

*А.Ю. ТАНЧЕНКО***ДОСЛІДЖЕННЯ СУБГАРМОНІЙНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ НА ПРИКЛАДІ СИСТЕМИ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

Робота присвячена проблемі пошуку та аналізу субгармонійних режимів у нелінійних коливальних системах. Запропоновано інтегральний підхід до оцінки кожного коливання та їх безпосереднього порівняння між собою, використовуючи базові, первинні результати коливального процесу - амплітуди та зміни їх швидкостей. Цей підхід дозволяє працювати з неспотвореними даними, а також не вносити додаткові похибки у процедуру чисельного розв'язання. У статті застосування алгоритму показано на системі з двома ступенями свободи, однак може бути легко поширений на багатомасову систему. Зауважимо, що на відміну від методу оцінки за перетинами Пуанкаре, де приймає участь лише одна точка фазової площини для кожного коливання, запропонований підхід проводить інтегральну оцінку відразу для всіх точок, що виключає помилкове, випадкове співпадіння в разі збігу лише декількох точок. Також запропонований алгоритм дає змогу досліджувати діапазон і «стійкість» субгармонійних режимів шляхом варіювання кількох параметрами досліджуваної коливальної системи.

Ключові слова: вимушені коливання, нелінійна вібраційна система, субгармонійний режим, фазовий портрет, переріз Пуанкаре

*А.Ю. ТАНЧЕНКО***ИССЛЕДОВАНИЕ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ КОЛЕБАНИЙ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Работа посвящена проблеме поиска и анализа субгармонических режимов в нелинейных колебательных системах. Предложен интегральный подход к оценке каждого колебания и их непосредственного сравнения между собой, используя базовые, первичные результаты колебательного процесса – амплитуды и их скорости изменения. Этот подход позволяет работать с неискаженными данными, а также не вносит дополнительные искажения в процедуру численного решения. В статье применение алгоритма показано на системе с двумя степенями свободы, однако может быть легко расширен на многомассовую систему. Заметим, что в отличие от метода оценки по сечениям Пуанкаре, где участвует лишь одна точка из фазовой плоскости для каждого колебания, предложенный подход проводит интегральную оценку сразу для всех точек, что исключает ложное, случайное срабатывание в случае совпадения лишь нескольких точек. Также предложенный алгоритм позволяет исследовать диапазон и «устойчивость» субгармонического режима путем варьирования несколькими параметрами исходной колебательной системы.

Ключевые слова: вынужденные колебания, нелинейная колебательная система, субгармонический режим, фазовый портрет, сечение Пуанкаре.

*А.У. ТАНЧЕНКО***STUDYING SUBHARMONIC MODES OF VIBRATIONS ON THE EXAMPLE OF A SYSTEM WITH TWO DEGREE OF FREEDOMS UNDER PULSE LOADING**

The work is devoted to the problem of searching and analyzing subharmonic modes in nonlinear oscillatory systems. An integrated approach to the assessment of each oscillation and their direct comparison with each other, using the basic, primary results of the oscillatory process — amplitudes and their rates of change — is proposed. This approach allows you to work with undistorted data, and also does not introduce additional distortions in the procedure of numerical solution. In the article, the application of the algorithm is shown on a system with two degrees of freedom, however, it can be easily extended to a multi-mass system. Note that, in contrast to the Pankaret cross section estimation method, where only one point from the phase plane for each oscillation is involved, the proposed approach performs an integral assessment for all points at once, which eliminates false, random triggering if only a few points coincide. Also, the proposed algorithm allows to investigate the range and "stability" of the subharmonic mode by varying several parameters of the original oscillating system.

Keywords: forced vibrations, nonlinear vibration system, subharmonic mode, phase portrait, Poincare's cross section

Вступ. Проблемі дослідження субгармонійних режимів коливань присвячено низку публікацій [1-11] і в переважній більшості пропонується той чи інший підхід до «обробки» вхідних даних - коливань. Зокрема, в роботах [10,11] пропонується використовувати Фур'є-перетворення, і на його основі робити ти чи інші висновки. У цій роботі пропонується підхід, котрий передбачає пошук і аналіз субгармонійних режимів на основі первинних базових даних – амплітуд

коливань. У попередніх роботах були отримані результати із використанням як збуджувальної сили – силу, змінювану за гармонійним законом [12]. У рамках цієї публікації представлені результати пошуку і аналізу субгармонійних режимів при довільному періодичному імпульсному навантаженні. Як періодичне силове навантаження, у випадку що розглядається, використано прямокутний сигнал.

Розрахункові моделі. Як досліджувана модель використана нелінійна двомасова система з двома ступенями свободи (вільності) з нелінійним елементом – рис. 1 (перша з двох пружин має білінійну залежність жорсткості від переміщення – рис. 2).

Параметри, використані при математичному моделюванні, представлені у табл. 1. Базою для математичного модулювання використано програмний пакет Maple, який має широкий функціонал для розв'язання поставленої задачі.

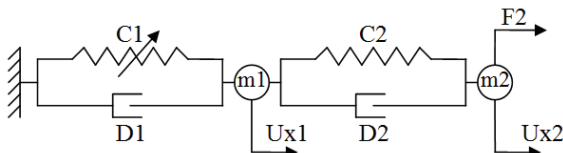


Рисунок 1 – Схема досліджуваної коливальної системи

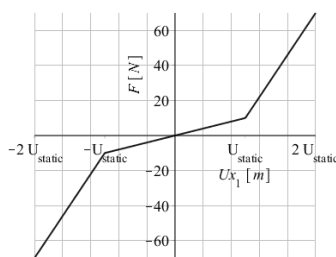


Рисунок 2 – Характеристика білінійної пружини (C1 => C11/C12)

Таблиця 1 – Параметри розрахункової моделі

m1, [кг]	1
m2, [кг]	1
C1, [Н/м]	C11=2000
C12coef	C12=2000·C12coef
C2, [Н/м]	2000·C2coef
C2coef	0.5 ÷ 1.5
D1, [Н/м·с]	5
D2, [Н/м·с]	5
Амплітуда імпульсу F2, [N]	23
Тривалість імпульсу F2, [с]	0,02
Частота збудження F2, [Hz]	3

Система рівнянь буде мати вигляд

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + D_1 \dot{u}_1 + D_2 (\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + C_1 u_1 + C_2 (u_1 - u_2) = 0, \\ m_2 \ddot{u}_2 + D_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + C_2 (u_2 - u_1) = f_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

де $f_2(t)$ – кусочно-лінійна функція, графік якої наведено на рис. 3.

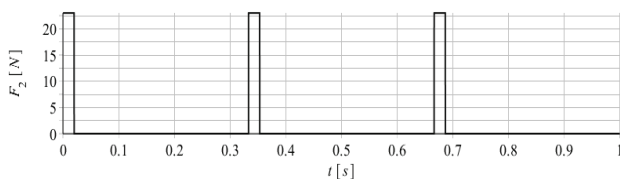


Рисунок 3 – Графік збуджуючої сили: періодичне імпульсне навантаження F2

Задля кількісної оцінки відмінності коливань одне від іншого, використовуємо період збуджуючого

навантаження T як опорний, пропонується скористатися формулою

$$k_i = \sum_q \frac{\|u_q(\tau + jT)\| - \|u_q(\tau)\|}{\|u_q(\tau + jT)\| + \|u_q(\tau)\|}, \quad (2)$$

нульові значення котрої будуть свідчити про повний збіг досліджуваних номерів коливань між собою. Таким чином, можливо дослідити кратність (дольність) субгармонійних (або гіпергармонійних) режимів.

Результати досліджень. На рис. 4-5 – наведено графіки, що характеризують коливальний процес з параметрами, які відповідають табл. 1. Так, на рис. 4 представлено результат варіювання параметром жорсткості C12 першої пружини та виявлені при цьому субгармонійні режими, а на рис. 5 – числове значення характеристики відмінності коливань за формулою (2). Таким чином, варіювання лише одним з параметрів дало змогу перевести систему в субгармонійний режим коливання, тим більше, субгармоніка кратності два спостерігається для широкого діапазону значень, а також має яскравий особисто виражений характер, що буде показано далі.

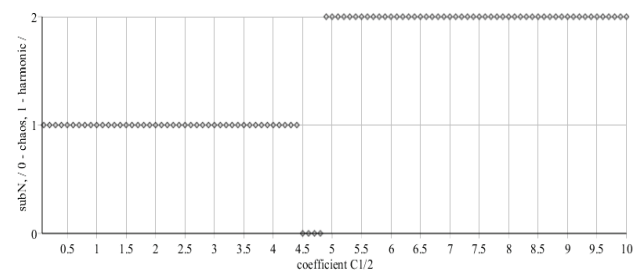


Рис. 4 – Результати пошуку субгармонійних режимів при варіюванні параметром жорсткості C12 білінійної пружини

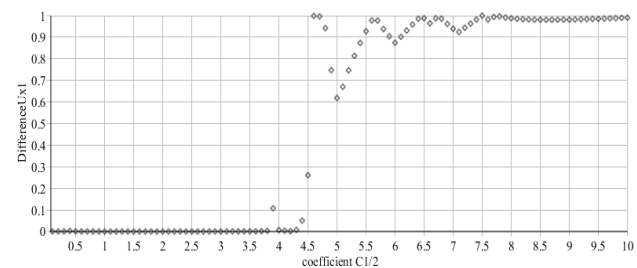


Рис. 5 – Характеристика відмінності коливання. Максимальне відхилення за формулою (2)

Рис. 6-8 відображають графічний розподіл результатів пошуку субгармонійних режимів при варіюванні одразу двома змінними параметрами – коефіцієнтами при параметрах жорсткості C12 та C2: першою (нелінійної) та другої (лінійної) пружин відповідно (див. табл. 1).

На рис. 9-19 наведено детальні результати коливального процесу для варіюваних параметрів C12coef = 6 та C2coef = 1. В цьому випадку спостерігається субгармонійний режим кратності два.

Видно, що система доволі швидко виходить на субгармонійний режим – див. рис. 9-11.

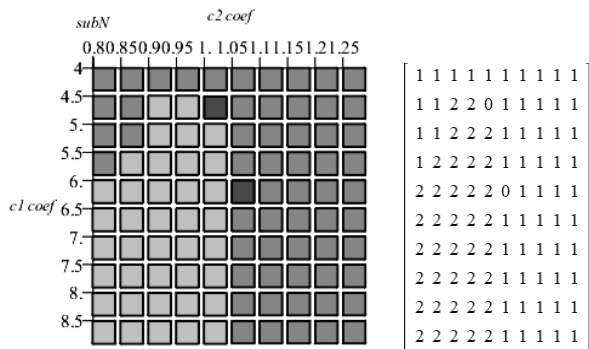


Рисунок 6 – Результати пошуку субгармонійних режимів при варіюванні двома параметрами жорсткості; C12 білінійної пружини та C2 лінійної пружини

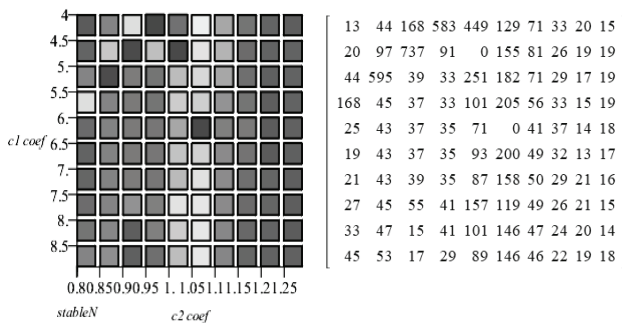


Рисунок 7 – Орієнтовний номер коливання, після якого процес повністю стабілізується

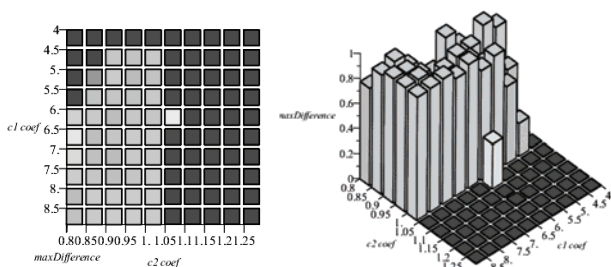


Рисунок 8 – Характеристика видозміни коливання. Максимальне відхилення за формулою (2)

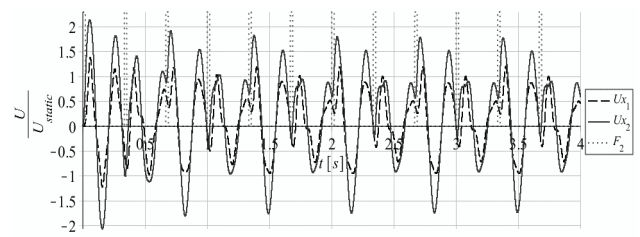


Рисунок 9 – Часові розподіли переміщень. Початок: перші 12 коливань (відмаштабовано відповідно до статичного навантаження)

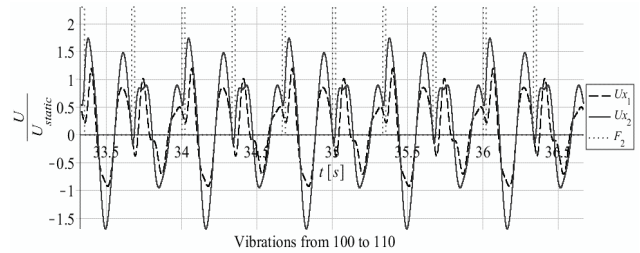


Рисунок 10 – Часові розподіли переміщень. Коливання з 100 по 110

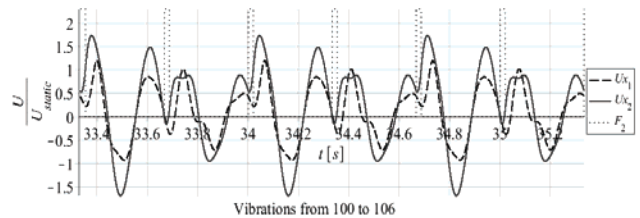


Рисунок 11 – Часові розподіли переміщень. Коливання з 100 по 106

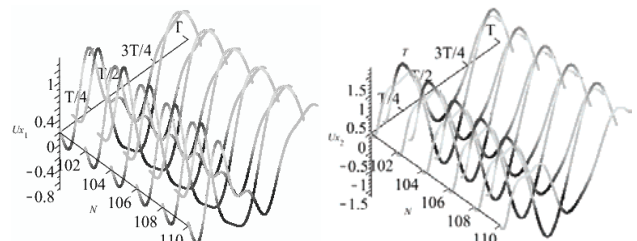
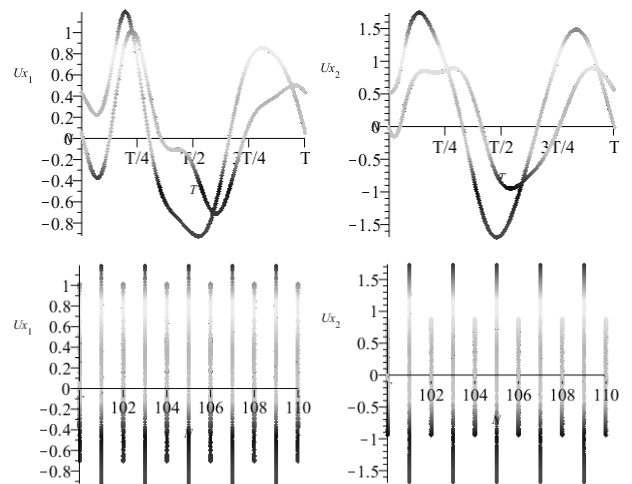


Рисунок 12 – Часові розподіли переміщень: Ux1 ліворуч, Ux2 праворуч. Коливання з 100 по 110. Субгармоніка кратності два (відмаштабовано відповідно до статичного навантаження)

Аналізуючи результати розподілів переміщень, зауважимо, що амплітуди та характер повторюваної пари коливань субгармонійного режиму дуже відрізняються і становлять різницю за амплітудою 17 % для U_{x1} , та 95 % для U_{x2} – див. рис.12.

Результати на рис.13 демонструють наявність субгармонійного режиму кратності два: оскільки кожне друге коливання повністю повторюється, про що свідчать «нульові» лінії на графіках, побудованих за формулою (2), причому сусідні коливання істотно відрізняються одне від одного, про що говорить як аналіз даних графічних розподілів, так і амплітуд коливань – див. рис 11, 12.

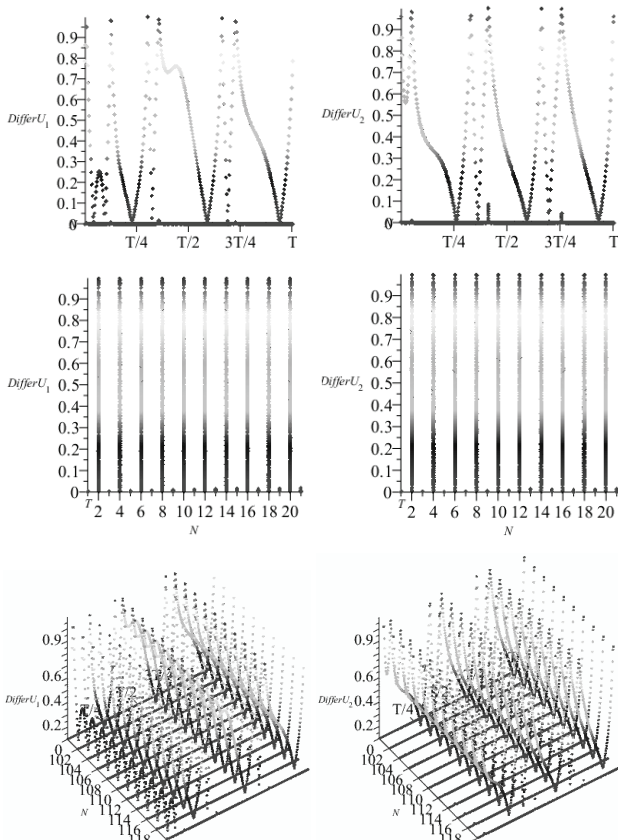


Рисунок 13 – Характеристика зміни коливання, вираховувана за формулою (2) для U_{x1} (ліворуч) та U_{x2} (праворуч)

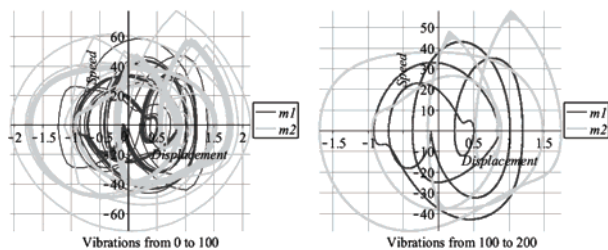


Рисунок 14 – Фазові траєкторії для перших 100 коливань (ліворуч) та з 100 по 200 (праворуч)

Також одним з наочних засобів аналізу субгармонійних режимів є використання перерізів Пуанкаре, що в цьому випадку також підтверджує субгармоніку кратності два, оскільки починаючи з 80 коливання, усі парні коливання стягуються в одну точку, а непарні - в іншу (див. рис. 17,18). Графічне відображення траек-

торій сумісного руху коливань мас $m1$ та $m2$ наведено на рис.19, що також дає змогу вести мову про сталий коливальний процес, при якому фази коливань збігаються: додатній та від'ємний напрямки зміни переміщень практично співпадають.

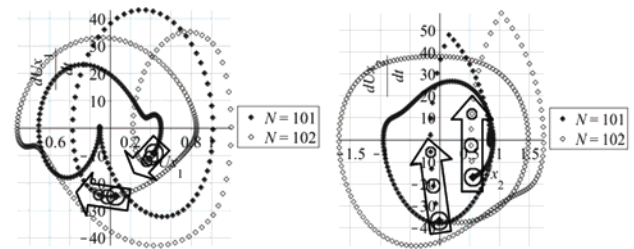


Рисунок 15 – Фазові траєкторії для повторюваної пари коливань, $m1$ (ліворуч) та $m2$ (праворуч) /колами позначено початок та напрямок руху кожного коливання/

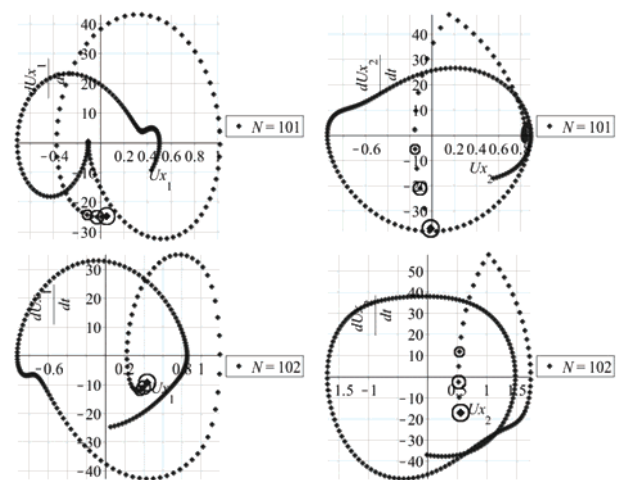


Рисунок 16 – Фазові траєкторії для парних (зверху) та непарних(знизу) коливань /колами позначено початок та напрямок руху кожного коливання/

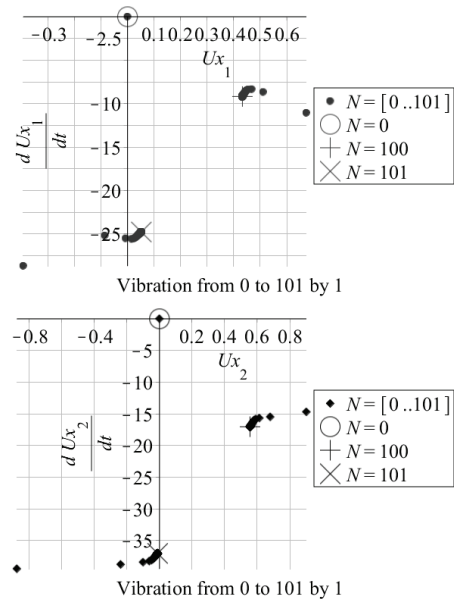


Рисунок 17 – Переріз Пуанкаре для перших 100 коливань. $m1$ (зверху) та $m2$ (знизу)

(умовні позначки: коло – перше коливання з діапазону, прямий та похилий хрест – останнє парне та непарне коливання відповідно)

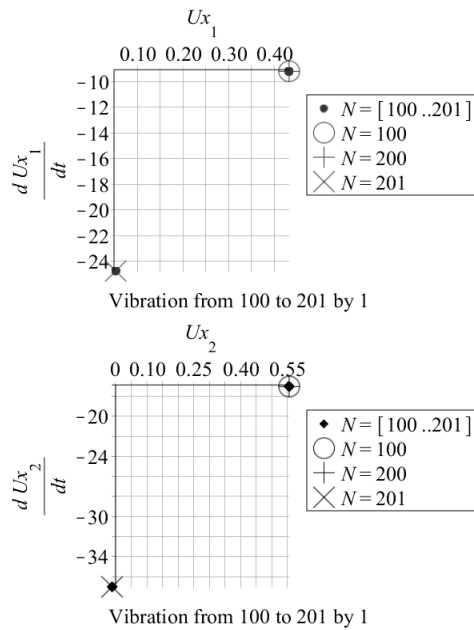


Рисунок 18 – Переріз Пуанкаре для коливань з 100 по 200. m1 (зверху) та m2 (знизу)

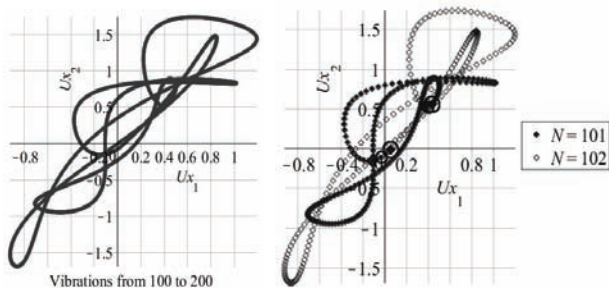


Рисунок 19 – Траєкторії сумісного руху m1 та m2. Коливання з 100 по 200 – ліворуч, пара характерник коливань – праворуч

На рис. 20-27 представлено результати коливального процесу для варійованих параметрів C12coef = 8 та C2coef = 0,8. При цьому також спостерігається субгармонійний режим кратності два (див. рис. 6).

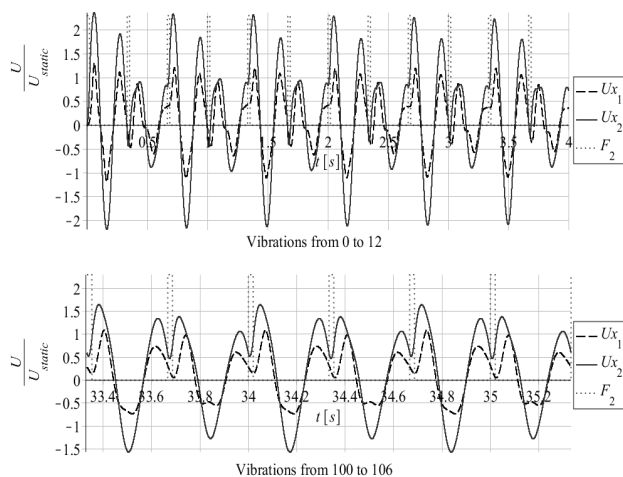


Рисунок 20 – Часові розподіли переміщень Ux1 та Ux2. Початок коливань: перші 12 коливань (зверху) та коливання з 100 по 106 (знизу) /відмаштабовано відповідно до статичного навантаження/

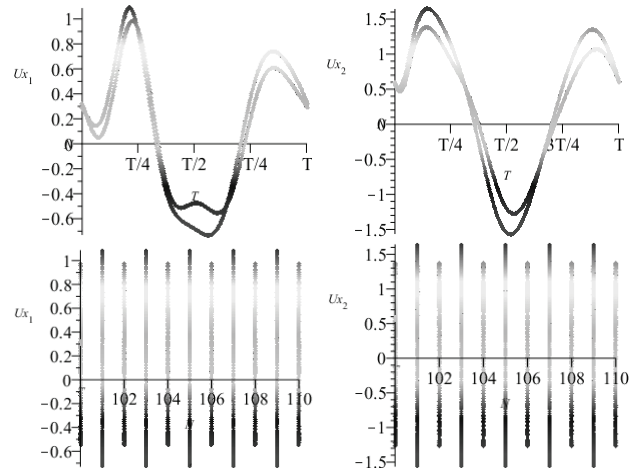


Рисунок 21 – Часові розподіли: Ux1 ліворуч, Ux2 праворуч. Коливання з 100 по 110. Субгармоніка кратності два. /відмаштабовано відповідно до статичного навантаження/

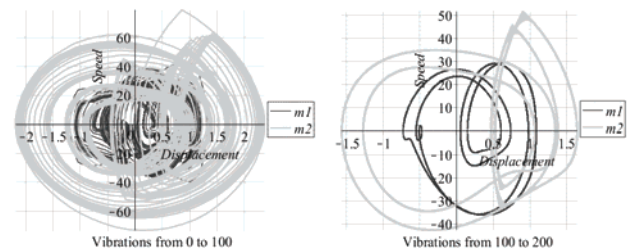


Рисунок 22 – Фазові траєкторії для перших 100 коливань (ліворуч) та з 100 по 200 (праворуч)

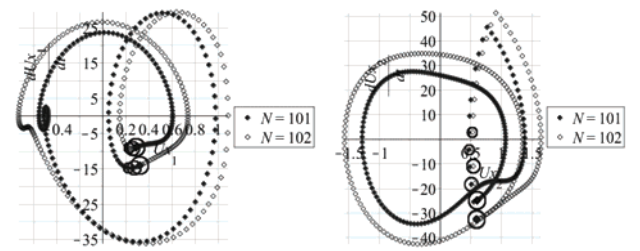


Рисунок 23 – Фазові траєкторії для повторюваної пари коливань, m1 (ліворуч) та m2 (праворуч) /колами позначено початок та напрямок руху кожного коливання/

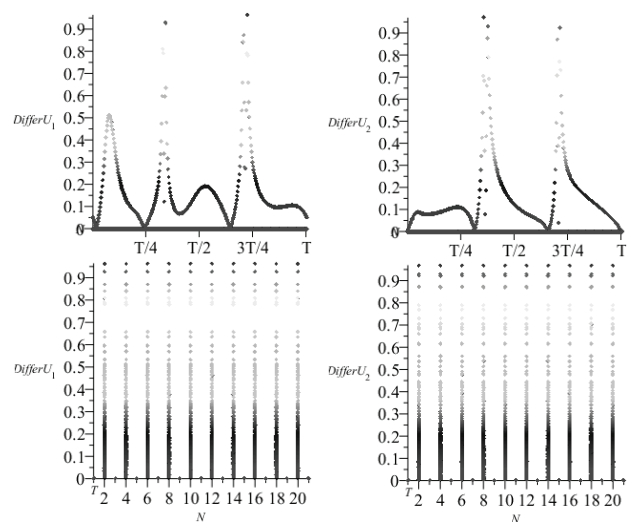
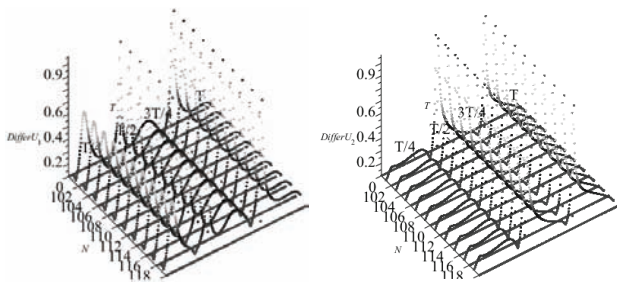
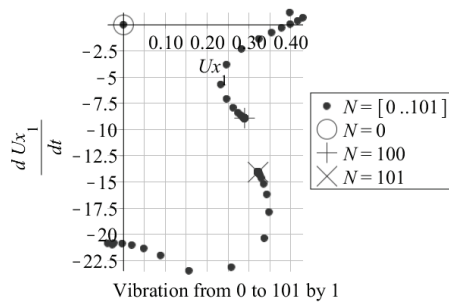


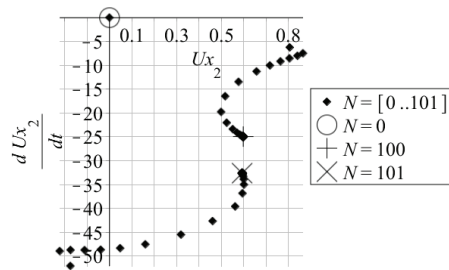
Рисунок 24 – Характеристика зміни коливання, вираховувана за формулою (2) для Ux1 (ліворуч) та Ux2 (праворуч)



Продовження рисунку 24

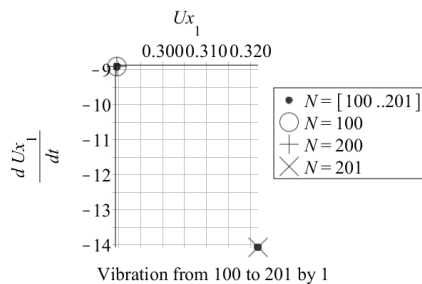


Vibration from 0 to 101 by 1

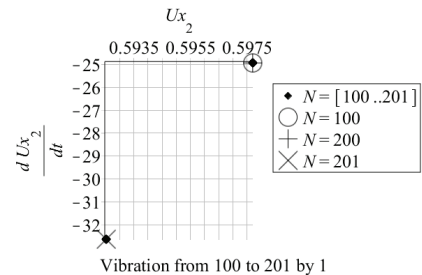


Vibration from 0 to 101 by 1

Рисунок 25 – Переріз Пуанкаре для перших 100 коливань: m1 (зверху) та m2 (знизу) / умовні позначки: коло – перше коливання з діапазону, прямий та похилий хрест – останнє парне та непарне коливання відповідно/



Vibration from 100 to 201 by 1



Vibration from 100 to 201 by 1

Рисунок 26 – Переріз Пуанкаре для коливань з 100 по 200. m1 (ліворуч) та m2 (праворуч)

Зауважимо, що коливальний процес має ознаки сталого вже після 30 коливань, однак різниця між повторюваною характерною парою коливань не є настільки наочною, як у першому випадку, тобто її можна

сприйняти як за деякий перехідний процес, так і зовсім прийняти за чисельну похибку. Таким чином, запропонований алгоритм дає змогу досліджувати та однозначно визначати субгармонійні режими, що підтверджується докладним дослідженням, використовуючи стандартні методи – фазові портрети, перетини Пуанкаре.

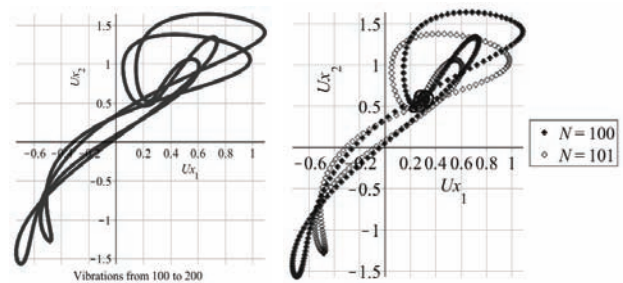


Рисунок 27 – Траєкторії сумісного руху m1 та m2. Коливання з 100 по 200 - ліворуч, пара характеристик коливань - праворуч

Висновки. Здійснений комплекс досліджень є підґрунтям для наступних висновків:

- 1) запропонований підхід може бути підґрунтям для виявлення та дослідження субгармонійних режимів у нелінійних системах;
- 2) на прикладі системи з двома ступенями вільності продемонстровано можливість виникнення субгармонійних режимів при зміні параметрів жорсткості; до речі, передбачити чи спрогнозувати це явище заздалегідь не видається можливим;
- 3) створений програмний комплекс дає змогу наочно дослідити можливість виникнення субгармонійних режимів коливань для різноманітних діапазонів варійованих параметрів.

У подальшому запропонований підхід буде застосовано до дослідження широкого класу реальних машинобудівних конструкцій.

Список літератури

1. Бабаков *И.М.* Теория колебаний / *И.М. Бабаков.* – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
2. Вибрации в технике. Колебания нелинейных механических систем. Т. 2 / Под ред. *И.И. Блехмана.* – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
3. Бутенин *Н.В.* Введение в теорию нелинейных колебаний / *Н.В. Бутенин, Ю.И. Неймарк, Н.Л. Фурфав.* – М.: Наука, 1976. – 384 с.
4. Хаяси *Т.* Нелинейные колебания в физических системах / *Т. Хаяси.* – М.: Мир, 1968. – 432 с.
5. Малкин *И.Г.* Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / *И.Г. Малкин.* – М.: «Ленанд», 2014. – 248 с.
6. *Kent Nagle R.* Fundamentals of Differential Equations / *Kent Nagle R., Edward B. Saff.* – Addison-Wesley Publishing Company, 1993.
7. Blanchard *P.* Differential equations / *P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R. Hall.* – Brooks/Coll, 2002.
8. Гритченко *В.Т.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы / *В.Т. Гритченко, В.Т. Мацпура, А.А. Снарский.* – М.: Изд. ЛКИ, 2007.
9. Ляцев *А.В.* Странный аттрактор в простейшей механической системе / *А.В. Ляцев* // Компьютерные инстру-

менты в образовании. – 2010. – № 6. – С. 57-66.

10. Мартыненко Г.Ю. Нелинейные явления роторной динамики в системах с магнитными подшипниками / Г.Ю. Мартыненко // Механіка та машинобудування. – Х.: НПКП "Механіка", 2014. – № 1. – С. 36-50.

11. Мартыненко Г.Ю. Динаміка роторів турбомашин в пасивних і активних магнітних підшипниках. Автореф. дис. д-ра. техн. наук / Г.Ю. Мартыненко. – Х.: НТУ «ХПІ», 2018. – 48 с.

12. Танченко А.Ю. Нелінійні коливання елементів легкоброньованих машин: модельні задачі та якісні особливості / А.Ю. Танченко, М.А. Ткачук, А.В. Набоков, А.В. Грабовський, А.М. Малакей // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Транспортне машинобудування. – 2018. – № 29 (1305). – С. 108–128.

References (transliterated)

1. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Theory of vibrations]. Moscow: Drofa, 2004. 591 p.

2. Vibratsii v tekhnike. Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem [Vibrations in technology. Oscillations of nonlinear mechanical systems]. Vol. 2. Ed. I. I. Blekhnman. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1979. 351 p.

3. Butenin N.V., Neymark Y.I., Fufayev N.L. Vvedeniye v teoriyu nelineynykh kolebaniy [Introduction to the theory of nonlinear oscillations]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 384 p.

4. Khayasi T. Nelineynyye kolebaniya v fizicheskikh sistemakh [Nonlinear oscillations in physical systems]. Moscow:

Mir Publ., 1968. 432 p.

5. Malkin I. G. Metody Lyapunova i Puankare v teorii nelineynykh kolebaniy [Methods of Lyapunov and Poincaré in the theory of nonlinear oscillations]. Lenand Publ., 2014. 248 p.

6. Kent Nagle R., Edward B. Saff. Fundamentals of Differential Equations. Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

7. Blanchard P., Devaney R.L., Hall G.R. Differential equations. Brooks/Coll, 2002.

8. Gritchenko B.T., Matsipura B.T., Snarskiy A.A. Vvedenie v nelineynuyu dinamiku: Haos i fraktalyi. Moscow: Izd. LKI, 2007.

9. Lyaptsev A.B. Strannyiy attraktor v prosteyshey mehanicheskoy sisteme. Kompyuternyye instrumentyi v obrazovanii, 2010. No 6. P. 57-66.

10. Martynenko G.Yu. Nelineynyye yavleniya rotornoy dinamiki v sistemah s magnitnyimi pdshipnikami. Mehanika ta mashinobuduvannya. Kharkiv: NPKP "Mehanika", 2014. No 1. P. 36-50.

11. Martynenko G.Yu. Dinamika rotoriv turbomashin v pasivnih i aktivnih magnitnih pidshipnikah. Avtoref. dis. d-ra. tehn. nauk. Kharkiv: NTU "HPI", 2018. 48 p.

12. Tanchenko A.Yu., Tkachuk M.A., Nabokov A.V., Grabovskiy A.V., Malakey A.M. Nelineynii kolivanniya elementiv legkobronovanih mashin: modelni zadachi ta yakisni osoblivosti. Visnik NTU "KhPI". Seriya: Transportne mashinobuduvannya. 2018. No 29 (1305). P. 108–128.

Поступила (received) . .2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Танченко Андрій Юрійович (Танченко Андрей Юрьевич, Tanchenko Andrii Yuriovich) – кандидат технічних наук (PhD.), старший науковий співробітник кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», НТУ «ХПІ», ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0388-0192>; e-mail: ATanchenko@tmm-sap.org