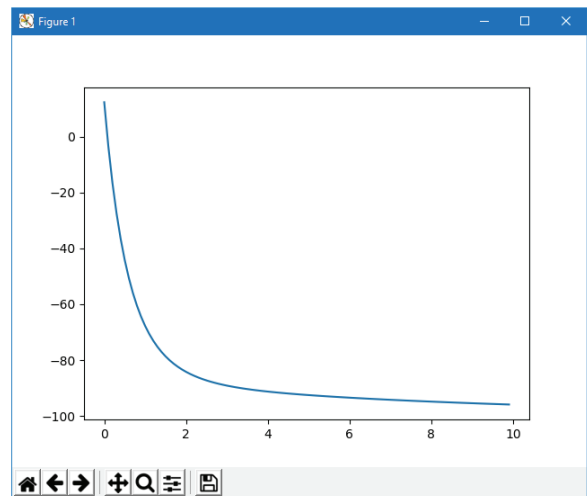


Рисунок 2 – Скріншот програми з графіком змінювання температури на грані амортизатору

Програма для моделювання руху амортизатору. Даний метод розв'язання реалізовано у вигляді програми на мові C++ [10]. Вона працює у консольному режимі, для виведення графіків функцій створено віконний інтерфейс [10]. Як приклад, наведемо графік змінювання температури у точці амортизатору при переході до області низьких температур за період 10 с. (рис. 2).

Розглянемо результати комп'ютерного моделювання руху центру мас амортизатора з використанням описаного методу та розробленої програми. Аналізу-

ється критичний випадок нестационарного зростання навантаження, при якому у виразі (1) один доданок замінено віковим. Температура в амортизатору змінюється від +10 С до -95 С. Вважаємо, що ядро у виразі (3) має вигляд:

$$R = \frac{R_0}{293} T^2. \quad (15)$$

На рис. 3 наведено отриманий чисельним моделюванням графік зростання переміщень.

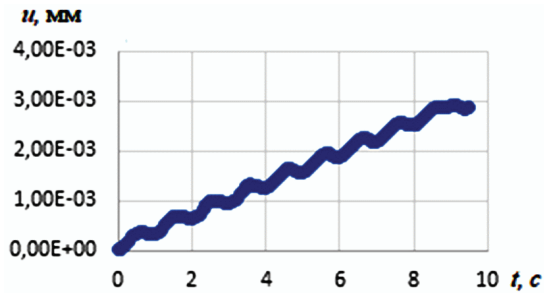


Рисунок 3 – Залежність переміщення центру мас амортизатору від часу

Висновки. В статті розглянуто модифікований метод розрахунку параметрів руху полімерних амортизаторів, які використовуються для віброізоляції приладів на літальних апаратах. Для визначення розподілів температури, функція якої входить до виразу властивостей ядер у визначальній системі рівнянь, розв'язано тривимірну задачу нестационарної теплопровідності. Метод реалізовано у вигляді програми, надано приклади виконаного комп'ютерного моделювання.

Список літератури

1. Megson T.H.G. Introduction to Aircraft Structural Analysis. Elsevier, 2014. 710 p.
2. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композитных материалов. Москва: Наука, 1985. 304 с.
3. Geethamma V.G., Asaletha R., Kalarikkal N., Thomas S. Vibration and sound damping in polymers / V.G.Geethamma. Resonance. 2014. № 19. P. 821-833.
4. Mickoski H., Mickoski I., Simonovski P. Mathematical Modelling of Work of Modern Friction-Polymer Shock Absorbers and Determining the Dynamical Force during the Impact.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Бреславський Дмитро Васильович (Бреславский Дмитрий Васильевич, Breslavsky Dmytro Vasylovych) – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання процесів та систем. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». тел.: (057)-707-64-54; e-mail: brdm@kpi.kharkov.ua.

Букреев Микита Володимирович (Букреев Никита Владимирович, Bukreev Mykyta Volodymyrovych) – студент. Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: buer2012@gmail.com

Татарінова Оксана Андріївна (Татарінова Оксана Андреевна, Tatarinova Oksana Andriivna) – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; тел.: (057)-707-64-54; e-mail: ok.tatarinova@gmail.com

Journal of Civil Engineering and Architecture. 2015. № 9. P. 368-372.

5. Victor B.M. Polymers hock absorber for use with well, head lubricat or assembly. Patent No.: US 7,669,648 B2. 2010. 6 p.

6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва: Наука, 1977. 384 с.

7. На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. Москва: Мир, 1982. 296 с.

8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.

9. Хемминг Р.В. Численные методы. Москва: Наука, 1968. 400 с.

10. Шлее М. Профессиональное программирование на C++. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2012. 912 с.

References (transliterated)

1. Megson T.H.G. Introduction to Aircraft Structural Analysis. Elsevier Publ., 2014, 710 p.

2. Kravchuk A.S., Maiboroda V.P., Urzhumtsev Yu.S. Mekhanyka polymerny'kh y kompozytny'kh materyalov [Mechanics of polymer and composite materials]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 304 p.

3. Geethamma V.G., Asaletha R., Kalarikkal N., Thomas S. Vibration and sound damping in polymers. Resonance, 2014, № 19. P. 821-833.

4. Mickoski H., Mickoski I., Simonovski P. Mathematical Modelling of Work of Modern Friction-Polymer Shock Absorbers and Determining the Dynamical Force during the Impact. Journal of Civil Engineering and Architecture. 2015, № 9. P. 368-372.

5. Victor B.M. Polymers hock absorber for use with well, head lubricat or assembly. Patent No.: US 7,669,648 B2, Mar 2 2010. 6 p.

6. Rabotnov Ju.N. Jelementy nasledstvennoj mehaniki tverdyh tel [Elements of Hereditary Solid Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 384 p.

7. Na C. Vychislitel'nye metody reshenija prikladnyh granichnyh zadach. [Computational methods for solving applied boundary value problems]. Moscow, Mir Publ., 1982. 296 p.

8. Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoy fiziki. [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 512 p.

9. Hemming R.V. Chislennye metody. [Numerical methods]. Moscow, Nauka Publ., 1968. 400 p.

10. Shlee M. Professional'noe programmirovaniye na C++ [Professional C ++ Programming]. Sankt-Petersburg , BHV-Petersburg Publ., 2012. 912 p.

Надійшло (received) 31.08.2020