УДК 539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187409

Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВІНСЬКИЙ, В. КОНКІН

ВАРІАЦІЙНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ У ЕЛЕКТРОМАГНІТНОМУ ПОЛІ

У статті поставлено проблему зв'язаного аналізу розподілу електромагнітного та теплового поля, а також напружено-деформованого стану електропровідного тіла. Наведено відповідні функціонали, стаціонарність яких забезпечує знаходження розв'язку. Надані у загальному вигляді системи визначальних рівнянь.

Ключові слова: напружено-деформований стан, варіаційна постановка задачі, метод скінчених елементів, електромагнітне поле, теплове поле, електромагнітні сили.

Х. АЛЬТЕНБАХ, К. НАУМЕНКО, Д. ЛАВИНСКИЙ, В. КОНКИН

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТЕРМОДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

В статье поставлена проблема связанного анализа распределения электромагнитного и теплового поля, а также напряженно-деформированного состояния электропроводного тела. Приведены соответствующие функционалы, стационарность которых обеспечивает нахождение решения. Представлены в общем виде системы разрешающих уравнений.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, вариационная постановка задачи, метод конечных элементов, электромагнитное поле, тепловое поле, электромагнитные силы.

H. ALTENBACH, K. NAUMENKO, D. LAVINSKY, V. KONKIN

VARIATIONAL FORMULATION OF THE THERMAL DEFORMATION PROBLEMS OF ELECTRICALLY CONDUCTIVE BODIES IN AN ELECTROMAGNETIC FIELD

The paper discusses issues concerning the thermal deformation of electrically conductive bodies under the action of the electromagnetic field. Similar problems arise, for example, in the analysis of induction heating processes. Transient electromagnetic field leads to heat release in electrically conductive bodies, and the change in temperature fields leads to a change of stress-strain state of a body. The creation of methods for the quantitative analysis of the stress-strain state of bodies under the action of an electromagnetic field is an urgent scientific problem because such an analysis allows us to evaluate the performance and durability of various structural elements. The modern approach dictates the need to consider three related problems: the problem of spatio-temporal distribution analysis of the electromagnetic field, transient heat-transfer problem and the problem of stress-strain analysis. The analysis of real technical and technological systems can only be done using appropriate numerical methods. In this case, the most universal is the finite element method, which has proven itself both in the analysis of the deformable bodies mechanics and in the analysis of various multiphysical problems. The usage of the finite element method requires an appropriate mathematical formulation of the problem. The mathematical problem formulation in variational form is considered in this article. Examples of corresponding functionals that allow finding solutions to a problem by finite element method are presented in the article. The functionals describing the transient distribution of the electromagnetic field are constructed based on the using of the concept of scalar electric and vector magnetic potentials. The influence of the electromagnetic field on the temperature distribution and the deformation process is taken into account by introducing distributed heat sources and distributed electromagnetic forces. The operation of varying the solution functions – potentials, temperature and displacements – makes it possible to obtain a system of resolving algebraic equations of the finite element method.

Key words: stress-strain state, variational problem formulation, finite element method, electromagnetic field, temperature field, electromagnetic forming.

Вступ. Енергія електромагнітного поля (ЕМП) використовується у багатьох галузях промисловості. Дія ЕМП на електропровідне тіло проявляється у виникненні розподілених електромагнітних сил та розподілених джерел тепловиділення (як наслідок закон Джоуля-Ленца про тепловиділення при протіканні електричного струму), які призводять до змін у тепловому полі тіла. За деяких умов тепловиділення є достатньо інтенсивним, що призводить до значного зростання температури, яке може бути використане у технологічних цілях. Увесь великий клас операцій, заснованих на нагріванні заготовок за допомогою зовнішнього ЕМП прийнято називати індукційний нагрів [1-3]. Також спільним при подібних операціях є наявність індуктора (джерела ЕМП) та електропровідної заготовки, де збуджуються вихрові струми та відбувається тепловиділення. Індукційний нагрів може проводитись із метою зниження рівня залишкових напружень, впливу на механічні властивості (наприклад, для зменшення межі текучості та модуля пружності), також він використовується у багатьох технологічно-ремонтних операціях. Індукційний нагрів може проводитись за допомогою різних типів індукторів: плоскі одно- та багатовиткові, циліндричні та ін. Так само здійснюється вплив на різноманітні типи заготовок, плоскі, тонкі, об'ємні. Забезпечення довговічності та працездатності технологічного оснащення систем індукційного нагріву неможливе без вивчення закономірностей розподілу ЕМП, теплового поля, а також полів напружень та деформацій. Таке вивчення повинне базуватись результатах кількісного аналізу відповідних процесів, тому створення ефективних розрахункових методів кількісного аналізу ЕМП, теплового поля, а також напружено-деформованого стану (НДС) є актуальною задачею у науковому та практичному сенсі.

Математична реалізація. У роботах [4-6] надано повну математичну постановку задач аналізу розповсюдження ЕМП та теплового поля, а також аналізу термо-пружно-пластичного деформування систем контактуючих тіл. Відзначимо, що при розрахунках реальних технічних та технологічних систем всебічний аналіз може проводитись лише із застосуванням чисельних методів. Найбільш поширеним з яких є метод скінчених елементів (МСЕ). Реалізація МСЕ спирається на варіаційні постановки відповідних задач.

Перший етап розв'язання передбачає знаходження просторово-часових розподілів основних векторних компонентів ЕМП. В першу чергу, зменшимо кількість характеристик, які описують розповсюдження ЕМП. Для цього введемо до розгляду векторний магнітний $\vec{A}$ та скалярний електричний φ потенціали:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0; \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi . \qquad (1)$$

де $\vec{B}, \vec{E}$ – вектори магнітної індукції та напруженості електричного поля. Тоді система фундаментальних рівнянь Максвела із використанням понять про векторний та скалярний потенціали зводиться до двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \dot{\vec{u}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \dfrac{1}{\gamma} \vec{\nabla} \times \dfrac{1}{\mu_c}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \vec{\nabla}\varphi = \vec{J}; \\ \vec{\nabla} \cdot \left[\gamma\left(-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{u}} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)\right] = \rho_e. \end{cases} \qquad (2)$$

де γ, μ_c – електропровідність та магнітна проникність матеріалу,

$\vec{J}, \rho_e$ – вектор густини сили струму та густина розподіленого електричного заряду,

$\dot{\vec{u}}$ – вектор швидкості точки тіла. Наведена система дозволяє аналізувати розподіл ЕМП у рухомих електропровідних тілах, електрофізичні властивості яких є змінними (в залежності від температури тіла (електропровідність та магнітна проникність) та в залежності від рівня напруженості магнітного поля (магнітна проникність для магнетиків)).

Для векторного магнітного та скалярного електричного потенціалів формулюються початкові умови:

$$\vec{A}(0) = 0; \varphi(0) = 0. \qquad (3)$$

Якщо початкові умови для потенціалів формулюються ідентично, то граничні умови мають деякі розбіжності. Якщо ні на якій границі тіла не задані компоненти ЕМП, то у цьому випадку слід розглядати тіло разом із оточуючим середовищем і моделювати загасання ЕМП на віддаленні, тобто граничні умови можуть бути записані:

$$\vec{A}\Big|_\infty = 0; \; \varphi\Big|_\infty = 0. \qquad (4)$$

У випадку, коли на якійсь границі тіла задано компоненти ЕМП, то (у квазістаціонарному випадку) граничні умови для потенціалів мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}\right|_\Gamma = -E_{\Gamma i}, \quad i = 1,2,3; \\ &\left.\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\right|_\Gamma = B_{\Gamma k}, \quad i \neq j \neq k = 1,2,3. \end{aligned} \qquad (5)$$

де позначка Г означає приналежність відповідної величини до границі тіла.

У випадку нехтування рухом електропровідного тіла, а також змінності його електрофізичних характеристик система (2) спрощується до вигляду:

$$\gamma = \text{const}; \quad \mu = \text{const};$$

$$\dot{\vec{u}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \dfrac{1}{\mu_c \gamma} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) + \vec{\nabla}\varphi = \vec{J}; \\ \Delta\varphi = \rho_e. \end{cases} \qquad (6)$$

У даному випадку друге рівняння системи може бути розв'язаним незалежно від першого, тобто задача розділяється на два кроки: знаходження скалярного електричного потенціалу, потім знаходження векторного магнітного потенціалу. Для знаходження векторного магнітного потенціалу достатньо знайти його компоненти, тобто необхідно представити перше з рівнянь (6) по компонентах, одержуємо усього чотири скалярні рівняння, для яких можуть бути сформульовані відповідні функціонали і розв'язок задачі про розподіл ЕМП знаходиться з умови їх стаціонарності. Самі функціонали мають вигляд:

$$ELEC = \int_V \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - \rho_e \varphi\right] dV. \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} MAG_{(x)} &= \int_V \left[\begin{matrix} \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}\right)^2\right\} + \\ + \varphi \cdot A_x + \mu\gamma \dfrac{\partial A_x}{\partial t} A_x \end{matrix}\right] dV; \\ MAG_{(y)} &= \int_V \left[\begin{matrix} \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)^2\right\} + \\ + \varphi \cdot A_y + \mu\gamma \dfrac{\partial A_y}{\partial t} A_y \end{matrix}\right] dV; \\ MAG_{(z)} &= \int_V \left[\begin{matrix} \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \\ + \varphi \cdot A_z + \mu\gamma \dfrac{\partial A_z}{\partial t} A_z \end{matrix}\right] dV; \end{aligned} \qquad (8)$$

У подальшому будемо нехтувати внеском скалярного електричного потенціалу (електричного поля) у деформування та тепловиділення, тобто не будемо розглядати функціонал (7). Розв'язання задачі визначення характеристик ЕМП надає можливість враховувати його дію на теплове поле та процес деформування. Нестаціонарне розповсюдження теплового поля може бути визначене з умови стаціонарності наступного функціоналу:

$$\text{Temp} = \int_V \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\lambda}{2}\left[\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] - \\ -QT + \rho c \dfrac{\partial T}{\partial t} T \end{array} \right\} dV + \tag{9}$$

$$+ \int_{A_q} qTdS + + \int_{A_\alpha} \frac{\alpha}{2}\left[T^2 - 2T_\infty T\right] dV;$$

тут λ – теплопровідність матеріалу;

ρ – густина матеріалу;

c – питома теплоємність;

q – функція теплового потоку;

α – коефіцієнт конвекційного теплообміну;

T_∞ – температура навколишнього середовища;

A_q, A_α – області границі тіла на яких задано тепловий потік та умови конвекційного теплообміну відповідно. Тепловиділення при розповсюдженні ЕМП враховується шляхом введення розподілених джерел тепловиділення:

$$Q = \frac{1}{\gamma}\left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right)^2, \tag{10}$$

де $\vec{H}$ – вектор напруженості магнітного поля.

Компоненти НДС при пружному деформуванні (в умовах нехтування внеском електричного поля та у відсутності поверхневих струмів) можуть бути визначені з умови стаціонарності потенційної енергії, яку представимо так:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \hat{\varepsilon} \cdot\cdot {}^{(4)}\hat{C} \cdot\cdot \hat{\varepsilon} dV - \int_V \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{u} dV - $$
$$- \int_S \vec{p} \cdot \vec{u} dS - \int_V \Delta T \cdot\cdot {}^{(4)}\hat{C} \cdot\cdot \hat{\varepsilon} dV; \tag{11}$$

$${}^{(4)}\hat{C} = -\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \hat{I} \otimes \hat{I} +$$
$$+ \frac{E}{2(1+\nu)}\left(e_k \otimes \hat{I} \otimes e^k + e_i \otimes e_k \otimes e^i \otimes e^k\right). \tag{12}$$

Тут ми врахували дію електромагнітних сил (друга складова), наявність поверхневих розподілених сил (третя складова) та наявність приросту температури (четверта складова).

Розв'язок відшукується з відповідних умов стаціонарності функціоналів (8),(9),(11), причому, для нестаціонарних ЕМП та теплового поля ці умови повинні виконуватись на кожному кроці за часом – k:

$$\delta\left(MAG^k_{(x)}\right) = 0; \quad \delta\left(MAG^k_{(y)}\right) = 0; \quad \delta\left(MAG^k_{(z)}\right) = 0;$$
$$\delta\left(\text{Temp}^k\right) = 0; \quad \delta U = 0. \tag{13}$$

Шукані змінні задачі: компоненти векторного магнітного потенціалу, температура та переміщення. Тоді умови стаціонарності потребують рівності нулю наступних похідних:

$$\frac{\partial MAG^k_{(x)}}{\partial A_x} = 0; \quad \frac{\partial MAG^k_{(y)}}{\partial A_y} = 0; \quad \frac{\partial MAG^k_{(z)}}{\partial A_z} = 0;$$
$$\frac{\partial \text{Temp}^k}{\partial T} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial \vec{u}} = 0. \tag{14}$$

Що призводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих змінних, яку представляємо у векторно-матричній формі:

$$[M]\{A_x\} + [M\gamma]\left\{\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\} = \{J_x\};$$
$$[M]\{A_y\} + [M\gamma]\left\{\frac{\partial A_y}{\partial t}\right\} = \{J_y\};$$
$$[M]\{A_z\} + [M\gamma]\left\{\frac{\partial A_z}{\partial t}\right\} = \{J_z\}; \tag{15}$$
$$[\Lambda]\{T\} + \{C\}^T\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \{Q\} + \{Q\}^q + \{Q\}^\alpha;$$
$$[K]\{u\} = \{p\} + \{f_{em}\},$$

тут $[M]$ – «магнітна» матриця;

$[M_\gamma]$ – матриця, аналогічна за змістом матриці теплоємності у задачі теплопровідності;

$[\Lambda]$ – «матриця теплопровідності»;

$[C_T]$ – матриця теплоємності;

$\{Q\}$ – вектор-стовпець внутрішніх джерел тепловиділення;

$\{Q\}^q$, $\{Q\}^\alpha$ – вектори «теплових поверхневих навантажень» завдяки можливому потоку через поверхню, або завдяки конвекційному теплообміну, усі інші матриці та вектори є східними з тими, що вже розглянуті раніше. Далі наведемо у загальному вигляді вирази для обчислення матриць та векторів, які входять у визначальні співвідношення (15), для випадку ізотропного матеріалу. «Магнітна матриця» одного СЕ:

$$[M]_{(el)} = \int_{V(el)} \{B\}^T [\mu]\{B\} dV_{(el)}, \ \{B\}^T = \left\{\frac{\partial N}{\partial x} \ \frac{\partial N}{\partial y} \ \frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T.$$

Матриця $[M_\gamma]$: $[M\gamma]_{(el)} = \mu\gamma \int_{V(el)} \{N\}^T \{N\} dV_{(el)}$.

Матриця теплопровідності: $[\Lambda] = \int_V \{B\}^T [\lambda]\{B\} dV$.

$$\{B\}^T = \left\{\frac{\partial N}{\partial x} \ \frac{\partial N}{\partial y} \ \frac{\partial N}{\partial z}\right\}^T, \ [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матриця теплоємності:

$$[C_T]_{(el)} = c\rho \int_{V(el)} \{N\}^T \{N\} dV_{(el)}.$$

Вектори внутрішніх джерел тепловиділення та поверхневих «навантажень»:

$$\{Q\} = \int_V Q\{N\}^T dV; \quad \{Q\}^q = \int_V q\{N\}^T dV;$$
$$\{Q\}^\alpha = \int_V \alpha\{N\}^T \{T_\infty\} dV.$$

Для розв'язку у часі розглядається схема, котра на кожному кроці k за часом призводить до наступних рівнянь відносно компонент векторного магнітного потенціалу та температури:

$$\left[M^{k-1}\right]\left\{A_i^k\right\} = -\left[M\gamma^{k-1}\right]\frac{\left\{A_i^k\right\} - \left\{A_i^{k-1}\right\}}{\Delta t} + \left\{J_i^{k-1}\right\}, \quad i = 1,2,3.$$

$$\left[\Lambda^{k-1}\right]\left\{T^k\right\} = -\left\{C^{k-1}\right\}^T \frac{\left\{T^k\right\} - \left\{T^{k-1}\right\}}{\Delta t} + \left\{Q^{k-1}\right\} + \left\{Q^{k-1}\right\}^q + \left\{Q^{k-1}\right\}^\alpha.$$

Якщо властивості матеріалу залежать від температури, то на кожному кроці за часом відбувається їх корегування за схемою, подібною до корегування магнітної проникності. Відомо, що властивості матеріалу змінюються в залежності від температури повільно, тож при достатньо малому часовому кроці Δt уточнення значень властивостей матеріалу не буде потребувати більше двох-трьох ітерацій.

У випадку визначення НДС при пружно-пластичному деформуванні розглянемо слабку форму рівнянь рівноваги, розв'язок відшукуємо з умови:

$$G\left(\hat{\sigma}, \delta\vec{u}\right) = 0,$$

$$G\left(\hat{\sigma}, \delta\vec{u}\right) = \int_V \hat{\sigma} \cdot\cdot \delta\hat{\varepsilon} dV - \int_V \left(\vec{j} \times \vec{B}\right) \delta\vec{u} dV - \int_{A_p} \vec{p} \cdot \delta\vec{u} dA$$

тут $\delta\vec{u}$ – вектор віртуальних переміщень, який пов'язаний із деформаціями наступним чином:

$$\delta\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\delta\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\delta\vec{u}\right)^{\mathrm{T}}\right].$$

Чисельна процедура розв'язання полягає в наступному. Наприклад, розглядаються два кроки розв'язку n та n+1, вважаємо, що на кроці n відомі тензори напружень, пружних та пластичних деформацій, також відомі механічні навантаження та електромагнітні сили. Тоді, необхідність виконання умови стаціонарності на кожному кроці призводить до рівняння:

$$\hat{\sigma}_{n+1} = \hat{\sigma}_n + {}^{(4)}\hat{C}^{\mathrm{ep}} \cdot\cdot \Delta\hat{\varepsilon}\,, \qquad (16)$$

де $\Delta\hat{\varepsilon}$ – тензор прирощення деформацій,

${}^{(4)}\hat{C}^{\mathrm{ep}}$ – пружно-пластичний тензор. Наведені варіаційні постановки відповідних задач та наступні системи лінійних алгебраїчних рівнянь можуть бути використаними для створення алгоритмів відповідно до схем МСЕ.

Висновки. Розглянуто проблему аналізу термодеформування електропровідних тіл при дії електромагнітного поля. Наведені варіаційні формулювання задач аналізу розповсюдження основних векторних характеристик електромагнітного поля, нестаціонарної теплопровідності та пружно-пластичного деформування. Наведені співвідношення є базовими для створення чисельних алгоритмів відповідно до схем методу скінчених елементів.

Список литературы

1. *Степанов Г.В., Бабуцкий А.И., Мамеев И.А., Пащин Н.А. Савицкий В.В., Ткачук Г.И.* Перераспределение остаточных сварочных напряжений при обработке импульсным электромагнитным полем. Проблемы прочности. 2011. № 3. С. 123-131.

2. *Rudnev V., Loveless D., Cook R.L.* Handbook of induction heating. CRC press. 2017.

3. *Doležel I., Barglik J., Ulrych B.* Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.

4. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D.* Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

5. *Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K.* Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of materials. 2016. Vol. 48 No. 6. P. 760-767.

6. *Bondar' S.V., Lavinskii D.V.* Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials. 2011. Vol. 43, № 4. P. 447-454.

Bibliography (transliterated):

1. *Stepanov G.I., Babytskii A.I., Mameev I.A., Pacshin N.A., Savickii V.V., Tkachuk G.I.* Pereraspredelenie ostatochnykh napryazhenii pri obrabotke impulsnym electromagnitnym polem. Problemy prochnosti. 2011. № 3. P. 123-131.

2. *Rudnev V., Loveless D., Cook R.L.* Handbook of induction heating. CRC press. 2017.

3. *Doležel I., Barglik J., Ulrych B.* Continual induction hardening of axi-symmetric bodies. Journal of materials processing technology. 2005. № 161 (1-2). P. 269-275.

4. *Altenbach H., Morachkovsky O., Naumenko K., Lavinsky D.* Inelastic deformation of conductive bodies in electromagnetic fields. Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2016. № 28 (5). P. 1421-1433.

5. *Lavinskii D.V., Morachkovskii O.K.* Elastoplastic Deformation of Bodies Interacting Through Contact Under the Action of Pulsed Electromagnetic Field. Strength of materials. 2016. № 48 No. 6. P. 760-767.

6. *Bondar' S.V., Lavinskii D.V.* Study of thermoelastoplastic contact deformation of production tooling mixed structures. Strength of Materials. 2011. Vol. 43, № 4. P. 447-454.

Поступила (received) 30.09.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Альтенбах Хольм (Альтенбах Хольм, Altenbach Holm) **–** доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина, e-mail: holm.altenbach@ovgu.de

Науменко Костянтин (Науменко Константин, Naumenko Konstantin) **–** доктор технічних наук, професор, Магдебурзький університет ім. Отто фон Геріке, м. Магдебург, Німеччина, e-mail: konstantin.naumenko@ovgu.de

Лавінський Денис (Лавинский Денис, Lavinsky Denis) – кандидат технічних наук, доцент, кафедра теоретичної механіки, НТУ «ХПІ», тел.: (057)-70-763-73, e-mail: denis.lavinsky@ukr.net

Конкін Валерій (Конкин Валерий, Konkin Valerii) – кандидат технічних наук, професор, кафедра механіки суцільних середовищ та опору матеріалів, НТУ «ХПИ», e-mail: 1956kvn@gmail.com