

***В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ***

### **ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОЇ СКЛАДОВОЇ В'ЯЗКОГО ОПОРУ НА ТРИВАЛІСТЬ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ОСЦИЛЯТОРА**

Розглянуто вільні коливання лінійно пружного осцилятора зі степеневим нелінійним в'язким опором. Вираз сили опору в рівнянні руху складається з двох доданків. Перший доданок пропорційний швидкості руху, а другий – степеню швидкості. Дослідження проведено методом енергетичного балансу. Реалізовано два варіанти вказаного методу. Перший пов'язаний зі складанням і розв'язанням диференціального рівняння обвідної графіка коливального процесу. В другому варіанті методу розрахунок спадної послідовності амплітуд розмахів зведено до рекурентного співвідношення, яке, при довільному додатному показнику нелінійності, доводиться розв'язувати чисельним методом. В роботі задіяно ітераційний метод Ньютона. Встановлено випадки нелінійності, коли рекурентне співвідношення має замкнені аналітичні розв'язки та побудовано їх. Доведено, що коли показник нелінійності більший нуля, але менший одиниці, то вільні коливання осцилятора обмежені в часі та зводяться до скінченної кількості розмахів, тобто осцилятор з в'язким опором має таку властивість, як і осцилятор з сухим тертям. Оскільки розрахункові формули одержані без розв'язування нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора, проведено порівняння чисельних результатів, до яких вони призводять, з результатами чисельного комп'ютерного інтегрування задачі Коші. Отримано їх задовільну узгодженість і встановлено, що використання рекурентних співвідношень дає вищу точність, ніж використання виразу для обвідної графіка вільних коливань. Показано що із виведених формул, як окремі випадки, випливають одержані раніше залежності для розрахунку амплітуд вільних коливань осцилятора при спільній дії сил сухого і лінійного в'язкого тертя. Дослідження супроводжується прикладами розрахунків і порівняльним аналізом отриманих чисельних результатів.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, вільні коливання, лінійна характеристика пружності, степеневим нелінійний в'язкий опір, умова припинення коливань.

***В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ***

### **ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ НА ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСЦИЛЛЯТОРА**

Рассмотрено свободные колебания линейного упругого осциллятора со степенным нелинейным вязким сопротивлением. Выражение силы сопротивления в уравнении движения состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое пропорционально скорости движения, а второе – степени скорости. Исследование проведено методом энергетического баланса. Реализовано два варианта указанного метода. Первый связан с составлением и решением дифференциального уравнения огибающей графика колебательного процесса. Во втором варианте метода расчет последовательности убывающих амплитуд размахов сведен к рекуррентному соотношению, которое при произвольном положительном показателе нелинейности приходится решать численным методом. В работе задействован итерационный метод Ньютона. Установлены случаи нелинейности, когда рекуррентное соотношение имеет замкнутые аналитические решения и построено их. Доказано, что когда показатель нелинейности больший нуля, но меньший единицы, свободные колебания осциллятора ограничены во времени и сводятся к конечной последовательности размахов, то есть осцилятор с вязким сопротивлением имеет такое свойство, как и осцилятор с сухим трением. Поскольку расчетные формулы получены без решения нелинейного дифференциального уравнения движения осциллятора, проведено сравнение численных результатов, к которым они приводят, с результатами численного компьютерного интегрирования задачи Коши. Получено их удовлетворительную согласованность и установлено, что использование рекуррентных соотношений дает более высокую точность, чем использование выражения для огибающей графика свободных колебаний. Показано, что из выведенных формул, как частный случай, следуют полученные ранее зависимости для расчета амплитуд свободных колебаний осциллятора при совместном действии сил сухого и линейного вязкого трения. Исследование сопровождается примерами расчетов и сравнительным анализом полученных результатов.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, свободные колебания, линейная характеристика упругости, степенное нелинейное вязкое сопротивление, условие прекращения колебаний.

***V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY***

### **THE INFLUENCE OF THE NONLINEAR COMPONENT OF VISCOUS RESISTANCE ON THE DURATION OF FREE OSCILLATIONS OF THE OSCILLATOR**

The free oscillations of a linear elastic oscillator with a power nonlinear viscous resistance are considered. The expression of the resistance force in the equation of motion consists of two terms. The first term is proportional to the speed of movement, and the second to the degree of speed. The study was conducted by the method of energy balance. Two variants of the specified method are implemented. The first is associated with the preparation and solution of the differential equation of the envelope of the graph of the oscillatory process. In the second version of the method, the calculation of the sequence of decreasing amplitudes of the ranges is reduced to a recurrence relation, which, for an arbitrary positive non-linearity index, has to be solved numerically. Newton's iterative method is

involved. Cases of nonlinearity are established when the recurrence relation has closed analytical solutions and they are constructed. It is proved that when the non-linearity index is greater than zero, but less than unity, the free oscillations of the oscillator are limited in time and are reduced to a finite sequence of ranges, that is, an oscillator with viscous resistance has the same property as an oscillator with dry friction. Since the calculation formulas were obtained without solving the nonlinear differential equation of motion of the oscillator, the numerical results they bring to are compared with the results of numerical computer integration of the Cauchy problem. Their satisfactory consistency was obtained and it was found that the use of recurrence relations gives higher accuracy than using the expression for the envelope of the graph of free oscillations. It is shown that from the derived formulas, as a special case, the previously obtained relationships for calculating the amplitudes of free oscillations of the oscillator under the combined action of the forces of dry and linear viscous friction follow. The study is accompanied by examples of calculations and a comparative analysis of the results.

**Keywords:** nonlinear oscillator, free vibrations, linear characteristic of elasticity, power nonlinear viscous resistance, condition for the termination of oscillations.

**Вступ.** Наявність двох доданків у виразі сили в'язкого опору, один з яких лінійний, а другий нелінійний, може внести суттєві зміни в рух дисипативного осцилятора, спричинений початковим відхиленням від положення рівноваги. Прикладом тому є відоме рівняння Кельвіна з двома такими доданками, яке зіграло важливу роль при математичному моделюванні автоколивань [1]. Але поряд з цим існують і інші прояви особливостей руху. Виявляється, що осцилятор з двома доданками у виразі сили в'язкого опору може мати таку властивість як і осцилятор з сухим тертям Кулона, тобто його вільні коливання зводяться до декількох розмахів і відбуваються за обмежений проміжок часу. Тут з'ясовуються умови, за яких проявляється така властивість коливальної системи. Для дослідження задіяно метод енергетичного балансу, який не потребує побудови аналітичних розв'язків складного нелінійного диференціального руху осцилятора.

**Огляд літературних джерел та постановка мети дослідження.** Метод енергетичного балансу давно використовують для опису затухаючих коливань дисипативних систем [2-4]. Але там традиційно обмежуються одним доданком у виразі сили опору і окремо розглядають такі випадки, як сухе тертя, лінійно в'язкий опір, опір пропорційний квадрату швидкості руху. Вільні коливання осциляторів при наявності в рівнянні руху двох доданків у виразі сили опору описано в статті [5] та монографічних виданнях [6, 7]. Зазначимо, що раніше вільні коливання, при спільній дії в'язкого лінійного опору та сухого тертя, розглянуто в [8]. Там подано аналітичний розв'язок задачі на фазовій площині, коли для аналізу достатньо першого інтегралу рівняння руху. В роботах [6, 7] методом припасування отримано точні розв'язки диференціальних рівнянь коливань і проведено наближений розрахунок коливань методом енергетичного балансу. Показано, що останній дає досить точні результати. Тому цей метод використовуємо і в даній роботі.

**Метою** статті є математичне моделювання вільних коливань осцилятора з нелінійним в'язким опором, який описується двома доданками в диференціальному рівнянні руху.

### 1. Побудова виразу обвідної графіка коливань.

Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m \ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 |\dot{x}|^v \operatorname{sign}(\dot{x}) + c x = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2):  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора;  $m$  – його маса;  $k_1, k_2$  – коефіцієнти в'язкого опору;  $c$  – коефіцієнт лінійної жорсткості пружини;  $v > 0$  – показник нелінійності;  $a_0$  – початкове відхилення осцилятора від положення рівноваги  $x = 0$ ;  $t$  – час; крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

Розглянемо  $i$ -й розмах коливань, що починається з відхилення  $x = -a_{i-1}$  і закінчується відхиленням  $x = a_i$ . Зміна потенціальної енергії на ньому  $\Delta\Pi$  становить:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2} c (a_i^2 - a_{i-1}^2). \quad (3)$$

Цю зміну подамо наближеним виразом [4, 7]:

$$\Delta\Pi \approx ca \frac{\pi da}{\omega dt}, \quad (4)$$

у якому  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ;  $a = \frac{1}{2}(a_{i-1} + a_i)$ .

Роботу сили в'язкого опору  $A_T$  визначаємо інтегралом [4, 7]:

$$A_T = -k_1 a^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt - k_2 a^{v+1} \omega^{v+1} \int_0^{\pi/\omega} \sin^{v+1}(\omega t) dt. \quad (5)$$

Враховуючи, що:

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{2\omega};$$

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^{v+1}(\omega t) dt = \frac{1}{\omega} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)},$$

де  $\Gamma(z)$  – гама функція затабульована в [9, 10], виразу (5) надаємо вигляд:

$$A_T = -\frac{k_1 \pi \omega}{2} a^2 - k_2 \omega^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)} a^{v+1}. \quad (6)$$

Згідно з методом енергетичного балансу:

$$\Delta\Pi = A_T,$$

що з урахуванням (4) і (6), призводить до диференціального рівняння:

$$\frac{da}{dt} = -\lambda_1 a - \lambda_2 a^v, \quad (7)$$

в якому:  $\lambda_1 = \frac{k_1}{2m}$ ;  $\lambda_2 = \frac{k_2 \omega^{v+1}}{\pi c} \frac{\Gamma\left(\frac{v+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+3}{2}\right)}$ .

Інтегруванням (7) отримуємо з точністю до сталої  $A$ :

$$\int \frac{da}{a + ba^v} = -\lambda_1 t + A, \quad b = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Звідки:

$$\ln \frac{a}{(a + ba^{v-1})^{\frac{1}{v-1}}} = -\lambda_1 t + A \quad \text{при } v \neq 1,$$

$$\frac{1}{1+b} \ln a = -\lambda_1 t + A \quad \text{при } v = 1.$$

Сталу  $A$  визначаємо з умови  $a(0) = a_0$ . Тоді:

$$a(t) = \begin{cases} \left[ (b + a_0^{1-v}) e^{\lambda_1(v-1)t} - b \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1 \\ a_0 \exp\left(-\frac{k_1 + k_2}{2m} t\right) & v = 1. \end{cases} \quad (8)$$

Верхній вираз переходить в нижній при  $v = 1$ , внаслідок граничного переходу  $v \rightarrow 1$ .

Згідно з (8), при  $v < 1$ , існує таке  $t = t_*$ , коли  $a(t_*) = 0$ . Воно є коренем рівняння:

$$(b + a_0^{1-v}) e^{-\lambda_1(1-v)t_*} - b = 0,$$

що має аналітичний розв'язок:

$$t_* = \frac{1}{(1-v)\lambda_1} \ln \left( 1 + \frac{a_0^{1-v}}{b} \right).$$

Отже, при  $v < 1$ , вільні коливання характеризуються обмеженою кількістю розмахів  $n_*$ , яку можна наближено знайти за формулою:

$$n_* = \text{ціла частина} \left[ \frac{\omega}{\pi(1-v)\lambda_1} \ln \left( 1 + \frac{a_0^{1-v}}{b} \right) \right]. \quad (9)$$

В цьому проявляється аналогія вільних коливань осцилятора з нелінійним в'язким опором і осцилятора з сухим кулоновим тертям. При  $v \geq 1$  такої аналогії немає.

Використовуючи (8), нескладно обчислити амплітудне відхилення осцилятора в кінці  $i$ -го розмаху. Його значення становить:

$$a_i \approx \begin{cases} \left[ (b + a_0^{1-v}) \exp\left(\lambda_1(v-1)\frac{i\pi}{\omega}\right) - b \right]^{\frac{1}{1-v}} & v \neq 1 \\ a_0 \exp\left(-\frac{k_1 + k_2}{2m} \frac{i\pi}{\omega}\right) & v = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Тут нижня залежність відповідає точному розв'язку задачі Коші.

Формула (10) узагальнює відомі результати. Так при  $v = 0$ ;  $k_1 = k$ ;  $k_2 = F_T$  маємо  $\lambda_1 = \frac{k}{2m}$ ;

$$\lambda_2 = \frac{2F_T}{\pi\sqrt{cm}}; \quad b = \frac{4F_T}{\pi k} \sqrt{\frac{m}{c}} \quad \text{і формула (10) набуває}$$

вигляд:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right) - \frac{2F_T}{\lambda c} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right) \right], \quad (11)$$

де  $\lambda = \pi k (2\sqrt{cm})^{-1}$ .

**2. Рекурентні співвідношення для розрахунку амплітуд розмахів.** Їх одержимо теж методом енергетичного балансу. Для цього прирівняємо праві частини виразів (3) і (6).

В результаті одержуємо рекурентне співвідношення:

$$a_i^2 - a_{i-1}^2 = -\gamma_1 (a_i + a_{i-1})^2 - \gamma_{2i} \cdot a_{i-1}^{1-v} (a_i + a_{i-1})^{v+1}, \quad (12)$$

в якому:

$$\gamma_1 = \frac{\pi \omega k_1}{4c}; \quad \gamma_{2i} = \frac{\pi}{2^v \omega} \frac{\lambda_2}{a_{i-1}^{1-v}}.$$

Введенням безрозмірної величини  $\xi_i = 1 + \frac{a_i}{a_{i-1}}$

рівнянню (12) надаємо вигляд:

$$(1 + \gamma_1) \xi_i + \gamma_{2i} \cdot \xi_i^v = 2. \quad (13)$$

Тут, при  $v < 1$ , коефіцієнт  $\gamma_{2i} \rightarrow \infty$ , коли  $a_{i-1} \rightarrow 0$ . Зі зменшенням амплітуд розмахів  $a_{i-1}$  ліва частина рівняння (13) стає більшою двох і воно перестає мати додатні корені. Це означає, що у випадку  $v < 1$  вільні коливання мають обмежену кількість циклів, про що вже йшлося вище. Для забезпечення коливального руху відхилення осцилятора на початку розмаху повинно бути більшим, ніж:

$$\sup a_{i-1} = \left( \frac{2\pi \lambda_2}{\omega(1-\gamma_1)} \right)^{\frac{1}{1-v}}, \quad \gamma_1 < 1.$$

Розв'язок рівняння (13) при довільних  $v > 0$  доводиться одержувати числовими методами. Одним із них може бути ітераційний метод Ньютона, у відповідності з яким:

$$\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} - \frac{(1 + \gamma_1) \xi_{ij} + \gamma_{2i} \cdot \xi_{ij}^v - 2}{1 + \gamma_1 + v \gamma_{2i} \cdot \xi_{ij}^{v-1}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

За нульове наближення можна брати  $\xi_{i0} = 2$ .

Обчисливши з заданою точністю  $\xi_{i,j+1}$ , далі слід використати залежність:

$$a_i = (\xi_{i,j+1} - 1) a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

щоб знайти значення  $a_i$  по відомому значенню  $a_{i-1}$ .

Поряд з викладеним універсальним способом, розглянемо додатково окремі значення показника нелінійності  $v$ , для якого рівняння (13) має точні аналітичні розв'язки.

Випадок  $v = 1/3$ . Заміною  $z_i = \xi_i^{1/3}$  рівняння (13) зводимо до кубічного:

$$z_i^3 + \frac{\gamma_{2i}}{1 + \gamma_1} z_i - \frac{2}{1 + \gamma_1} = 0.$$

Його розв'язок виражається формулами [11]:

$$z_i = \sqrt[3]{S + \frac{1}{1+\gamma_1}} - \sqrt[3]{S - \frac{1}{1+\gamma_1}};$$

$$S = \frac{1}{1+\gamma_1} \sqrt{1 + \frac{1}{27} \frac{\gamma_{2i}^3}{1+\gamma_1}}.$$

Рекурентне співвідношення отримує форму:

$$a_i = (z_i^3 - 1)a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Процес коливань триває лише при  $z_i > 1$ , тобто маємо обмежену кількість циклів.

Випадок  $\nu = 1/2$ . Заміною  $\eta_i = \xi_i^{1/2}$  рівняння (13) зводимо до квадратичного:

$$\eta_i^2 + \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1} \eta_i - \frac{2}{1+\gamma_1} = 0.$$

Тоді зв'язок між амплітудами розмахів подається формулою:

$$a_i = (\eta_i^2 - 1)a_{i-1}, \quad (14)$$

де  $\eta_i = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1} \right)^2 + \frac{2}{1+\gamma_1} - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{2i}}{1+\gamma_1}}.$

Умова припинення коливань виражається нерівністю  $\eta_i \leq 1$ .

Випадок  $\nu = 1$ . Рівняння (13) стає лінійним і має розв'язок:

$$\xi_i = \frac{2}{1+\gamma_1 + \gamma_{2i}}.$$

Обчислення амплітуд розмахів зводиться до використання формули:

$$a_i = \frac{1-\gamma_1-\gamma_{2i}}{1+\gamma_1+\gamma_{2i}} a_{i-1} = \frac{4\sqrt{cm} - \pi(k_1+k_2)}{4\sqrt{cm} + \pi(k_1+k_2)} a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

При  $k_1+k_2 = k$  вона співпадає з формулою, що надрукована в [6, 7].

Випадок  $\nu = 2$ . Рівняння (13) стає квадратним, що має розв'язок:

$$\xi_i = \sqrt{\left( \frac{1+\gamma_1}{2\gamma_{2i}} \right)^2 + \frac{2}{\gamma_{2i}} - \frac{1+\gamma_1}{2\gamma_{2i}}}. \quad (15)$$

Амплітуди розмахів пов'язані співвідношенням:

$$a_i = (\xi_i - 1)a_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

Якщо  $a_{i-1} \rightarrow 0$ , то  $\gamma_{2i} \rightarrow 0$ . Тоді з (15) випливає, що  $\xi_i \rightarrow \frac{2}{1+\gamma_1}$ . Це значить, що при  $\gamma_1 < 1$   $\xi_i > 1$  і процес вільних коливань має безліч циклів, з нескінченно малими амплітудами.

При відсутності лінійної складової маємо чисто квадратичний в'язкий опір. Для нього  $\gamma_1 = 0$ :

$\gamma_{2i} = \frac{k_2 \cdot a_{i-1}}{3m}$ . Якщо  $\gamma_{2i} \ll 1$ , то згідно з (15):

$$\xi_i = 2 - 4\gamma_{2i}.$$

Тоді:  $\frac{a_i}{a_{i-1}} = \xi_i - 1 = 1 - \frac{4k_2}{3m} a_{i-1}.$

Залежність такого типу це відома формула А де Салігнью, яку він одержав емпіричним шляхом [1]

Випадок  $\nu = 3$ . Рівняння (13) зводиться до кубічного:

$$\xi_i^3 + \frac{1+\gamma_1}{\gamma_{2i}} \xi_i - \frac{2}{\gamma_{2i}} = 0.$$

Воно має аналітичний розв'язок [11]

$$\xi_i = \sqrt[3]{Q + \frac{1}{\gamma_{2i}}} - \sqrt[3]{Q - \frac{1}{\gamma_{2i}}},$$

де  $Q = \frac{1}{\gamma_{2i}} \sqrt{1 + \frac{1}{27} \frac{(1+\gamma_1)^3}{\gamma_{2i}}}.$

Якщо  $a_{i-1} \rightarrow 0$ , то  $\gamma_{2i} \rightarrow 0$ , а  $Q \gg \frac{1}{\gamma_{2i}}$ , бо

$Q \rightarrow \frac{(1+\gamma_1)^{3/2}}{3^{3/2} \gamma_{2i}^{3/2}}$ . Такий асимптотичний поведінці відповідає:

$$\xi_i \rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{\gamma_{2i} Q^{2/3}} \rightarrow \frac{2}{1+\gamma_1}.$$

Оскільки  $\gamma_1 < 1$ , то  $\xi_i > 1$ . Отже вільні коливання не обмежені кількістю розмахів.

#### Числові результати і їх порівняльний аналіз.

Для проведення розрахунків приймаємо:  $m = 1$  кг;  $c = 100$  Н/м;  $a_0 = 0,04$  м;  $k_1 = 0,4$  Нс/м;  $k_2 = 0,8$  Н(с/м)<sup>2</sup>.

**Приклад 1.** Обчислимо послідовність амплітуд вільних коливань осцилятора, в якого  $\nu = 0,5$ . Для прийнятих числових даних:  $\omega = 10$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_1 = 0,2$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_2 = 0,140764$  м<sup>1/2</sup>с<sup>-1</sup>;  $b = 0,703818$  м<sup>1/2</sup>;  $\gamma_1 = 10^{-2} \pi$ ;  $\gamma_{2i} = 0,031270 / \sqrt{a_{i-1}}$ . Тут враховано, що:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ;

$$\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = 0,906402; \quad \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = 0,919063.$$

Оскільки  $\nu < 1$ , то вільні коливання обмежені кількістю розмахів і, згідно з формулою (9),  $n^* = 7$ .

Обчислені трьома способами значення амплітуд коливань записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 0,5$

| i | Формула (10)            | Формула (14) | Числове інтегр. |
|---|-------------------------|--------------|-----------------|
|   | Значення $10^2 a_i$ , м |              |                 |
| 1 | 2,9600                  | 2,9567       | 2,9574          |
| 2 | 2,1013                  | 2,0951       | 2,0963          |
| 3 | 1,4092                  | 1,4007       | 1,4020          |
| 4 | 0,8699                  | 0,8595       | 0,8609          |
| 5 | 0,4708                  | 0,4590       | 0,4602          |
| 6 | 0,2001                  | 0,1873       | 0,1882          |
| 7 | 0,0466                  | 0,0335       | 0,0339          |

В останній колонці вказано значення  $x(t_i)$ ,  $t_i = \frac{i\pi}{\omega}$ , одержані числовим інтегруванням рівняння

(1) при початкових умовах (2). Маємо задовільну узгодженість результатів, отриманих різними способами. Коливальний процес включає сім розмахів, що було визначено раніше по формулі (9).

Графік коливань, до якого призводить числове комп'ютерне інтегрування задачі Коші (1), (2), подано на рис. 1.

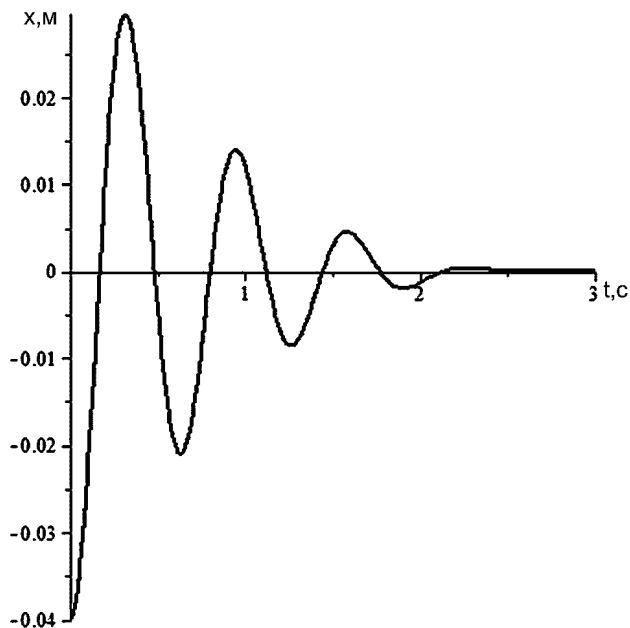


Рисунок 1 – Графік коливань при  $\nu = 0,5$

На рисунку видно, що здійснивши сім розмахів, далі осцилятор з плином часу монотонно прямує в положення рівноваги  $x = 0$ .

**Приклад 2.** Поміняємо в першому прикладі лише значення  $\nu$ , задавши  $\nu = 2$ . Тоді:  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$ ;  $\lambda_1 = 0,2 \text{ c}^{-1}$ ;  $\lambda_2 = 3,395305 \text{ м}^{-1}\text{c}^{-1}$ ;  $b = 16,976527 \text{ м}^{-1}$ ;  $\gamma_1 = 10^{-2}\pi$ ;  $\gamma_{2i} = 0,266667a_{i-1}$ . При обчисленні констант враховано, що  $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 0,75\sqrt{\pi}$ . Розраховані трьома способами значення перших десяти амплітуд вільних коливань записано в табл. 2.

Таблиця 2 – Послідовності амплітуд коливань при  $\nu = 2$

| $i$ | Формула (10)            | Формула (16) | Числове інтегр. |
|-----|-------------------------|--------------|-----------------|
|     | Значення $10^2 a_i$ , м |              |                 |
| 1   | 3,6072                  | 3,6067       | 3,6070          |
| 2   | 3,2658                  | 3,2649       | 3,2653          |
| 3   | 2,9667                  | 2,9657       | 2,9661          |
| 4   | 2,7031                  | 2,7020       | 2,7025          |
| 5   | 2,4695                  | 2,4682       | 2,4688          |
| 6   | 2,2614                  | 2,2601       | 2,2606          |
| 7   | 2,0752                  | 2,0738       | 2,0743          |
| 8   | 1,9078                  | 1,9065       | 1,9070          |
| 9   | 1,7570                  | 1,7557       | 1,7562          |
| 10  | 1,6202                  | 1,6193       | 1,6197          |

Обчислені методом енергетичного балансу значення  $a_i$  добре узгоджуються зі значенням  $x = x\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)$ , що дає числове інтегрування диференціального рівняння коливань (1).

Одержаний цим способом графік коливань зображено на рис. 2.

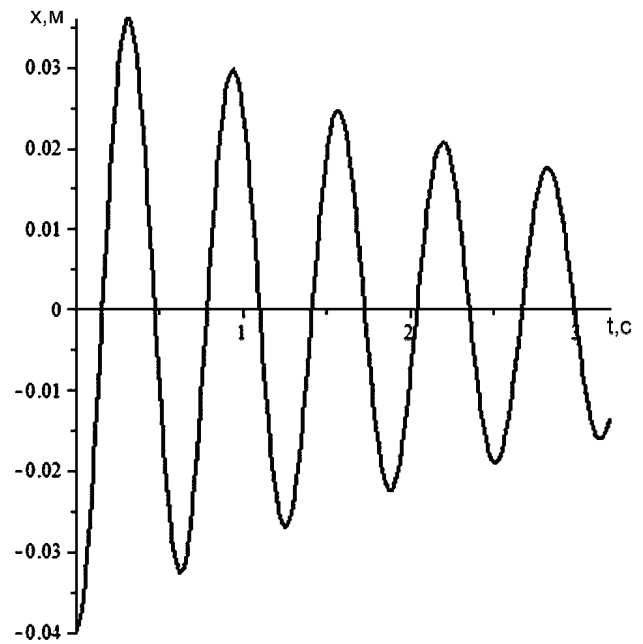


Рисунок 2 – Графік вільних коливань при  $\nu = 2$

Тут коливальний процес не обмежений у часі, бо має нескінченну кількість циклів.

**Висновки.** Методом енергетичного балансу виведено та апробовано наближені формули для розрахунку амплітуд вільних затухаючих коливань осциляторів, рівняння руху яких мають нелінійну складову в виразі сили в'язкого опору. Показано, що такі осцилятори, за певних умов, при вільних коливаннях здійснюють обмежену кількість розмахів, як і осцилятори з сухим кулоновим тертям. Встановлено умову прояву цієї аналогії, яка стосується показника степеневі нелінійності сили в'язкого опору. Вірогідність запропонованих наближених формул підтверджена узгодженістю числових результатів, до яких вони призводять, з результатами числового комп'ютерного інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху.

#### Список літератури

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Наука, 1974. 504 с.
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. – Т. 3. / под общей ред. И.А. Бергера, Я.Г. Пановко. Москва: Машиностроение, 1968. 568 с.
3. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. – Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / под ред. И.И. Блехмана. Москва: Машиностроение, 1979. 351 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний. Москва: Наука, 1980. 270 с.
5. Бурлака В.В., Ольшанський В.П., Малець О.М. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого тертя. Механізація сільськогосподарського виробництва. Вісник ХНТУСГ. Харків: ХНТУСГ, 2014. Вип. 148. С. 19-24.
6. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В., Тіщенко Л.М. та ін. Коливання дисипативних осциляторів. Харків: Міськдруку, 2015. 116 с.
7. Ольшанський В.П., Тіщенко Л.М., Ольшанський С.В. Динаміка дисипативних осциляторів. Харків: Міськдруку, 2016. 264 с.

8. *Бабаков И.М.* Теория колебаний. Москва: Дрофа, 2004. 591 с.

9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Москва: Наука, 1974. 832 с.

#### References (transliterated)

1. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asimtoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka. 1974. 504 p.

2. Prochnost', ustochivost', kolebaniya. Spravochnik v trekh tomakh. [Strength, stability, fluctuations. Handbook in three volumes]. T. 3. edited by *I.A. Berger, J.G. Panovko*. Moscow: Mechanical Engineering, 1968. 568 p.

3. Vibratsii v tekhnike. Spravochnik v shesti tomakh [Vibration in technology. Handbook in six volumes]. T. 2. Oscillations of nonlinear mechanical systems; edited by *I.I. Blekhtman*. Moscow: Engineering, 1979. 351 p.

4. *Panovko Ya.G.* Vvedeniye v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy [Introduction to the theory of mechanical vibrations].

Moscow: Nauka, 1980. 270 p.

5. *Burlaka V.V., Olshanskiy V.P., Malets O.M.* Do rokhrakhunku kolyvan' mekhanizmiv pry spil'niy diyi syl sukhoho tertya [Towards the calculation of oscillations of mechanisms under the joint action of the forces of dry friction]. Mechanization of agricultural production Visnyk KhNTUSG. Kharkiv, KhNTUSG, 2014. Vol. 148. P. 19-24.

6. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V., Tishchenko L.N.* Kolyvannya dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dissipative oscillator oscillations]. Kharkiv: Miskdruk, 2015. 116 p.

7. *Olshanskiy V.P., Tishchenko L.N., Olshanskiy S.V.* Dynamika dysypatyvnykh ostsilyatoriv [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv: Miskdruk, 2016. 264 p.

8. *Babakov I.M.* Theori of vibrations. Moscow: Drofa, 2004. 591 p.

9. *Abramovits M., Stigan I.* Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami) [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow: Science, 1979. 832 p.

10. *Janke E., Jemde F., Ljosh F.* Special'nye funktsii [Special functions]. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

11. *Korn G., Korn T.* Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) [Handbook of Mathematics (for scientific workers and engineers)]. Moscow: Science, 1974. 832 p.

*Надійшла (received) 01.11.2019*

#### *Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com