УДК 534.1:539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187417

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОГО УДАРУ ТВЕРДИХ ТІЛ

Аналітичний розв'язок узагальненої задачі механічного удару двох пружних тіл обертання в постановці Г. Герца виражено через періодичний Ateb-синус і його степені. Виведено формули для розрахунку зміни у часі зближення центрів мас тіл, сили ударної взаємодії, радіуса площадки контакту та тиску в її центрі. Одержано компактні формули максимумів вказаних величин, які досягаються в кінці процесу динамічного стискання тіл. Виведена також формула тривалості удару в часі. Відзначено, що тривалість залежить від порядку граничних поверхонь тіл, підданих удару. Для врахування місцевих контактних деформацій тіл в зоні їх взаємодії використано узагальнений розв'язок осесиметричної контактної задачі теорії пружності, побудований І.Я. Штаєрманом для випадку, коли тверді тіла обмежені поверхнями, що мають порядок більший другого. Показано, що із одержаних теоретичних результатів, які стосуються щільного дотику тіл, підданих удару, як окремий випадок, випливають відомі класичні результати, одержані Г. Герцем. Отримано формулу визначеного інтегралу від степені Ateb-синуса, що виражає ударний імпульс. Розглянуто приклад пружного удару тіл, одне з яких обмежене поверхнею четвертого порядку. Для обчислення значень Ateb-синуса рекомендовано використовувати його апроксимацію елементарними функціями. Показано, що числові результати, одержані за допомогою аналітичного розв'язку, з використанням цієї апроксимації, добре узгоджується з результатами числового інтегрування рівняння удару на комп'ютері. Досліджено вплив геометричних характеристик граничних поверхонь на розрахункові параметри удару, що відбувається з невеликою початковою швидкістю. Враховуючи симетрію характеристик пружного удару, відносно часу їх максимумів, для розрахунку процесу динамічного розтискання тіл, рекомендовано використовувати аналітичні розв'язки, побудовані для етапу стискання тіл. Викладена теорія стосується виключно пружного удару, коли динамічне стискання не призводить до появи пластичних деформацій. Це накладає суттєве обмеження на початкову швидкість удару.

Ключові слова: пружний контактний удар, місцеві деформації, граничні поверхні високих порядків, аналітичний розв'язок, Ateb-синус і його апроксимація елементарними функціями.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОГО УДАРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Аналитическое решение обобщенной задачи механического удара двух упругих тел вращения в постановке Г. Герца выражено через периодический Ateb-синус и его степени. Выведено формулы для расчета изменения во времени сближения центров масс тел, силы ударного взаимодействия, радиуса площадки контакта и давления в ее центре. Получено компактные формулы максимумов указанных величин, которые достигаются в конце процесса динамического сжатия тел. Выведена также формула продолжительности удара во времени. Отмечено, что продолжительность зависит от порядка граничных поверхностей тел, подвергнутых удару. Для учета местных контактных деформаций тел в зоне их взаимодействия использовано обобщенное решение контактной задачи теории упругости, построенное И.Я. Штаерманом для случая, когда твердые тела ограничены поверхностями, что имеют порядок больший второго. Показано, что из полученных теоретических результатов, которые относятся к плотному касанию тел, подверженных удару, как частный случай, следуют известные классические результаты, полученные Г. Герцем. Получена формула определенного интеграла от степени Ateb-синуса, которая выражает ударный импульс. Рассмотрен пример упругого удара тел, одно из которых ограничено поверхностью четвертого порядка. Для вычисления значений Ateb-синуса рекомендовано использовать его аппроксимацию элементарными функциями. Показано, что числовые результаты, полученные с помощью аналитического решения, с использованием указанной аппроксимации, хорошо согласуется с результатами численного интегрирования уравнения удара на компьютере. Исследовано влияние геометрических характеристик граничных поверхностей на расчетные параметры удара, который происходит с небольшой начальной скоростью. Учитывая симметрию характеристик упругого удара во времени, для расчета процесса динамического разжатия тел рекомендовано использовать аналитические решения, построенные для этапа сжатия тел. Изложенная теория касается исключительного упругого удара, когда динамическое сжатие не приводит к появлению пластических деформаций. Это налагает существенное ограничение на начальную скорость удара.

Ключевые слова: упругий контактный удар, местные деформации, граничные поверхности высоких порядков, аналитическое решение, Ateb-синус и его аппроксимация элементарными функциями.

V.P. OLSHANSKIYY

ANALYTICAL SOLUTION OF THE GENERALIZED PROBLEM OF ELASTIC IMPACT OF SOLIDS

The analytical solution of the generalized problem of mechanical shock of two elastic bodies of revolution in the formulation of H. Hertz is expressed through the periodic Ateb-sine and its degrees. The formulas for calculating the time variation of the convergence of the centers of mass of bodies, the force of the shock interaction, the radius of the contact area and the pressure at its center are derived. Compact formulas for the maxima of these quantities are obtained, which are achieved at the end of the process of dynamic compression of bodies. The formula for the duration of the impact in time is also derived. It is noted that the duration depends on the order of the boundary surfaces of the bodies subjected to impact. To account for regional informational deformations of bodies in the zone of their interaction, a generalized solution of the contact problem of the theory of elasticity, constructed by I.Ya. Shtaermann for the case when solids are bounded by surfaces that have an order greater than the second. It is shown that from the obtained theoretical results, which relate to the dense contact of bodies subject to impact, as a special case, the well-known classical results obtained by H. Hertz follow. The formula of a definite integral of the degree of Ateb-sine, which expresses the shock pulse, is obtained. An example of elastic impact of bodies, one of which is limited to a fourth-order surface, is considered. To calculate the values of the Ateb-sine, it is recommended to use its approximation by elementary functions. It is shown that the numerical results obtained using an analytical solution, using this approximation, agree well with the results of numerical integration of the impact equation on a computer. The influence of the geometric characteristics of the boundary surfaces on the design parameters of the impact, which occurs with a small initial velocity, is investigated. Taking into account the symmetry of the characteristics of elastic impact in time, it is recommended to use analytical solutions built for the stage of compression of bodies to calculate the process of dynamic unclamping of bodies. The theory presented deals with exceptional elastic impact, when dynamic compression does not lead to plastic deformations. This imposes a significant limitation on the initial impact velocity.

Keywords: elastic contact shock, local deformations, boundary surfaces of high orders, analytical solution, Ateb-sine and its approximation by elementary functions.

Вступ. Із поширених теорій удару лише дві Г. Герца [1, 2] та М.О. Кільчевського [3, 4] дають можливість обчислювати тривалість удару в часі та зусилля, які виникають при динамічному стисканні тіл. У решті теорій удар вважають миттєвим і використана не сила динамічної взаємодії, а імпульс сили. Застосування Ateb-функцій в теорії механічного удару створює можливість одержати розгортку процесу в часі. Саме така можливість реалізована в [5], де розглянуто удар двох пружних куль, в припущенні, що їх місцеві деформації описуються класичним розв'язком контактної задачі теорії пружності, що належить Г. Герцу. Таке припущення втрачає сенс, коли виступи тіл, в зоні їх динамічної взаємодії обмежені поверхнями не другого, а більш високих порядків або мають кутову точку. Тому доцільно узагальнити результати, одержані в [5], на випадок більш щільного контакту тіл, підданих удару, чим і зумовлена мета роботи.

Метою статті є математичне моделювання процесу механічного удару двох пружних тіл, у яких граничні поверхні в зоні взаємодії можуть мати не лише другий, а і більш високі порядки.

Поставка задачі та її розв'язок. Як і в теорії І.Я. Штаєрмана [6], припускаємо, що в області ударної взаємодії тіла обмежені поверхнями обертання $z_1 = f_1(\mathrm{r})$ і $z_2 = -f_2(\mathrm{r})$, причому вісь симетрії $r = 0$ проходить по лінії дії динамічних стискаючих сил (див. рис. 1).

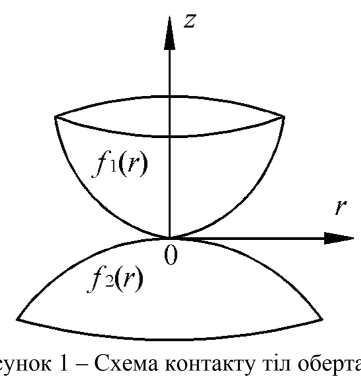

Рисунок 1 – Схема контакту тіл обертання

Нехай при $r = 0$ відмінні від нуля похідні $f_1(\mathrm{r})$ і $f_2(\mathrm{r})$, починаючи з їх $2n$-го порядку, тобто [6]:

$$f_1^{(j)}(0) = f_2^{(j)}(0) = 0 \text{ при } j < 2n,$$

а

$$f_1^{(2n)}(0) + f_2^{(2n)}(0) = (2n)!A,$$

де A деяка позитивна стала; $n = 1,2,...$

За цих припущень, як і в теорії Г. Герца, відносне зближення центрів мас тіл $x(t)$ в ході пружного удару описуємо диференціальним рівнянням:

$$M\ddot{x} + \beta x^{\alpha} = 0, \tag{1}$$

у якому $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\alpha = \dfrac{2n+1}{2n}$;

$$\beta = \frac{4n}{(2n+1)(Q_1 + Q_2)} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!A} \right)^{\frac{1}{2n}}; \tag{2}$$

де $Q_1 = \dfrac{(1-\nu_1^2)}{E_1}$; $Q_2 = \dfrac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$;

m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі;

E_1, ν_1 і E_2, ν_2 – відповідно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона їх матеріалів; крапка над x означає похідну за часом t.

На думку автора монографії [1] рівняння (1) може також описувати і пружно-пластичний удар тіл, якщо константи α і β визначити емпіричним шляхом, у випадку коли пластичне деформування охоплює невелику область.

Для пружного удару двох куль з радіусами R_1 і R_2: $n = 1$, $f_1^{(2)}(0) = \dfrac{1}{R_1}$; $f_2^{(2)}(0) = \dfrac{1}{R_2}$; $A = \dfrac{1}{2}\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$ із виразів (2) випливає, що:

$$\alpha = 3/2; \quad \beta = \frac{4}{3(Q_1 + Q_2)}\sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Такі значення α і β були використані в [5], у відповідності з теорією контактних деформацій Г.Герца.

Розв'язок рівняння (1) будуємо при початкових умовах:

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \upsilon_0, \tag{3}$$

де υ_0 – швидкість ударного зіткнення тіл.

Щоб одержати перший інтеграл рівняння (1) перетворимо його до вигляду:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\beta}{M}x^{\alpha}.$$

Подальшим інтегруванням його отримуємо з точністю до сталої c_1:

$$\dot{x} = \frac{d\,x}{d\,t} = \sqrt{c_1 - \frac{2\beta}{M}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\,.$$

Початкові умови (3) виконуються, коли $c_1 = \upsilon_0^2$. Тому:

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{2\beta}{M}\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}}\,. \qquad (4)$$

В момент максимального стискання: $t = t_c$, $x = x_c$, швидкість зближення тіл $\dot{x}(t_c) = 0$. Для цього моменту часу із (4) отримуємо:

$$x_c = \left(\frac{M\upsilon_0^2}{2}\frac{\alpha+1}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \qquad (5)$$

У випадку $n = 1$; $\alpha = 3/2$ формула (5) набуває вигляд:

$$x_c = \left(\frac{5M\upsilon_0^2}{4\beta}\right)^{2/5},$$

що узгоджується з [2, 5].

У відповідності з (3) і (4) другим інтегралом рівняння (1) є:

$$\int_0^x \frac{d\,y}{\sqrt{\upsilon_0^2 - \frac{2\beta}{M}\frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1}}} = t\,. \qquad (6)$$

Переходом до нової безрозмірної змінної інтегрування $u = \dfrac{y}{x_c}$, замість (6), отримуємо:

$$\int_0^{x/x_c} \frac{d\,u}{\sqrt{1-u^{\alpha+1}}} = \frac{\upsilon_0 t}{x_c}\,.$$

Тут верхня межа інтегрування виражається через Ateb-синус [7, 8]. Тому зближення центрів мас тіл при їх стисканні описується виразом:

$$x(t) = x_c \cdot \mathrm{Sa}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right), \qquad (7)$$

який узагальнює розв'язок, одержаний в [5], де $\alpha = 3/2$.

Формула (7) дає можливість отримати і розгортку в часі сили удару $P(t)$, бо:

$$P(t) = \beta[x(t)]^\alpha = \beta\, x_c^\alpha \left[\mathrm{Sa}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^\alpha. \qquad (8)$$

Максимум сили удару досягається в кінці процесу стискання і становить:

$$P_c = \beta\, x_c^\alpha = \beta\left(\frac{M\upsilon_0^2}{2}\frac{\alpha+1}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}. \qquad (9)$$

Із (9), при $\alpha = 3/2$, випливає відомий результат [2].

Використовуючи (8) та розв'язок з роботи [6], знаходимо, що радіус кругової площадки контакту змінюється за законом:

$$a(t) = \left[\frac{1}{4n}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{Q_1+Q_2}{A}P(t)\right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Зміна тиску в центрі цієї площадки описується виразом:

$$\max p = p(0,t) = \frac{2n+1}{2(2n-1)}\frac{P(t)}{\pi\, a^2(t)}\,.$$

Ці величини теж пов'язані з обчисленням Ateb-синуса, бо виражається його степенями.

Процес стискання закінчується при $t = t_c$, що є коренем рівняння:

$$\mathrm{Sa}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t_c}{x_c}\right) = 1\,.$$

Цей корінь визначається інтегралом:

$$\frac{\upsilon_0 t_c}{x_c} = I = \int_0^1 \frac{d\,u}{\sqrt{1-u^{\alpha+1}}}\,,$$

який виражається через Гама-функцію $\Gamma(z)$, затабульовану в [9, 10], по формулах [11]:

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2\alpha+2}\right)}\,.$$

Тому тривалість у часі процесу стискання становить:

$$t_c = \frac{x_c}{\upsilon_0}\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha+1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{2\alpha+2}\right)}\,. \qquad (10)$$

Вона залежить від α або порядку n-граничних поверхонь.

Якщо прийняти до уваги, що $\Gamma(0{,}4) \approx 2{,}21825$, а $\Gamma(0{,}9) \approx 1{,}06867$, то при $\alpha = 3/2$ ($n = 1$) одержимо:

$$t_c \approx 1{,}4716\frac{x_c}{\upsilon_0}, \qquad (11)$$

що відповідає теорії Г. Герца [2]. Отже, залежність (10) узагальнює відому формулу (11).

Використовуючи (8) і (10) можна знайти ударний імпульс:

$$S(P) = 2\int_0^{t_c} P(t)d\,t = 2P_c\int_0^{t_c}\left[Sa\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^\alpha d\,t\,.$$

У відповідності з (1), (7):

$$\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^\alpha = \frac{x^\alpha}{x_c^\alpha} = -\frac{M}{\beta\, x_c^\alpha}\ddot{x}\,.$$

Тоді:

$$\int_0^{t_c}\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha, 1, \frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^\alpha d\,t = -\frac{M}{\beta\, x_c^\alpha}\dot{x}\Big|_{t_c}^{0}\,.$$

Оскільки $\dot{x} = \upsilon_0\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_c}\right)^{\alpha+1}}$, $\dot{x}(0) = \upsilon_0$; $\dot{x}(t_c) = 0$, то

$$\int\limits_0^{t_c}\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^{\alpha} d\,t=\frac{M\upsilon_0}{\beta\,x_c^{\alpha}}=\frac{M\upsilon_0}{P_c}\,. \qquad (12)$$

Цей результат можна було б отримати й іншим шляхом, а саме, користуючись відомою теоремою про зміну кількості руху.

Переходом в (12) до нової змінної інтегрування $\xi=\dfrac{\upsilon_0 t}{x_c}$, з урахуванням (5), отримуємо:

$$\int\limits_0^{I}\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\xi\right)\right]^{\alpha} d\,\xi=\frac{M\upsilon_0^2}{\beta\,x_c^{\alpha+1}}=\frac{2}{\alpha+1}\,, \qquad (13)$$

що спрощує обчислення інтегралів від степенів Ateb-синуса.

Далі, користуючись теоремою про зміну кінетичної енергії:

$$\int\limits_0^{t_c}P(t)\dot{x}(t)d\,t=\frac{1}{2}M\upsilon_0^2$$

та виразом (4), легко довести, що:

$$\int\limits_0^{I}\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\xi\right)\right]^{\alpha}\sqrt{1-\left[\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\xi\right)\right]^{\alpha+1}}\,d\xi=\frac{1}{\alpha+1} \qquad (14)$$

У випадку, коли: $\alpha=1$, $\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\dfrac{1+\alpha}{2}\xi\right)=\sin\xi$; $I=\pi/2$ із (13), (14) випливають загальновідомі квадратури:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sin\xi\,d\,\xi=1\,;\quad \int\limits_0^{\pi/2}\sin\xi\,\sqrt{1-\sin^2\xi}\;d\,\xi=\frac{1}{2}\,.$$

Вирази (13), (14) зберігають чинність, якщо в них замість $\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\dfrac{1+\alpha}{2}\xi\right)$ записати $\mathrm{Ca}\left(\alpha,1,\dfrac{1+\alpha}{2}\xi\right)$, тобто вони стосуються і Ateb-косинуса.

При $t>t_c$ проходить розтискання тіл. Одержані вище розв'язки будуть описувати і цей процес, якщо в них замінити:

$$\mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\ \text{на}\ \mathrm{Sa}\left(\alpha,1,\frac{1+\alpha}{2}\left(2I-\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right).$$

Графіки $x(t)$ і $P(t)$ симетричні відносно вертикалі $t=t_c$. Тривалість удару $t_y=2t_c$, бо тривалості процесів стискання і розтискання однакові.

З метою апробації одержаних розв'язків, розглянемо удар тіла, обмеженого поверхнею обертання $z_1=A\,r^4$, з пружним півпростором, що має плоску граничну поверхню. Для цього випадку $n=2$; $\alpha=\dfrac{5}{4}$. Матеріалом півростору та тіла, що вдаряє по ньому, вибираємо сталь: $E_1=E_2=2\cdot10^{11}$ Па; $\nu_1=\nu_2=0{,}25$. Для вказаного матеріалу, при $A=500$ 1/м³, коефіцієнт $\beta=2{,}82432\cdot10^{10}$ Па·м$^{3/4}$. Обчислимо основні параметри удару, коли $m_1=6$ кг, $m_2=\infty$, $\upsilon_0=8$ м/с. Для них максимум стискання тіл становить: $x_c=0{,}0003361$ м, а максимум сили удару дорівнює $P_c=1285285{,}3$ Н. Щоб знайти тривалість процесу удару приймемо до уваги, що $\Gamma(4/9)\approx1{,}99289$, а $\Gamma(17/18)\approx1{,}03529$. За цих значень Гама-функції: $t_y=2t_c=0{,}0001274$ с. Обчислені по (7) відношення $\dfrac{x(t)}{x_c}$ у різні моменти часу t/t_c записано в табл. 1. Поряд вказано результати, до яких призводить числове інтегрування рівняння (1) на комп'ютері. Значення Ateb-синуса знаходили за наближеною формулою, яка є окремим випадком більш загальної залежності в [11]:

$$\mathrm{Sa}\left(\frac{5}{4},1,\frac{9}{8}\eta\right)\approx\begin{cases}\eta & 0\le\eta<0{,}2\\ 0{,}1999+1{,}0133(\eta-0{,}2)-0{,}2213(\eta-0{,}2)^2 \quad \text{при} & 0{,}2\le\eta\le0{,}8\\ 1-1{,}6\cdot\sin^2\left[0{,}5929\cdot(I-\eta)\right] & 0{,}8<\eta\le I,\end{cases}$$

де $I=1{,}5164$.

Таблиця 1 – Обчислені двома способами значення $x(t)$

$\dfrac{t}{t_c}$	$\eta=\dfrac{\upsilon_0 t}{x_c}$	$\dfrac{x(t)}{x_c}$, форм. (7)	$\dfrac{x(t)}{x_c}$, числ. інтегр.
0,00	0,0000	0,0000	0,0000
0,25	0,3791	0,3743	0,3726
0,50	0,7582	0,6966	0,6974
0,75	1,1373	0,9205	0,9205
1,00	1,5164	1,0000	1,0000

Порівняння показує, що одержані двома способами числові результати добре узгоджуються між собою, що підтверджує, вірогідність аналітичного розв'язку.

З'ясуємо далі як зміняться розрахункові характеристики удару зі збільшенням геометричного параметру A. Обчислені x_c, P_c і t_y для різних A наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – Максимуми зближення тіл і зусилля удару при різних A

A, м$^{-3}$	$10^4\,x_c$, м	P_c, Н	$10^4\,t_y$, с
500	3,361	1285285,3	1,274
1000	3,630	1189979,8	1,376
2000	3,921	1101907,1	1,486
4000	4,235	1020253,3	1,605

Розрахунки показують, що зі збільшенням геометричного параметру A збільшуються максимум зближення центрів мас тіл і тривалість удару та зменшується максимум сили удару. Отже, параметри удару залежать від форми граничної поверхні тіл в зоні їх контакту. В межах вказаної точності обчислень добуток $P_c \cdot t_y \approx \mathrm{const}$, що є наслідком сталого ударного імпульсу в розглянутому прикладі.

Висновки. Викладена теорія дає можливість розрахувати параметри удару пружних тіл, обмежених поверхнями обертання, порядок яких не менший, ніж другий. Узгодженість числових результатів, до яких вона призводить, з результатами числового комп'ютерного інтегрування нелінійної задачі Коші, підтверджує вірогідність побудованих аналітичних розв'язків. Вони можуть бути використані і для розрахунку пружно-пластичного удару, якщо константи в диференціальному рівнянні стискання визначати емпіричним шляхом, за умови, що пластичне деформування охоплює невелику область в зоні ударної взаємодії тіл.

Список літератури

1. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. Москва: Стройиздат, 1965. 447 с.

2. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механического удара. Москва: Наука, 1977. 223 с.

3. *Кильчевский Н.А.* Теория соударений твердых тел. Киев: Наукова думка, 1969. 247 с.

4. *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1976. 319 с.

5. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.* Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар. Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. Харків: НТУ «ХПІ», 2018. № 3 (1279). С. 98-103.

6. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 272 с.

7. *Грицик В.В., Назаркевич М.А.* Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій. Доповіді Національної академії наук України. Київ, 2007. № 12. С. 37-42.

8. *Пукач П.Я.* Якісні методи дослідження нелінійних коливань систем. Львів : Львівська політехніка, 2014. 288 с.

9. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва: Наука, 1979. 832 с.

10. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Москва: Наука, 1977. 344 с.

11. *Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.* Про рух осцилятора зі степеневою характеристикою пружності. Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал. Вінниця, 2017. № 3 (86). С. 34-40.

References (transliterated):

1. *Goldsmith W.* Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies. Moscow: Stroyizdat, 1965. 447 p.

2. *Panovko Y.G.* Introduction to the theory of mechanical shock. Moscow: Nauka, 1977. 223 p.

3. *Kilchevsky N.A.* Theory of solid collisions. Kyyiv: Naukova Dumka, 1969. 247 p.

4. *Kilchevsky N.A.* Dynamic contact compression of solids. Blow. Kyyiv: Naukova Dumka, 1976. 319 p.

5. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* Ateb-sine in solving the Hertz problem. Bulletin of NTU «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018. No 3 (1279). P. 98-103.

6. *Shtaerman I.Ya.* Contact problem of the theory of elasticity. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949. 272 p.

7. *Gricik V.V., Nazarkevich M.A.* Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij. Dopovidi Nacional'noï akademiï nauk Ukraïni. Kyyiv: 2007. No 12. P. 37-42.

8. *Pukach P.Ya.* Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillation systems. Lviv: Lviv Polytechnic, 2014. 288 p.

9. *Abramovits M., Stigan I.* Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

10. *Janke E., Jemde F., Ljosh F.* Special'nye funkcii. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

11. *Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V.* On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity. Vibrations in technics and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2017. No 3 (86). P. 34-40.

Надійшла (received) 30.05.2019.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com