

Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСЬКИЙ, В. КОНКІН

ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ У ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті розглядається аналіз нестационарного температурного поля, яке виникає у циліндричному тілі при його індукційно-му нагріванні за допомогою зовнішнього спірального багатовиткового індуктора. Представлені результати аналітичного розв'язання за допомогою методу перетворення за Лапласом та чисельного розв'язання методом скінчених елементів.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, електромагнітне поле, індукційний нагрів, перетворення за Лапласом, метод скінчених елементів.

Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСКИЙ, В. КОНКИН

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье рассматривается анализ нестационарного температурного поля, которое возникает в цилиндрическом теле при его индукционном нагревании при помощи внешнего спирального многовиткового индуктора. Представлены результаты аналитического решения, полученного при помощи метода преобразования по Лапласу и численного решения методом конечных элементов.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, электромагнитное поле, индукционный нагрев, преобразование по Лапласу, метод конечных элементов.

H. ALTENBACH, K. NAUMENKO, D. LAVINSKY, V. KONKIN

THE PROBLEMS OF TRANSIENT HEAT TRANSFER OF ELECTROCONDUCTIVE BODIES IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

The article deals with issues related to the analysis of transient propagation of the temperature field in electrically conductive bodies under the influence of an electromagnetic field. The action of the electromagnetic field on electrically conductive bodies is manifested in two versions: the possible movement of the body and a change in its temperature in accordance with the Joule-Lenz law. The energy of the electromagnetic field is used in various technological operations, including in the sense of changing the temperature of the processed objects. The use of the temperature effect of an electromagnetic field is typical, for example, for technological operations such as induction heating. A calculated study of the unsteady temperature field in this case allows us to select rational structural and operational parameters of the technological operation. In addition, it is known that a change in body temperature leads to the appearance of thermal deformations, which makes a certain contribution to the stress-strain state and can affect the working life and durability of technological equipment. Thus, the topic of the article is relevant in practical and scientific aspects. In the analysis of real structures, the features of their geometry and operating conditions require the use of numerical analysis methods. Analytical calculation methods, which most often allow obtaining approximate results, can be used as evaluative for simplified calculation models. In technological operations of induction heating of massive cylindrical billets, a spiral multi-coil inductor is very often used. The article considers the task of analyzing the spatio-temporal distribution of temperature in a cylindrical billet, which is heated by an external multi-turn inductor. The problem is considered in an axisymmetric formulation. The spatial-temporal distribution of the basic characteristics of the electromagnetic field is preliminarily determined. An analytical solution to the problem is presented, which was obtained by the Laplace transform method, under the assumption of unlimited workpiece, its ideal electrical conductivity, as well as neglecting the real heat transfer conditions at its boundary. The numerical solution of the problem is obtained by the finite element method and is devoid of these simplifications. The analysis of the influence of the size of the inductor on the nature of the distribution of the temperature field in the workpiece is carried out.

Keywords: transient heat transfer, electromagnetic field, induction heating, Laplace transform method, finite element method.

Вступ. Дія електромагнітного поля (ЕМП) на електропровідні тіла проявляється частіше за усе у двох варіантах: рух тіла (або його деформування) та зміна температури внаслідок тепловиділення згідно до закону Джоуля-Ленца. Саме ці два прояви найчастіше використовують у відповідних технологічних операціях. За деяких умов тепловиділення є достатньо інтенсивним, що призводить до значного зростання температури, яке може бути використане у технологічних цілях. Увесь великий клас операцій, заснованих на нагріванні заготовок за допомогою зовнішнього ЕМП

прийнято називати індукційний нагрів [1-3]. Розрахункові дослідження нестационарного розподілу температури у електропровідних заготовках дозволяють визначати раціональні значення конструкційних та експлуатаційних параметрів технологічного процесу. Також відомо, що неоднорідне температурне поле призводить до термодформування елементів конструкцій, яке може впливати на їх працездатність та довговічність. Отже, тема даної роботи є актуальною у теоретичному та практичному сенсі.

Відзначимо, що елементи конструкцій реальних

технологічних та технічних систем мають доволі складну геометрію та умови експлуатації, отже, розрахункові дослідження доцільно проводити із застосуванням відповідних чисельних методів. Аналітичні методи розрахунку, які зазвичай потребують значних спрощень розрахункових схем, можуть використовуватись у деяких випадках, як оціночні.

Аналітичне розв'язання. Розглянемо задачу із визначення нестационарного температурного поля циліндричної заготовки, яка нагрівається за допомогою змінного ЕМП – рис. 1.

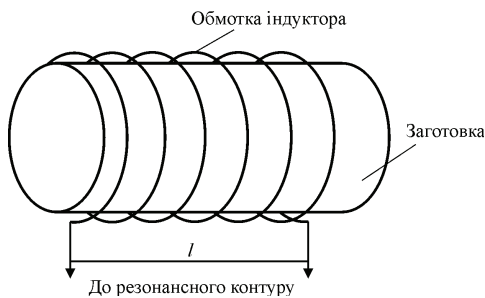


Рисунок 1 – Фізична модель процесу

При розв'язанні поставленої задачі аналітично необхідно зробити деякі припущення та спрощення:

– нехтуємо наявністю розрізу в області струмопроводів і вважаємо, що має місце осьова симетрія

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0\right);$$

– вважаємо, що індуктор є досить протяжним $\frac{l}{R_2} \gg 1$ так, що реальною неоднорідністю поля в напрямку орта \vec{e}_z можна знехтувати і вважати, що

$$\frac{\partial}{\partial z} \approx 0;$$

– вважаємо, що енергія магнітного поля, що збуджується сконцентрована у внутрішній порожнині соленоїда і на його внутрішній поверхні поздовжня z -компонента напруженості буде дорівнювати:

$$H_z^{\text{інд}} = \frac{NJ^{\text{інд}}(t)}{l^{\text{інд}}}, \text{ де } t - \text{ час, } N - \text{ кількість витків, } J^{\text{інд}}(t)$$

– струм, що збуджується, $l^{\text{інд}}$ – довжина обмотки індуктора;

– приймаємо умову квазістационарного наближення процесу, так що $\frac{\omega}{c} \cdot a \ll 1$, де ω – характерна

циклічна частота в спектрі збуджуючого струму, a – характерний розмір системи, c – швидкість світла у вакуумі. З урахуванням зроблених припущень розрахункова схема аналітичного розв'язання набуває вигляд, наведений на рис. 2.

Аналітичний розв'язок будемо відшукувати згідно до схеми перетворення за Лапласом [4]. Подібний спосіб розв'язання диференціальних рівнянь Максвела часто застосовується на практиці [5, 6]. Відповідно до прийнятих припущень і розрахункової моделі рівнян-

ня Максвела для ненульових складових напруженостей електричного та магнітного полів, перетворених за Лапласом у циліндричній системі координат з урахуванням нульових початкових умов, можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}(p, r)) = -\mu_0 p H_z(p, r); \\ -\frac{\partial H_z(p, r)}{\partial r} = \varepsilon_0 p E_{\varphi}(p, r); \\ -\frac{\partial H_z(p, r)}{\partial r} = \gamma E_{\varphi}(p, r), \end{cases} \quad (1)$$

де p – параметр перетворення Лапласа; γ – електропровідність металу заготовки. З системи диференціальних рівнянь (1) одержуємо одне диференціальне рівняння для напруженості електричного поля в середовищах з різними електрофізичними характеристиками:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}(p, r)) \right) - k_{1,2}^2(p) E_{\varphi}(p, r) = 0, \quad (2)$$

де $k_{1,2}$ – хвильові числа, $k_1(p) = \frac{p}{c}$ (для областей з діелектричним заповненням); $k_{1,2}(p) = k_2(p) = \sqrt{p\mu_0\gamma}$ (для областей зі скінченною провідністю); c – швидкість світла у вакуумі.

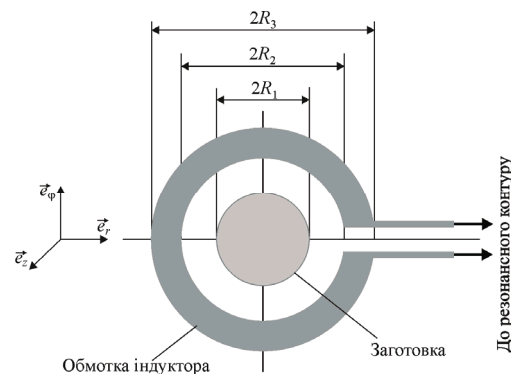


Рисунок 2 – Розрахункова схема аналітичного розв'язання

Стандартний процес розв'язання, подібний до наведених прикладів у [5, 6], в решті дозволяє одержати прямо пропорційний зв'язок між струмом збудження (у індукторі) і струмом, індуктованим в металі циліндричної заготовки, що нагрівається.

$$J(t) \approx NJ^{\text{інд}}(t). \quad (3)$$

Одержаний результат (3) свідчить про те, що величина індукovanого струму в циліндричній системі індукційного нагріву з робочими частотами до $\sim 30 \div 50$ кГц та сталевими немагнітними заготовками ($\sim 0,4 \cdot 10^7$ 1/Ом·м) з поперечними розмірами $\sim 0,01 \div 0,05$ м встановлюється виключно кількістю витків обмотки індуктора $-N$ і не залежить від часових характеристик електромагнітних процесів $-\omega$, а також від геометрії

системи, яка визначається співвідношенням $\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$.

Далі одержимо оціночні вирази для температури,

яка має місце у заготовці в результаті тепловиділення, використовуючи підхід викладений у [5]. Оціночними вони є тому, що одержані у припущенні про відсутність теплообміну. Тож вважаємо, що має місце нагрів (відповідно до закону Джоуля-Ленца) лише тієї частини заготовки, де сконцентрований індукований струм. Розвиток процесів проникнення діючих полів дозволяє вважати, що область концентрації – це «умовний» провідник з площею поперечного перерізу $S \approx \delta l$, де δ – величина скін-шару, $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu_0}}$, і довжиною $\sim 2\pi R$.

Опускаючи проміжні перетворення, в кінцевому підсумку, знаходимо приріст температури зразка за час – $\Delta t \gg \frac{2\pi}{\omega}$:

$$\Delta T^\circ \approx \Delta t \frac{2\pi}{c\rho\gamma} \left(\frac{R_1}{l} \right) \left(\frac{N J_m}{S} \right)^2, \quad (4)$$

де c – питома теплоємність, ρ – масова густина матеріалу, γ – питома електропровідність, J_m – амплітудне значення струму збудження. Дана формула (за усіх зроблених припущень та спрощень), фактично, дозволяє визначати залежність температури на поверхні протяжної заготовки у зоні, що відповідає середині коаксіального індуктора.

Чисельне моделювання. Тепер перейдемо до чисельного розв'язання, яке було проведене для розрахункової схеми, наведеної на рис. 3. Задача розв'язувалась у вісесиметричній постановці, джерелом ЕМП вважався струм, густина якого задавалась рівномірно розподіленою по перерізах витків індуктора. На першому етапі розв'язання було знайдено просторово-часові розподілення основних компонент ЕМП. Для цієї задачі розглядалась розрахункова схема, що містила індуктор, провідник та повітряне оточуюче середовище. Визначальним рівнянням для чисельного розв'язання є диференціальне рівняння для ненульової компоненти векторного магнітного потенціалу, яке витікає із загальної постановки задачі [7, 8]:

$$\frac{\partial^2 A_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} - \mu_c \gamma \frac{\partial A_\phi}{\partial t} = -\mu_0 J(t). \quad (5)$$

На зовнішніх границях середовища – Γ_1 задавались однорідні граничні умови відносно єдиної ненульової компоненти векторного магнітного потенціалу: $A_\phi = 0$. СЕ-розбиття системи (індуктор – заготовка – повітря) наведено на рис. 4, розбиття обране нерівномірним із згущенням в околі витків індуктора.

На другому етапі розглядалась задача нестационарної теплопровідності для заготовки, індуктор та оточуюче середовище (повітря) із розгляду виключалось. Просторово-часовий розподіл температури для вісесиметричної постановки задачі визначається диференціальними рівняннями:

$$K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + Q = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (6)$$

де K – коефіцієнт теплопередачі; Q – питома потуж-

ність внутрішніх джерел тепловиділення: $Q = \frac{1}{\gamma} j_\theta^2$;

j_θ – окружна компонента густини вихрового струму, яка є єдиною ненульовою у випадку розгляду вісесиметричної постановки. На граничних поверхнях заготовки розглядались умови конвекційного теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r=R_1)}{\partial r} &= \frac{\alpha}{K} [T(r=R_1) - T_\infty] \\ \frac{\partial T(z=\pm L/2)}{\partial z} &= \frac{\alpha}{K} [T(z=\pm L/2) - T_\infty] \end{aligned} \quad (7)$$

де α – коефіцієнт конвекційного теплообміну, T_∞ – температура зовнішнього середовища.

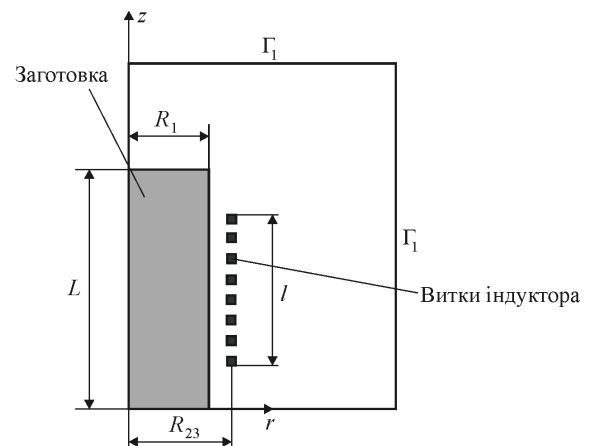


Рисунок 3 – Розрахункова схема для чисельного розв'язання

Розв'язання поставленої задачі нестационарної теплопровідності є еквівалентним задачі пошуку стаціонарного значення функціоналу температури, який є конкретизацією загального випадку:

$$\begin{aligned} \text{Tr} = \iint_S \left\{ \frac{K}{2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - QT + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T \right\} r dS + \\ + \int_{\Gamma_2} \frac{\alpha}{2} [T^2 - 2T_\infty T] r d\Gamma \end{aligned} \quad (8)$$

тут Γ_2 – границя заготовки.

Заготовка розглядалась у вигляді суцільного циліндру, виготовленого із немагнітної сталі. Характеристики матеріалу: питома електропровідність – $\gamma = 0,4 \cdot 10^6$ 1/(Ом·м); питома теплоємність – $c = 460$ Дж/(кг·град); густина речовини – $\rho = 9000$ кг/м³. Геометричні параметри заготовки: довжина – $L = 0,08$ м, радіус – $R_1 = 0,025$ м. Індуктор вважався виготовленим із міді: питома електропровідність – $\gamma = 0,4 \cdot 10^7$ 1/(Ом·м); питома теплоємність – $c = 360$ Дж/(кг·град); густина речовини – $\rho = 7500$ кг/м³. Геометричні параметри: довжина – $\ell = 0,05$ м, радіус – $R_{23} = 0,035$ м, кількість витків – 10, поперечний переріз витка – квадрат (4×4 мм). Характеристики струму у індукторі: амплітуда струму 55 А; частота струму 50 кГц.

Аналіз результатів. На першому етапі чисельного розв'язання були проведені дослідження з метою

вибору розмірів розрахункової області, які показали, що ЕМП загасає з достатнім ступенем точності на відстані $2R_{23}$ і у горизонтальному, і у вертикальному напрямках ($R_{23} = \frac{R_3 - R_2}{2}$).

Представлені результати з розподілу магнітного поля та температури наведені для моменту часу $t = 10$ с. Наведені дані із розподілу магнітного поля свідчать про його значну неоднорідність в області моделі (рис. 5), найбільші значення фіксуються у заготовці безпосередньо навпроти витків індуктора.

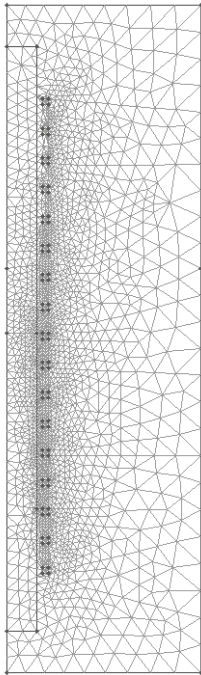


Рисунок 4 – СЕ-розбиття

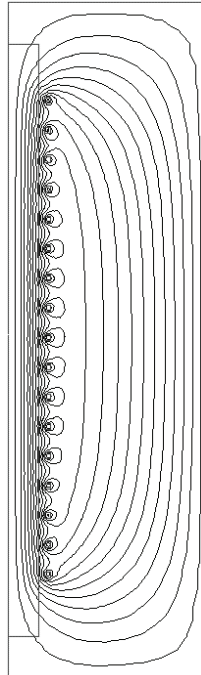


Рисунок 5 – Силві лінії магнітного поля

Відзначимо, що просторовий розподіл температури у заготовці є також суттєво неоднорідним (рис. 6), що стосується розподілу і вздовж радіальної, та осової координати, тобто припущення стосовно однорідного розподілу температури у заготовці, у яких одержано аналітичний розв'язок, є далекими від реальності. Таким чином, аналітичний розв'язок (4) може надавати лише деяку інформацію про часовий розподіл температури у середній точці поверхні заготовки, у обраній системі координат це точка (0;0). З метою порівняння аналітичних та чисельних розв'язків розглянемо графіки залежності температури від часу на поверхні заготовки (розглядаємо середину заготовки) – рис. 7.

З рисунку видно, що має місце якісне та кількісне відхилення чисельного результату від аналітичного. Формула (4), яка була одержана в припущенні про відсутність теплообміну дає лінійну залежність приросту температури від часу, натомість чисельний розв'язок свідчить про суттєву нелінійність при зростанні температури. Ця нелінійність обумовлена саме явищами теплообміну із зовнішнім середовищем (в умовах конвекційного теплообміну), а також теплопере-

дачею з іншими зонами заготовки. Таким чином, формула (4), одержана аналітично у подібних задачах може використовуватись лише з метою попереднього оцінювання достовірності результатів чисельних розрахунків.

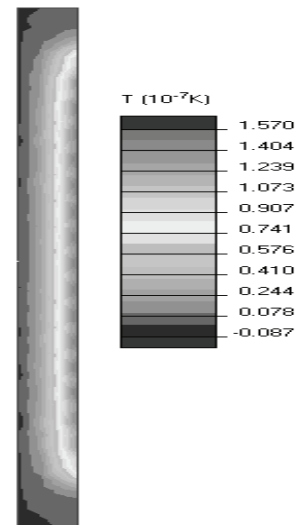
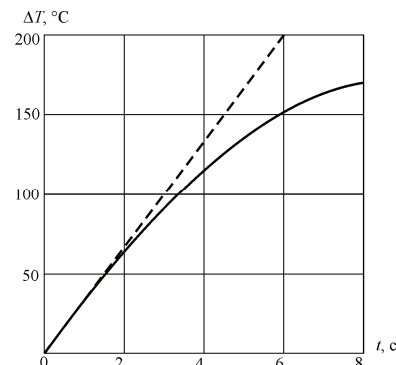
Рисунок 6 – Розподіл температури у заготовці у момент часу $t = 10$ с

Рисунок 7 – Залежність від часу температури на поверхні середини заготовки. Штрихова лінія – аналітичний розв'язок; суцільна лінія – розв'язок МСЕ

Висновки. Розглянуто розв'язання задачі нестационарної теплопровідності вісесиметричного електропровідного тіла у змінному електромагнітному полі на прикладі технологічної операції індукційного нагріву циліндричної заготовки спіральним багатовитковим індуктором. Проведене порівняння результатів аналітичних та чисельних розрахунків. Наведений підхід до створення розрахункової схеми та розв'язання методом скінчених елементів може використовуватись при аналізі нестационарного температурного поля у подібних системах.

Список литературы

1. Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А., Пашин Н.А., Савицкий В.В., Ткачук Г.И. Перераспределение остаточных сварочных напряжений при обработке импульсным электромагнитным полем. Проблемы прочности. 2011. № 3. С. 123-131.
2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.

3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). С. 269-275.

4. Араманович И. Г. Уравнения математической физики. Рипол Классик. 1964.

5. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И. Магнитно-импульсная обработка тонкостенных металлов. Харьков: Изд. МОСТ-Торнадо, 2002. 284 с.

6. Батыгин Ю.В., Лавинский В.И., Хименко Л.Т. Импульсные магнитные поля для прогрессивных технологий. 2003.

7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

8. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of Materials. 2016. Vol. 48. No. 6. P. 760-767.

Bibliography (transliterated)

1. Stepanov G.I., Babytskii A.I., Mameev I.A., Paschin N.A., Savickii V.V., Tkachuk G.I. Pereraspredelenie ostatoch-

nykh napryazhenii pri obrabotke impulsnym electromagnitnym polem. Problemy prochnosti. 2011. № 3. P. 123-131.

2. Rudnev V., Loveless D., Cook R.L. Handbook of induction heating. CRC press. 2017.

3. Doležel I., Barglik J., Ulrych B. Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.

4. Aramanovich I.G. Uravneniya matematicheskoy fiziki. Ripol Klassik. 1964.

5. Batugin Yu.V., Lavinsky V.I. magnitno-impulsnaya obrabotka tonkostennykh metallov. Kharkiv: Izd. «MOST-Tornado», 2002. 284 p.

6. Batugin Yu.V., Lavinsky V.I., Khimenko L.T. Impulsnye magnitnye polya dlya progressivnykh tekhnologii. 2003.

7. Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D. Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

8. Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K. Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of Materials. 2016. Vol. 48. No. 6. P. 760-767.

Поступила (received) 01.10.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Альтенбах Хольм (Альтенбах Хольм, Altenbach Holm) – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина (Prof. Dr.-Ing.habil.Dr.h.c.mult., Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Magdeburg, Germany), e-mail: holm.altenbach@ovgu.de

Науменко Костянтин (Науменко Константин, Naumenko Konstantin) – доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина (Prof. Dr.-Ing.habil., Otto-von-Guericke University of Magdeburg, Magdeburg, Germany.), e-mail: konstantin.naumenko@ovgu.de

Лавінський Денис (Лавинский Денис, Lavinsky Denis) – кандидат технічних наук, доцент, кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Конкін Валерій (Конкин Валерий, Konkın Valerii) – кандидат технічних наук, професор, кафедра механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, НТУ «ХПІ», e-mail: 1956kvn@gmail.com