ISSN 2078-9130

УДК 534.1:539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2019.2.190273

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ДО РОЗРАХУНКУ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ДИСИПАТИВНОГО ОСЦИЛЯТОРА З НЕЛІНІЙНОЮ ПРУЖНІСТЮ

Викладено наближений спосіб обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань осцилятора, що має у виразі пружної характеристики нелінійний степеневий доданок, при дії сили лінійного в’язкого опору. Метод не потребує побудови розв’язку нелінійного диференціального рівняння руху і ґрунтується на відомому положенні по те, що обвідна графіка вільних затухаючих коливань дисипативного осцилятора Дуффінга наближено описується експоненціальною функцією, такою як і в лінійного осцилятора. Виходячи з цього положення, розрахунок амплітуд затухаючих коливань осцилятора зі степеневою нелінійністю в виразі пружності ,де є також лінійний доданок, зведено до рекурентних співвідношень. У випадку жорсткої силової характеристики в співвідношення входить двохзначна функція Ламберта від’ємного аргументу, де використана її перша гілка. Для м’якої силової характеристики рекурентне співвідношення має функцію Ламберта додатного аргументу, яка однозначна. З метою спрощення числової реалізації одержаних аналітичних розв’язків, рекомендовано використовувати відомі таблиці цієї спеціальної функції, а в випадку малих за модулем значень аргументу – запропоновану апроксимацію її елементарними функціями. Щоб надати інформацію про фактичні похибки запропонованого способу розрахунку, розглянуто приклади, де проведено порівняння результатів, до яких він призводить, з результатами числового комп’ютерного інтегрування диференціального рівняння руху осцилятора, для випадків квадратичної та кубічної нелінійностей. Задовільна узгодженість результатів порівняння підтвердила придатність використання запропонованого способу в інженерних розрахунках.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, амплітуда затухаючих коливань, в’язкий опір, степенева нелінійність жорсткості, функція Ламберта, рекурентне співвідношення.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ

К РАСЧЕТУ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДИССИПАТИВНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТЬЮ

Изложен приближенный способ вычисления амплитуд свободных затухающих колебаний осциллятора с нелинейным степенным слагаемым в выражении упругой характеристики, при действии силы линейного вязкого сопротивления. Метод не требует построения решения нелинейного дифференциального уравнения движения и основан на известном положении о том, что огибающая графика свободных затухающих колебаний диссипативного осциллятора Дуффинга приближенно описывается экспоненциальной функцией, как и в линейном осцилляторе. Исходя из этого положения, расчет амплитуд затухающих колебаний осциллятора со степенной нелинейностью в выражении упругости, где есть также линейное слагаемое, сведен к рекуррентным соотношениям. В случае жесткой силовой характеристики в соотношение входит двухзначная функция Ламберта отрицательного аргумента, где использована ее первая ветвь. Для мягкой силовой характеристики рекуррентное соотношение имеет функцию Ламберта положительного аргумента, которая однозначна. С целью упрощения числовой реализации полученных аналитических решений, рекомендуется использовать известные таблицы этой специальной функции, а в случае малых по модулю значений аргумента – предложенную аппроксимацию ее элементарными функциями. Чтобы предоставить информацию о фактических погрешностях предложенного способа расчета, рассмотрены примеры, где проведено сравнение результатов, к которым он приводит, с результатами численного компьютерного интегрирования дифференциального уравнения движения для случаев квадратичной и кубической нелинейности. Удовлетворительная согласованность результатов сравнения подтвердила пригодность использования предложенного способа в инженерных расчетах.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, амплитуда затухающих колебаний, вязкое сопротивление, степенная нелинейность жесткости, функция Ламберта, рекуррентное соотношение.

V.P. OLSHANSKIY

CALCULATION OF FREE OSCILLATIONS OF A DISSIPATIVE OSCILLATOR WITH NONLINEAR ELASTICITY

An approximate method for calculating the amplitudes of free damping oscillations of an oscillator with a nonlinear power term in terms of the elastic characteristic under the force of linear viscous resistance is presented. The method does not require the construction of a solution of a nonlinear differential equation of motion and is based on the well-known assumption that the envelope graph of the free damping oscillations of a dissipative Duffing oscillator is approximately described by an exponential function, as in a linear oscillator. Based on this position, the calculation of the damping oscillations of the oscillator with power nonlinearity in the expression of elasticity, where there is also a linear term, is reduced to recurrent relations. In the case of a rigid power characteristic, the two-digit Lambert function of the negative argument, where its first branch is used, is included in the ratio. For a soft power characteristic, the recurrence relation has a Lambert function of a positive argument, which is unambiguous. In order to simplify the numerical implementation of the analytical solutions obtained, it is recommended to use known tables of this special function, and in the case of small modular values of the argument, the proposed approximation by its elementary functions. In order to provide information on the actual errors of the proposed calculation method, examples are given where the results to which it results are compared with the results of numerical computer integration of the differential equation of motion for quadratic and cubic nonlinearities. The satisfactory consistency of the comparison results confirmed the suitability of using the proposed method in engineering calculations. Calculations showed that the influence of the nonlinear component of elasticity weakens during oscillation damping and, at small amplitudes, they are close to the terms of the geometric progression, as in a linear oscillator.

Keywords: nonlinear oscillator, damping amplitude, viscous resistance, power stiffness nonlinearity, Lambert function, recurrence relation.

Вступ. В теорії нелінійних механічних коливань відомо, що в першому наближенні дисипативна система з лінійним в'язким опором і кубічним доданком у виразі сили пружності (осцилятор Дуффінга) має обвідну графіка затухаючих коливань, близьку до експоненти [1, 2]. Виходячи з цього, тут зроблена спроба використати цю властивість для наближеного обчислення амплітуд вільних коливань осциляторів з іншими показниками нелінійності в виразі силової характеристики, що має ще й лінійну складову. Оскільки в таких системах частота вільних коливань залежить від амплітуди, то тривалості напівциклів змінюються в ході руху і це доводиться враховувати в запропонованому способі розрахунку, який має форму рекурентних співвідношень між амплітудами розмахів.

Огляд літературних джерел. Рух осцилятора Дуффінта з лінійним в'язким опором розглядами в [3]. Там трьома способами будували наближені розв'язки рівняння руху. Використали методи: степеневих рядів, скінченних різниць і послідовних наближень Пікара. Встановлено, що розбіжності результатів, які дають перелічені методи, несуттєві при малому значенні коефіцієнта в'язкості. В монографії [1] розв'язок нелінійного рівняння руху осцилятора з кубічною нелінійністю у виразі пружності будували асимптотичним методом Крилова-Боголюбова. Показано, що в першому наближенні обвідна графіка вільних коливань описується експонентою, причому такою як і в лінійному осциляторі. До такого результату приходять і автори в [2]. Тут робимо спробу одержати розрахункові формули для обчислень амплітуд коливань без побудови розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху. Така можливість є при використанні методу енергетичного балансу [4-7], де його реалізовано для лінійно пружних систем. Не користуючись ним, в основу роботи тут покладаємо результати публікацій [1, 2] про наближену експоненціальну залежність обвідної від часу. Це призводить до рекурентних співвідношень між амплітудами розмахів, виражених через функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [8].

Метою статті є розробка та апробація наближеного способу обчислення амплітуд вільних коливань дисипативного осцилятора при наявності нелінійного степеневого доданка у виразі його силової характеристики.

Викладення основного матеріалу. Будемо обчислювати амплітуди коливань механічної системи, рух якої описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_1 x + c_2 |x|^{\nu+1} \operatorname{sign}(x) = 0, \qquad (1)$$

при умові, що:

$$x(0) = -a_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \qquad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; k – коефіцієнт в'язкого опору; c_1, c_2 – характеристики пружності; $\nu \geq 0$ – показник нелінійності; a_0 – початкове відхилення системи від положення рівноваги; $x = x(t)$ – переміщення осцилятора, як функція часу t; крапка над x означає похідну за часом t.

При $\nu = 0$ маємо лінійний осцилятор, а при $\nu = 2$ – осцилятор Дуффінга.

Обвідну графіка затухаючих коливань, як і в лінійній системі, де вона не залежить від жорсткості пружини, подаємо виразом:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{k}{2m}t\right). \qquad (3)$$

Точність цього наближення буде високою, коли $c_2|a_0|^{\nu} << c_1$.

Осереднену частоту ω_i – i–го розмаху обчислюємо по формулі:

$$\omega_i = \left[\frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{\alpha c_2}{2^{\nu} m}\left(a_{i-1} + a_i\right)^{\nu}\right]^{1/2}, \qquad (4)$$

де a_{i-1}, a_i – відповідно амплітудні відхилення на початку і в кінці i–го розмаху,

$$\alpha = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos^{\nu+2}\varphi \, d\varphi .$$

Цей інтеграл виражається через Гама-функцію $\Gamma(z)$ [9]. Тому:

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+4}{2}\right)}$$

і обчислення α можна проводити за допомогою таблиць Гама-функцій [10, 11]. При $\nu = 0$, $\alpha = 1$, що відповідає лінійному осцилятору.

Якщо тривалість i–го розмаху становить:

$$t_i = \frac{\pi}{\omega_i},$$

то із (3) і (4) випливає наступне співвідношення між його початковою a_{i-1} і кінцевою a_i амплітудами:

$$a_i = a_{i-1} \exp\left\{-\frac{k\pi}{2m}\left[\frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2 + \frac{\alpha c_2}{2^{\nu} m}\left(a_{i-1} + a_i\right)^{\nu}\right]^{-1/2}\right\},$$

$$i = 1,2,3,\ldots \qquad (5)$$

Обчислення a_i при відомому a_{i-1} тут можна проводити методом ітерацій. Але, коли:

$$\frac{\alpha c_2}{m} a_0^v << \omega_*^2 = \frac{c_1}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2,$$

то, замість (5), можна наближено прийняти:

$$a_i = a_{i-1} \exp\left[-\frac{k\pi}{2m\omega_*}\left(1 - \frac{\alpha c_{2*}}{2m\omega_*^2} a_i^v\right)\right],$$

де

$$c_{2*} = \left\{\frac{1}{2}\left[1 + \exp\left(\frac{k\pi}{2m\omega_*}\right)\right]\right\}^v c_2 .$$

Тоді, логарифмуванням із (6) отримуємо:

$$\ln a_i^v - \frac{k\pi\alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v = \ln a_{i-1}^v - \frac{k\pi v}{2m\omega_*}. \qquad (7)$$

Далі будемо розрізняти випадки жорсткої ($c_2 > 0$) то м'якої ($c_2 < 0$) силової характеристики.

Якщо $c_2 > 0$, то (7) зводиться до рівняння:

$$\ln\left[\frac{k\pi\alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v\right] - \frac{k\pi\alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v = y_i , \qquad (8)$$

де

$$y_i = \ln\left[\frac{k\pi\alpha v c_{2*}}{(2m)^2 \omega_*^3} a_{i-1}^v\right] - \frac{k\pi v}{2m\omega_*}.$$

Рівняння (8) має аналітичний розв'язок. Він виражається через першу гілку двохзначної функції Ламберта від'ємного аргументу $W_1(-\xi)$ і має вигляд:

$$a_i = \left[-\frac{(2m)^2 \omega_*^3}{k\pi\alpha v c_{2*}} W_1\left(-\exp(y_i)\right)\right]^{\frac{1}{v}}, \quad i = 1,2,3,... \qquad (9)$$

У випадку $c_2 < 0$ замість (8) маємо рівняння:

$$\ln\left[\frac{k\pi\alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} a_i^v\right] - \frac{k\pi\alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} = z_i , \qquad (10)$$

в якому:

$$z_i = \ln\left[\frac{k\pi\alpha v |c_{2*}|}{(2m)^2 \omega_*^3} a_{i-1}^v\right] - \frac{k\pi v}{2m\omega_*}.$$

Розв'язок рівняння (10) виражається через функцію Ламберта додатного аргументу $W(\zeta)$ в має вигляд:

$$a_i = \left[\frac{(2m)^2 \omega_*^3}{k\pi\alpha v |c_{2*}|} W\left(\exp z_i\right)\right]^{\frac{1}{v}}, \quad i = 1,2,3,... \qquad (11)$$

Таблиці функції Ламберта надруковано в [8]. Їх використання спрощує обчислення a_i за формулами (9) і (11). При близьких до нуля значеннях аргументу $\zeta \in [-0{,}2; 0{,}3]$ функцію можна обчислювати за наближеною формулою:

$$W(\zeta) \approx \zeta - \zeta^2 + \frac{27\zeta^3}{2(16\zeta + 9)}. \qquad (12)$$

Похибка наближення (12) менша 1 %. Так при $\zeta = -0{,}2$ $W(-0{,}2) = W_1(-0{,}2) \approx -0{,}2586$. В таблиці в [8] $W_1(-0{,}2) \approx -0{,}2592$. При $\zeta = 0{,}3$ $W(0{,}3) \approx 0{,}2364$. В таблиці в [8] $W(0{,}3) \approx 0{,}2368$. Отже, на вказаному інтервалі, формула (12) дає досить високу точність.

Щоб переконатися у вірогідності виведених наближених формул (9), (11), проведемо розрахунки амплітуд коливань осциляторів із заданими значеннями v.

Коливання осцилятора з квадратичною нелінійністю. При $v = 1$ маємо: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$; $\alpha = \frac{8}{3\pi}$. У випадку $c_2 > 0$:

$$a_i = -\frac{3m^2\omega_*^3}{2k\, c_{2*}} W_1\left(-\exp(y_i)\right), \quad i = 1,2,3,..., \qquad (13)$$

причому:

$$y_i = \ln\left(\frac{2k\, c_{2*}}{3m^2\omega_*^3} a_{i-1}\right) - \frac{k\pi}{2m\omega_*};$$

$$c_{2*} = \frac{1}{2}\left(1 + \exp\left(\frac{k\pi}{2m\omega_*}\right)\right) c_2 .$$

Якщо $c_2 < 0$, то:

$$a_i = \frac{3m^2\omega_*^3}{2k|c_{2*}|} W\left(\exp z_i\right), \quad i = 1,2,3,..., \qquad (14)$$

де:

$$z_i = \ln\left(\frac{2k|c_{2*}|}{3m^2\omega_*^3} a_{i-1}\right) - \frac{k\pi}{2m\omega_*}.$$

Для проведення розрахунків приймаємо: $m = 2$ кг; $k = 8$ Нс/м; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 4000$ Н/м^2; $a_0 = 0{,}05$ м. Одержані двома способами послідовності з десяти амплітуд записано в табл. 1. Там, поряд з наближеними результатами, вказано амплітуди $x\left(\sum t_i^*\right)$ і час їх досягнення $\sum t_i^*$, отримані числовим інтегруванням задачі Коші (1), (2) на комп'ютері. Ці результати можна вважати умовно точними при аналізі похибок наближеного способу. Відносні похибки наближеного способу теж вказано в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення a_i, $c_2 > 0$, $v = 1$

i	$\sum t_i^*$, с	Числове інтегр.	Формула (13)	Похибка, %
		Значення 100 a_i, м		
1	0,14475	3,780	3,758	0,6
2	0,29242	2,836	2,803	1,2
3	0,44246	2,114	2,078	1,7
4	0,59440	1,567	1,534	2,1
5	0,74780	1,157	1,129	2,4
6	0,90234	0,852	0,829	2,7
7	1,05774	0,626	0,607	3,0
8	1,21379	0,459	0,445	3,1
9	1,37032	0,336	0,325	3,3
10	1,52720	0,246	0,237	3,7

Розбіжності результатів, одержаних різними способами і цій таблиці не суттєві. Похибка наближених результатів менша 4 %.

Амплітуди коливань в табл. 2 розраховані для осцилятора з м'якою силовою характеристикою, коли $c_2 = -4000$ Н/м^2. Решта вхідних даних залишилися тими, що і при $c_2 > 0$.

Тут розбіжності трохи більші, ніж при $c_2 > 0$.

Таблиця 2 – Значення a_i, $c_2 < 0$, $v = 1$

i	$\sum t_i^*$, c	Числове інтегр.	Формула (14)	Похибка, %
		Значення 100 a_i, м		
1	0,17498	3,465	3,544	2,3
2	0,34416	2,444	2,532	3,6
3	0,50977	1,742	1,820	4,5
4	0,67306	1,251	1,313	5,0
5	0,83476	0,902	0,950	5,3
6	0,99537	0,653	0,689	5,5
7	1,15521	0,473	0,501	5,9
8	1,31451	0,344	0,364	5,9
9	1,47340	0,250	0,265	6,0
10	1,63202	0,182	0,193	6,0

Коливання осцилятора Дуффінга. Задавши $v = 2$, знаходимо, що $\alpha = \frac{3}{4}$. При $c_2 > 0$ формула (9) набуває вигляд:

$$a_i = \left[-\frac{8m^2 \omega_*^3}{3k\,\pi\, c_{2*}} W_1\left(-\exp\left(y_i\right)\right) \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \qquad (15)$$

де:

$$y_i = \ln\left(\frac{3k\,\pi\, c_{2*}}{8m^2 \omega_*^3} a_{i-1}^2 \right) - \frac{k\,\pi}{m\omega_*};$$

$$c_{2*} = \frac{1}{4}\left[1 + \exp\left(\frac{k\,\pi}{2m\omega_*} \right) \right]^2 \cdot c_2 .$$

Якщо $c_2 < 0$, то формула (11) зводиться до наступної:

$$a_i = \left[\frac{8m^2 \omega_*^3}{3k\,\pi\, |c_{2*}|} W\left(\exp\left(z_i\right)\right) \right]^{1/2}, \qquad (16)$$

причому

$$z_i = \ln\left(\frac{3k\,\pi\, |c_{2*}|}{8m^2 \omega_*^3} a_{i-1}^2 \right) - \frac{k\,\pi}{m\omega_*}.$$

Проведемо розрахунок послідовності амплітуд коливань осцилятора з жорсткою силовою характеристикою, що має: $m = 2$ кг; $k = 8$ Нс/м; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 160000$ Н/м^3; $a_0 = 0{,}05$ м. Результати обчислень по формулі (15) вказано в табл. 3, де також записано амплітуди і час їх досягнення одержані числовим комп'ютерним інтегруванням рівняння (1).

Відносна похибка наближеного методу тут менша 6 %.

Таблиця 3 – Значення a_i, $c_2 > 0$, $v = 2$

i	$\sum t_i^*$, c	Числове інтегр.	Формула (15)	Похибка, %
		Значення 100 a_i, м		
1	0,13830	3,885	3,831	1,4
2	0,28354	2,955	2,872	2,8
3	0,43376	2,212	2,126	3,9
4	0,58722	1,638	1,564	4,5
5	0,74263	1,204	1,145	4,9
6	0,89916	0,882	0,837	5,1
7	1,05630	0,645	0,611	5,3
8	1,21378	0,471	0,446	5,3
9	1,37145	0,344	0,325	5,5
10	1,52921	0,251	0,237	5,6

В табл. 4 записано амплітуди, обчислені двома способами при коливаннях осцилятора з мякою силовою характеристикою. Для розрахунку в попередніх числових даних змінили лише значення k і c_2, прийнявши $c_2 = -80000$ Н/м^3, $k = 6$ Нс/м.

Розбіжності наближених і точних результатів не великі.

Таблиця 4 – Значення a_i, $c_2 < 0$, $v = 2$

i	$\sum t_i^*$, c	Числове інтегр.	Формула (16)	Похибка, %
		Значення 100 a_i, м		
1	0,17123	3,800	3,880	2,1
2	0,33627	2,937	3,032	3,2
3	0,49817	2,292	2,378	3,8
4	0,65831	1,797	1,870	4,1
5	0,81744	1,412	1,473	4,3
6	0,97594	1,112	1,161	4,4
7	1,13408	0,877	0,916	4,5
8	1,29198	0,692	0,723	4,5
9	1,44973	0,546	0,570	4,4
10	1,60740	0,431	0,450	4,4

Висновки. Запропоновано та апробовано розрахунками наближений спосіб обчислень амплітуд вільних затухаючих коливань, без розв'язування нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора, що має лінійний в'язкий опір і нелінійний степеневий доданок у виразі силової характеристики. Обчислення зведено до рекурентних співвідношень, пов'язаних з функцією Ламберта. Результати, до яких призводить запропонований спосіб задовільно узгоджується з результатами числового інтегрування диференціального руху осцилятора на комп'ютері.

Список літератури

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимтотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504 с.

2. *Василенко М.В, Алексейчук О.М.* Теорія коливань і стійкості руху. Київ: Вища школа, 2004. 525 с.

3. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва: Ил, 1953. 258 с.

4. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под редакцией *И.И. Блехмана*. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.

5. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний. Москва : Наука, 1980. 270 с.

6. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М.* та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2015. 116 с.

7. *Ольшанський В.П., Тіщенко Л.М., Ольшанський С.В.* Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдрук, 2016. 264 с.

8. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки. Харків: Издатель Савчук В.О., 2013. 204 с.

9. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралом, сумы рядов и произведений. Москва: Наука, 1962. 1100 с.

10. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

11. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

References (transliterated)

1. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 1974. 504 p.

2. *Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M.* Teoriya kolyvan i stiykosti rukhu [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev: High School. 2004. 525 p.

3. *Stocker J.* Nelineynyye kolebaniya v mekhanicheskikh i elektricheskikh sistemakh [Nonlinear Oscillations in Mechanical and Electrical Systems]. Moscow: Il, 1953. 258 p.

4. Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh [Vibration in technology. Handbook in six volumes]. T. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems; edited by *I.I. Blekhman*. Moscow: Engineering, 1979. 351 p.

5. *Panovko Ya.G.* Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations]. Moscow: Nauka, 1980. 270 p.

6. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., Tishchenko L.N.* Kolyvannya dysypatyvnykh ostsylyatoriv [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv: Miskdruk. 2015. 116 p.

7. *Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N., Olshanskiy S.V.* Dynamika dysypatyvnykh ostsylyatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv: Miskdruk. 2016. 264 p.

8. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Funktsiya Lamberta v zadachakh ballistiki material'noy tochki [The Lambert function in ballistic problems of a material point]. Kharkiv: Publisher Savchuk V.O., 2013. 204 p.

9. *Gradshtein I.S., Ryzhik I.M.* Tablitsy integralom, sumy ryadov i proizvedeniy [Tables by integral, sums of series and products]. Moscow: Nauka, 1962. 1100 p.

10. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Science. 1979. 832 p.

11. *Janke E., Jemde F., Ljosh F.* Special'nye funkcii [Special functions]. Moscow: Nauka. 1977. 344 p.

Надійшла (received) 12 .11.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com