

*Н.В. СМЕТАНКИНА, С.Ю. МИСЮРА, А.В. ЛИННИК*

### **ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ЧАСТОТЫ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ГИДРОТУРБИН**

Целью работы является создание методики расчета собственных частот колебаний крышки гидротурбины в вакууме и при взаимодействии с водой с учетом предварительно напряженного состояния конструкции. Задача решается методом конечных элементов и состоит в нахождении частот и форм колебаний.

Влияние инерционных сил от масс и оборудования, расположенного на крышке, учитывается приведенной плотностью. Также в динамическом процессе учитывается влияние жидкости. Предварительно напряженное состояние моделируется путем введения так называемой геометрической матрицы жесткости, которая получена на основе тензора предварительных напряжений и нелинейной части тензора деформаций.

Решена задача по определению частот собственных колебаний стальной цилиндрической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления. Для выбора размера конечного элемента выполнена серия расчетов и проведена оценка сходимости развязку. Установлено, что внутреннее давление приводит к увеличению собственных частот колебаний цилиндрической оболочки, а внешний их снижает. На тестовом примере проверена работоспособность предложенного подхода и подтверждена достоверность результатов, полученных на его основе. Результаты, полученные с разработанным подходом, отличаются от экспериментальных данных от 0,5 до 11%. На основе предложенного подхода исследованы свободные колебания крышки гидротурбины, изготовленной из листового проката стали.

**Ключевые слова:** крышка, гидротурбина, собственные колебания, предварительно напряженное состояние, внутреннее давление.

*Н.В. СМЕТАНКИНА, С.Ю. МИСЮРА, О.В. ЛИННИК*

### **ВПЛИВ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НА ЧАСТОТИ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦІЙ ГІДРОТУРБІН**

Метою роботи є створення методики розрахунку власних частот коливань кришки гідротурбіни у вакуумі та при взаємодії з водою з урахуванням попередньо напруженого стану конструкції. Задача розв'язується методом скінченних елементів і полягає у знаходженні частот та форм коливань.

Вплив інерційних сил від мас та устаткування, яке розташоване на кришці, враховується приведеною густиною. Також у динамічному процесі враховується вплив рідини. Попередньо напружений стан моделюється шляхом введення так званої геометричної матриці жорсткості, яка одержана на основі тензора попередніх напружень і нелінійної частини тензора деформацій.

Розв'язана задача з визначення частот власних коливань сталевієї циліндричної оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску. Для вибору розміру скінченного елемента виконана серія розрахунків і проведена оцінка збіжності розв'язку. Встановлено, що внутрішній тиск приводить до збільшення власних частот коливань циліндричної оболонки, а зовнішній їх знижує. На тестовому прикладі перевірена работоспроможність запропонованого підходу і підтверджено достовірність результатів, отриманих на його основі. Результати, отримані за розробленим підходом, відрізняються від експериментальних даних від 0,5 до 11%. На основі запропонованого підходу досліджені вільні коливання кришки гідротурбіни, що виготовлена з листового прокату стали.

**Ключові слова:** кришка, гідротурбіна, попередньо напружений стан, власні частоти коливань, внутрішній тиск.

*N.V. SMETANKINA, S.Y. MISURA, O.V. LYNNYK*

### **INFLUENCE OF PRESTRESSED STATE ON FREQUENCIES OF HYDROTURBINE BEARING STRUCTURES**

The goal of the work is to develop a method for calculating the modal frequencies of hydroturbine cover in a vacuum and in interaction with water, taking into account the prestressed state of the structure. Due to the complexity of the design form, the problem is solved by the finite element method and consists in finding the frequencies and modes of vibration.

The consideration of inertial forces from masses, equipment located on the cover is modeled by the reduced density. Also, the dynamic process takes into account the water influence. The prestressed state is modeled by involving the so-called geometric rigidity matrix, which is derived on the basis of the previous stresses tensor and the nonlinear part of the strain tensor.

The problem of determining natural frequencies of a steel cylindrical shell which is under the influence of internal pressure is solved. Calculations have been performed for choosing a finite element size and an estimation of the solution convergence is carried out. It has been established that internal pressure leads to an increase in the natural frequencies of vibration of the cylindrical shell, and the outer one reduces them. The robustness of the proposed approach has tested and verified the reliability of the results obtained on its basis. The results obtained from the developed approach differ from the experimental data from 0.5 to 11%.

Based on the proposed approach free vibrations of the hydroturbine cover made of steel sheets were investigated. The greatest

interest is the first natural frequency, because it is closest to the excitation frequency. In the study of the proper vibrations of the cover, the inertial forces from the equipment mass installed on the cover were modeled by the reduced density of the ring. It is determined that the mass change affects its own cover frequency.

It has been established that with increasing depth of water, the frequency of hydroelastic vibrations decreases; with increasing weight loads the frequency of oscillations decreases; with increasing water pressure the frequency of vibrations decreases; taking into account the prestressed state does not significantly affect the frequency at the first proper frequency of the cover.

**Key words:** prestressed state, hydroturbine Bearing structures, the modal frequencies, hydroturbine cover, internal pressure.

**Введение.** Создание надежных и долговечных циклически симметричных деталей и узлов гидротурбин, к которым можно отнести крышку, требует выполнения анализа их прочностных характеристик теоретическими методами на стадии проектирования, и особенно важно – при определении объемов реконструкции (модернизации) оборудования после истечения нормативного срока эксплуатации. Эта проблема является актуальной как в Украине, так и за рубежом [1, 2].

На частоту крышки гидротурбины влияет большое количество факторов, таких как: давление воды, предварительно напряженное состояние от нагрузок, инерционные силы от присоединенных масс, а также глубина объема воды под крышкой.

Однако разработок, объединяющих уточненные методики определения статического и динамического НДС с учетом реальных условий эксплуатации энергомаши и экспериментальные данные о материалах, долговечности и ресурсе при модернизации гидротурбинного оборудования, недостаточно, что требует дальнейшего развития этих исследований.

#### **Анализ публикаций по теме исследования.**

При изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) крышки гидротурбины возникает необходимость в использовании численных методов механики деформируемого твердого тела, так как получение аналитических (точных) решений невозможно в связи со сложностью формы и структуры крышки. Практически во всех известных в этой области исследованиях для решения задачи применяется метод конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. Следует отметить работы, в которых рассматривается применение МКЭ для решения различных задач механики деформируемого твердого тела, а именно фундаментальные монографии К. Бате [3], О. Зенкевича [4, 5], Р. Галлагера [6], А.С. Сахарова [7] и других авторов.

Большой вклад в развитие МКЭ для расчета элементов конструкций гидротурбин внесли Б.Я. Кантор и В.М. Миткевич [8-10].

Дальнейшее исследование динамики циклически симметричных несущих конструкций гидротурбин нашло продолжение в работах Е.А. Стрельниковой, Т.Ф. Медведовской, К.С. Веремеенко, О.Н. Зеленской. В работе [11] задача об определении НДС конструкций крышек гидротурбин решена в осесимметричной постановке, причем радиально-осевые ребра приведены к телу вращения эквивалентной жесткости. В работе [12] проведен анализ конструктивных особенностей крышек гидротурбин и их нагружения, который позволил разработать эффективную методику оценки прочностных и динамических характеристик конструкции (в вакууме).

Это дает возможность свести вычисление перемещений к решению независимых задач для каждого члена ряда Фурье. Предложенный подход был применен в [13] для определения НДС крышки, как конструктивно-ортотропного тела при несимметричном нагружении. Статья [14] посвящена определению собственных частот гидроупругих колебаний крышки гидротурбин. В этой работе формы колебаний крышки гидротурбины в жидкости представляются в виде разложения по формам ее колебаний в вакууме, однако при этом не учитываются размеры объема жидкости, находящегося под крышкой. В этой работе метод расчета основан на приближенном подходе, в котором крышка рассматривалась как циклически симметричное ортотропное тело вращения. Однако при небольшом числе ребер это приводит к погрешностям.

В статьях [15, 16] разработан метод для определения частот и форм гидроупругих свободных колебаний крышек гидротурбин. Собственные формы колебаний конструкции в жидкости разлагались в ряды по формам колебаний в вакууме. Для решения задачи гидроупругости применялась теория гиперсингулярных интегральных уравнения в соединении с методами конечных и граничных элементов.

В тоже время следует отметить, что численные методы решения задачи о собственных колебаниях сложных элементов конструкций, таких как крышки гидротурбин, с учетом взаимодействия с жидкостью, недостаточно разработаны. Такие исследования необходимо проводить для предотвращения резонанса. Предлагаемые для решения этих задач методики [17, 18] обычно основываются на упрощающих гипотезах и не могут быть непосредственно использоваться для решения задачи о колебаниях погруженной в жидкость оболочки, моделирующей несущую конструкцию, взаимодействующую с водной средой. Отметим также, что существующие теоретические подходы [19 – 21] приводят к значительному (до 30 %) расхождению результатов с экспериментальными данными, особенно на низших частотах. В [22, 23] даны постановки задач о гидроупругих колебаниях лопаток гидротурбин и лопастей корабельного винта в трехмерной постановке, однако в них не приводятся численные результаты.

Таким образом, актуальной задачей является необходимость комплексного исследования влияния конструкционных параметров и эксплуатационных факторов на частоты колебаний крышек гидротурбин.

Целью настоящей работы является разработка методики расчета собственных частот колебаний конструкций в вакууме и при взаимодействии с водой и с учетом предварительно напряженного состояния конструкции.

**Постановка задачи.** Крышка гидротурбины является пространственной циклически-симметричной конструкцией, состоящей из тонкостенных оболочек вращения, объединенных  $n$ -ребрами – меридиональными пластинами сложной конфигурации. Исследование НДС таких конструкций начинается с построения модели сектора, из которых состоит исследуемый объект. На границах соседних секторов выполняются условия циклической симметрии.

При построении модели сектора вначале задаются ключевые точки в плоскости ребра, по которым строятся линии, затем создается модель ребра. Для получения оболочечных частей конструкции и полной модели сектора линии пересечения ребра и поверхностей оболочек поворачиваются по и против часовой стрелки на угол  $360/(2n)$ , где  $n$  – количество секторов.

Поскольку крышка представляет собой пространственную конструкцию, состоящую из тонкостенных элементов, для которых отношение толщины элементов конструкции к характерному размеру не превышает  $1/10$ , применяется теория тонких пластин и оболочек.

Из-за сложности формы конструкции для решения задачи применяется МКЭ. Учет инерционных сил от масс, оборудования, расположенного на крышке, моделируется приведенной плотностью. Также в динамическом процессе учитывается влияние жидкости.

Предварительно напряженное состояние моделируется путем введения так называемой геометрической матрицы жесткости, получаемой на основе тензора предварительных напряжений и нелинейной части тензора деформаций.

**Колебания в вакууме при отсутствии внешних воздействий.** Матричное дифференциальное уравнение движения конструкции, имеет вид

$$M\ddot{\bar{v}} + K\bar{v} = 0, \quad (1)$$

где  $M$  – матрица масс;  $K$  – матрица жесткости конструкции;  $\bar{v}$  – вектор перемещений.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\bar{v} = \bar{w} \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $\omega$  – частота;  $\bar{w}$  – форма колебаний.

В итоге, с учетом (1) и (2), задача сводится к решению однородной системы алгебраических уравнений

$$(K - \omega^2 M)\bar{w} = 0. \quad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальное решение в том случае, когда ее определитель равен нулю

$$|K - \omega^2 M| = 0. \quad (4)$$

Определитель представляет собой уравнение, корнями которого являются частоты  $\omega_i$ , зная которые на основе (3) определяются собственные формы колебаний конструкции –  $\bar{w}_i, (i = 1, \infty)$ .

Учет инерционных сил от масс, оборудования, расположенного на крышке, моделируется приведенной плотностью.

**Гидроупругие колебания.** В этом случае в ди-

намический процесс вовлекается жидкость. Поэтому связанная система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} [M^s] & 0 \\ \rho[L]^T & [M^f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^s] & -[L] \\ 0 & [K^f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = 0, \quad (5)$$

где  $[M^s]$  и  $[M^f]$  – матрицы масс оболочечных конечных элементов (КЭ) и КЭ, на которые разбит объем жидкости соответственно;  $[K^s]$ ,  $[K^f]$  – матрицы жесткости оболочечных КЭ и КЭ, на которые разбит объем жидкости соответственно;  $q$  – вектор обобщенных узловых перемещений;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – вектор узловых давлений;  $[L]$  – матрица связи между граничными элементами конструкции и КЭ акустической среды, определяемая формулой

$$[L] = \int_A \{\Phi\} \{n\}^T \{\Phi'\}^T dA.$$

Здесь  $\{\Phi\}$  – функции формы давления КЭ, на которые разбит объем жидкости,  $\{\Phi'\}$  – функции формы перемещений КЭ оболочки,  $\{n\}$  – вектор направляющих косинусов нормали к поверхности оболочки, взаимодействующей с водой,  $A$  – площадь поверхности соприкосновения между структурными КЭ и КЭ, на которые разбит объем жидкости.

**Предварительно напряженные конструкции.**

Модальный анализ предварительно напряженной конструкции выполняется на основе уравнения

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]_c \{u\} = 0, \quad (6)$$

где  $\{u\}$  – вектор узловых перемещений для всего тела;  $\{\ddot{u}\}$  – вектор ускорений точек тела;  $[M]$  – матрица масс;  $[K]_c = [K] + [K]_g$  – суммарная матрица жесткости;  $[K]$  – обычная матрица жесткости;  $[K]_g$  – так называемая геометрическая матрица жесткости, получаемая на основе тензора предварительных напряжений и нелинейной части тензора деформаций.

**Численные результаты.** Решена задача по определению частот собственных колебаний цилиндрической оболочки (рис. 1), находящейся под действием внутреннего давления  $q$  (рис. 1). Рассчитывалась стальная цилиндрическая оболочка [24, 25], имеющая длину  $L = 0,7$  м, радиус  $r = 0,15$  м, толщина стенки  $h = 0,001$  м.

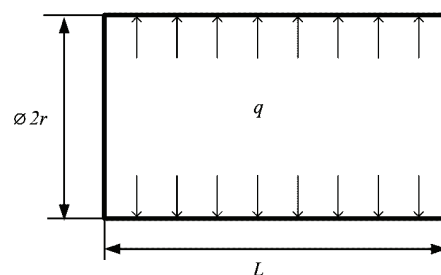


Рисунок 1 – Схема нагружения цилиндрической оболочки

Для выбора размера КЭ выполнена серия расчетов и проведена оценка сходимости решения. Конечно-элементная модель представлена на рис. 2.

Приближенная формула для вычисления собственных частот  $\Omega$  цилиндрических оболочек с учетом

внутреннего давления  $q$  получена в [24] и имеет вид

$$\Omega = \frac{(1-v^2)\lambda^4 + k(\lambda^2 + m^2)^4 + \Psi_1(\lambda^2 + m^2)^2(m^2 - 1)}{m^4 + \lambda^4 + (1 + 2\lambda^2)m^2} + \frac{\Psi_2(\lambda^6 + \lambda^2 m^4 + 2\lambda^4 m^2)}{m^4 + \lambda^4 + (1 + 2\lambda^2)m^2}, \quad (6)$$

где  $m$  – число волн по окружности поперечного сечения оболочки;  $n$  – число полуволн по длине оболочки;

$$\lambda = \frac{n\pi r}{l}; \quad v - \text{коэффициент Пуассона}; \quad \Psi_1 = \frac{qr(1-v^2)}{Eh};$$

$E$  – модуль упругости;  $q$  – гидростатическое давление;

$$N_x - \text{единичная продольная сила}; \quad \Psi_2 = \frac{N_x(1-v^2)}{Eh};$$

$$k = \frac{h^2}{12r^2}.$$

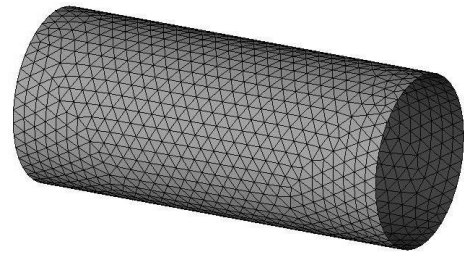


Рисунок 2 – Конечно-элементная модель цилиндрической оболочки

В табл. 1 приводятся частоты колебаний, полученные на основе предлагаемого подхода –  $f$ , аналитического решения –  $f_{\text{теор}}$  (6), а также экспериментальные данные –  $f_{\text{экс}}$  [24], где  $m$  – количество узловых меридианов.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки

$m$	Аналитическое решение [24], $f_{\text{теор}}$ , Гц	Экспериментальные данные [24], $f_{\text{экс}}$ , Гц	Предлагаемый подход давления при внутреннем давлении, $f$ , Гц	Предлагаемый подход при воздействии внешнего давления, $f$ , Гц
$q = 0$ (вакуум)				
4	233	266	268	–
3	273	280	298	–
6	405	436	395	–
$q = 0,196$ МПа				
3	329	374	357	126
4	346	410	392	128
6	568	-	543	129
$q = 0,392$ МПа				
3	378	400	425	269
$q = 0,588$ МПа				
3	420	412	456	215

Анализ данных расчета показывает, что внутреннее давление приводит к увеличению собственных частот колебаний цилиндрической оболочки. Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и экспериментальными данными, составляет от 0,5 до 11 %, а между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и рассчитанными по формуле (6), составляет от 0,9 до 15 %.

При воздействии внешнего давления  $q = 0,196$  МПа первая собственная частота составляет 126 Гц (а ее значение в вакууме – 268 Гц, а при внутреннем давлении – 357 Гц (см. табл. 1)). Видно, что внутреннее давление приводит к увеличению собственных частот, а внешнее их снижает.

Далее исследуются свободные колебания крышки гидротурбины. На рис. 3 показан сектор крышки с углом раствора  $90^\circ$ . Крышка изготавливается из листового проката стали. Ее габаритные размеры таковы: диаметр – 3,44 м, высота – 1,05 м.

Вводятся условия закрепления крышки по опорной поверхности фланца, соединяющего ее со статорным кольцом, которое считается абсолютно жестким, вдоль окружности, на которой расположены шпильки фланцевого соединения.

На крышку действует вес генератора и рабочего колеса  $P = 2,45 \cdot 10^5$  Н, приложенный к поверхности

верхнего кольца. К днищу приложено гидравлическое давление  $q_2 = 0,0965$  МПа и  $q_1 = 0,1254$  МПа. Схема нагружения и закрепления конструкции показаны на рис. 4.

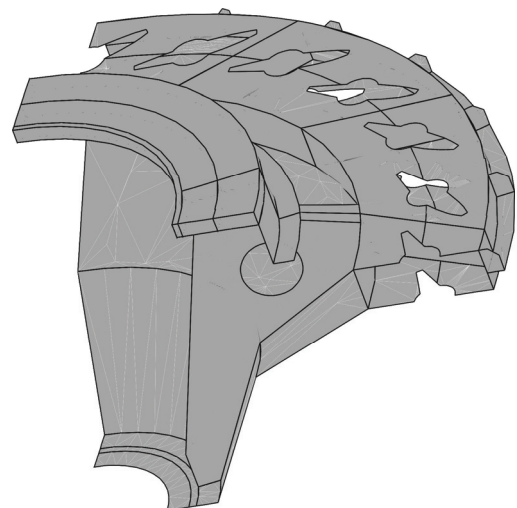


Рисунок 3 – Сектор крышки гидротурбины

Конечноэлементная модель крышки гидротурбины с объемом воды представлена на рис. 5. На рисунке обозначено:  $D$  – диаметр,  $H$  – глубина объема воды.

Наибольший интерес представляет первая собст-

венная частота, так как она наиболее близка к частоте возмущения. Значение первой частоты в вакууме составляет 25,45 Гц, а ее форма показана на рис 6.

Значение второй собственной частоты в вакууме составляет 28,56 Гц, а ее форма показана на рис. 7

При исследовании собственных колебаний

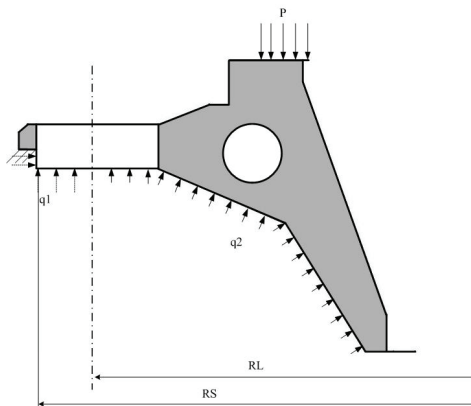


Рисунок 4 – Схема нагружения и закрепления конструкции

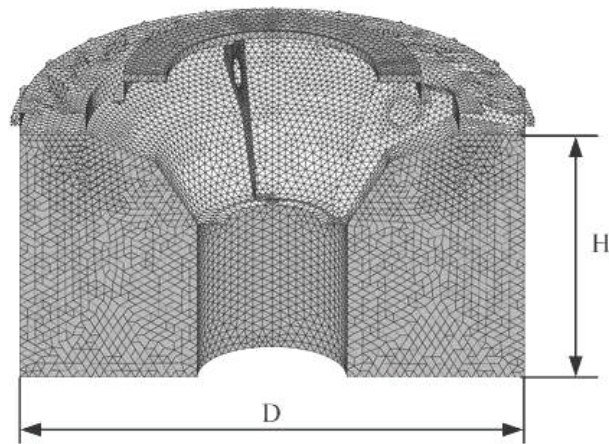


Рисунок 5 – Разрез крышки гидротурбины с объемом воды

Таблица 2 – Результаты численного исследования

Частота (Гц) с учетом влияния эксплуатационных факторов	Глубина воды, м							
	0,000	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	6,200
Влияние воды и учет массы оборудования 250т, без учета предварительно напряженного состояния	25,455	24,483	23,428	22,421	21,464	20,556	19,696	19,530
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от массы оборудования 250т*2	18,182	17,830	17,438	17,050	16,665	16,283	15,904	15,828
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от массы оборудования 250т*1,5	20,920	20,383	19,788	19,205	18,635	18,076	17,531	17,423
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от массы оборудования 250т*1	25,444	24,474	23,421	22,416	21,460	20,554	19,696	19,530
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от массы оборудования 250т*1	35,259	32,681	30,092	27,833	25,867	24,150	22,645	22,365
Влияние воды и с учетом предварительно напряженного состояния от давления воды q*2	25,430	24,459	23,405	22,400	21,445	20,539	19,681	19,515
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от давления воды q*1,5	25,437	24,466	23,413	22,408	21,453	20,546	19,689	19,523
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от давления воды q*2 q*1	25,444	24,474	23,421	22,416	21,460	20,554	19,696	19,530
Влияние воды и учет предварительно напряженного состояния от давления воды q*2*0,5	25,452	24,482	23,429	22,424	21,468	20,562	19,703	19,537
Без учета давления от массы оборудования 250т	99,193	60,563	45,57	37,7	32,649	29,05	26,31	25,833

Изменение массы  $M$  оказывает существенное влияние на собственную частоту. В то же время, изменение давления  $Q$  на частоту  $\omega$  практически не влияет. С увеличением глубины  $H$  частота гидроупругих колебаний снижается, а влияние глубины объема

воды  $H$  проявляется более существенно при отсутствии массы оборудования  $M$ , расположенного на крышке. При наличии массы  $M$  влияние предварительно напряженного состояния проявляется слабо.

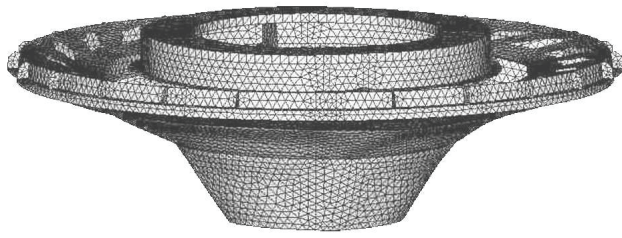


Рисунок 6 – Зонтичная форма собственных колебаний соответствующая первой частоте

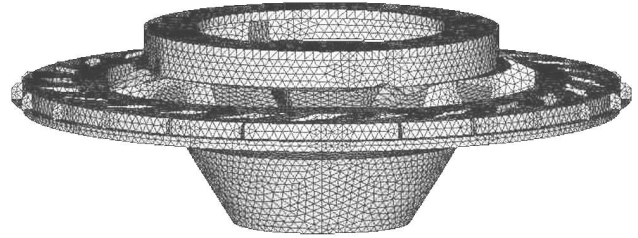


Рисунок 7 – Форма собственных колебаний соответствующая второй частоте

**Выводы.** В статье представлена комплексная методика расчета собственных частот колебаний конструкций в вакууме и при взаимодействии с водой, а также с учетом инерционных сил от массы оборудования расположенного на крышке и предварительно напряженного состояния конструкции.

Исследовано изменение собственной частоты с учетом внешнего и внутреннего давления. Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и экспериментальными данными, составляет от 0,5 до 11 %. Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и рассчитанными по формуле (6), составляет от 0,9 до 15 %.

На основе представленной методики проведен анализ влияния факторов на первую собственную частоту колебаний конструкции крышки гидротурбины в вакууме и с учетом влияния воды и с учетом предварительно напряженного состояния конструкции.

#### Список литературы

1. Zhang L. Hydrodynamic design of diversion cover for a tidal-stream hydro turbine / L. Zhang, K. Sun, Q.-J. Luo // Journal of Harbin Engineering University. – 2007. – Vol. 28, no. 7. – P. 734-737.
2. Angra S. Structural Analysis of Hydro-Turbine Head Cover Using Ansys / S. Angra, M. Kumari, V. Kumar // International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. – 2015. – Vol. 2., no 3. – P. 777.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М.: Наука, 1982. – 448 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 480 с.
5. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган // М.: Мир, 1986. – 318 с.
6. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
7. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.Н. Киричевский, И. Альтенбах, У. Габберт, Ю. Данкерт, Х. Кепплер, З. Кочык. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.
8. Кантор Б.Я. Эффективный метод определения напряженно-деформированного состояния конструкций из оболочек или тел вращения, подкрепленных регулярной системой радиальных пластин при несимметричном радиальном и осевом нагружении / Б.Я. Кантор, В.М. Миткевич // АН УССР, Ин-т проблем машиностроения. – Х.: 1985. – 16 с. – Деп. в ВИНТИ 26.03.85, № 2484.
9. Миткевич В.М. Применение метода конечных элементов и разложений Фурье к расчету циклически симметричных конструкций из тел вращения и радиальных пластин / В.М. Миткевич, Т.Ф. Медведевская / АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – Х.: 1981. – 47 с. – Деп. в ВИНТИ 2.07.81, №3251.

10. Кантор Б.Я. Исследование динамики циклически симметричных несущих конструкций гидротурбин / Б.Я. Кантор, И.С.Веремеенко // Совершенствование физического моделирования: тр. междунар. науч.-техн. конф. – Х.: ИПМаш НАН Украины, 1997. – С. 503–506.

11. Медведевская Т.Ф. Прочность, динамика и ресурс несущих конструкций гидротурбин / Т.Ф. Медведевская, О.Н. Зеленская, А.В. Медведевский // Проблемы машиностроения. – 2007. – 10, № 3. – С. 49–55.

12. Веремеенко И.С. Конечно-элементный анализ прочностных и динамических характеристик крупногабаритных несущих конструкций гидротурбин / И.С. Веремеенко, О.Н. Зеленская // Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования: тр. междунар. науч.-техн. конф. – Х.: ИПМаш НАН Украины, 2000. – С. 502–508.

13. Медведевская Т.Ф. Метод конечных элементов в задаче определения радиальной жесткости циклически симметричных несущих конструкций гидротурбин / Т.Ф. Медведевская, А.В. Медведевский // Проблемы машиностроения. – 1999. – 2, № 1–2. – С. 58-63.

14. Кантор Б.Я. К теории собственных колебаний конструкций, содержащих жидкость / Б.Я. Кантор, Е.А. Стрельникова // Доповіді Національної Академії Наук України. – 2001. – № 10. – С. 61-65.

15. Medvedovskaya T. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers / T. Medvedovskaya, E. Strelnikova, K. Medvedyeva // Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJEART). – 2015. – Vol. 1, No 1. – P. 45–50. – DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961

16. Strelnikova E.A. Use of Computer Technologies in Modernization of Head Covers for ПЛ 20-B-500 Kaplan Turbines / E.A. Strelnikova, T.F. Medvedovskaya, E.L. Medvedeva, F.V. Linnik, O.N. Zelenskaya // J. Mech. Eng. – 2018. – Vol. 21, No 1. – P. 35-44.

17. Шульман С.Г. Собственные колебания прямоугольной пластины в жидкости / С.Г. Шульман. – Л.: Энергия, 1968. – 248 с.

18. Шмаков В.Н. К вычислению собственных колебаний жидкости в неподвижных сосудах / В.Н. Шмаков // Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью. – Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1978. – С. 157–162.

19. Линьков А.М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости / А.М. Линьков. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.

20. Ткачева Л.А. Расчет колебаний лопастей осевых гидротурбин в потоке / Л.А. Ткачева // Аэроупругость лопаток турбомашин: сб. науч. трудов. – К.: Наукова думка, 1985. – С. 308–310.

21. Chen Z. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery / Z. Chen, J. Wang, H. Liu // J. Fluids Eng. – 1999. – Vol. 121, № 4. – P. 804–807.

22. Chen J.T. Review of Dual Integral Representations with Emphasis on Hypersingularity and Divergent Series / J.T. Chen, H.-K. Hong // Applied Mechanics Review ASME. – 1999. – Vol. 52, № 1. – P.17–33.

23. Sima C. Applications of Oseenlet boundary element method in viscous fluid-structure coupling motion problems / C. Sima, X. Zhang, Y. Wu // Chuanbo Lixue. – 1999. – Vol. 3, № 3. – P. 36-39.

24. Бреславский В.Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления / В.Е. Бреславский // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. – 1956. – № 12. – С. 117-120.

25. Бреславский В.Е. Собственные колебания цилиндрических и конических оболочек, находящихся под действием нормального давления / В.Е. Бреславский // Тр. ХВАИВУ. – 1957. – Вып. 65. – 14 с.

### References (transliterated)

1. Zhang L., Sun K., Luo Q.-J. Hydrodynamic design of diversion cover for a tidal-stream hydro turbine. Journal of Harbin Engineering University. 2007. Vol. 28, no. 7. P. 734-737.

2. Angra S., Kumari M., Kumar V. Structural Analysis of Hydro-Turbine Head Cover Using ANSYS. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering. 2015. Vol. 2., no 3. p. 777.

3. Bate K., Vilson E. Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov. Moscow: Nauka, 1982. 448 p.

4. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. Moscow: Mir, 1975. 480 p.

5. Zenkevich O., Morgan K. Konechnyye elementy i ap-proksimatsiya. Moscow: Mir, 1986. 318 p.

6. Gallager R. Metod konechnykh elementov. Osnovy. Moscow: Mir, 1984. 428 p.

7. Sakharov A.S., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.N., Al'tenbakh I., Gabbert U., Dankert Yu., Keppler Kh., Kochyk Z. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel. Kyiv: Vishcha shk., 1982. 480 p.

8. Kantor B.Ya., Mitkevich V.M. Effektivnyy metod opredeleniya napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya konstruktivnykh iz obolochek ili tel vrashcheniya, podkreplennykh regulyarnoy sistemoy radial'nykh plastin pri nesimmetrichnom radial'nom i osevom nagruzhennii. AN USSR, In-t problem mashinostroeniya. Kharkiv, 1985. 16 p. Dep. v VINITI 26.03.85, № 2484.

9. Mitkevich V.M., Medvedovskaya T.F. Primenenie metoda konechnykh elementov i razlozheniy Fur'e k raschetu tsiklicheski simmetrichnykh konstruktivnykh iz tel vrashcheniya i radial'nykh plastin. AN USSR. In-t probl. mashinostroeniya. Kharkiv, 1981. 47 p. Dep. v VINITI 2.07.81, №3251.

10. Kantor B.Ya., Veremeenko I.S. Issledovanie dinamiki tsiklicheski simmetrichnykh nesushchikh konstruktivnykh gidroturbin. Sovershenstvovanie fizicheskogo modelirovaniya: tr. mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. Kharkiv: IPMash NAN Ukrainy, 1997. P. 503–506.

11. Medvedovskaya T.F., Zelenskaya O.N., Medvedovskiy A.V. Prochnost', dinamika i resurs nesushchikh konstruktivnykh

gidroturbin. Probl. mashinostroyeniya. 2007. 10, № 3. P. 49–55.

12. Veremeenko I.S., Zelenskaya O.N. Konechno-elementnyy analiz prochnostnykh i dinamicheskikh kharakteristik krupnogaba-ritnykh nesushchikh konstruktivnykh gidroturbin. Sovershenstvovanie turbostanovok metodami matematicheskogo i fizicheskogo modelirovaniya: tr. mezhdunar. nauch.-tekhn. konf. Kharkiv: IPMash NAN Ukrainy, 2000. P. 502-508.

13. Medvedovskaya T.F., Medvedovskiy A.V. Metod konechnykh elementov v zadache opredeleniya radial'noy zhestkosti tsiklicheski simmetrichnykh nesushchikh konstruktivnykh gidroturbin. Probl. mashinostroyeniya. 1999. 2, № 1–2. P. 58-63.

14. Kantor B.Ya., Strel'nikova E.A. K teorii sob-stvennykh kolebaniy konstruktivnykh, soderzhashchikh zhidkost'. Dopovidi Natsional'noi Akademii Nauk Ukraini. 2001. No 10. P. 61-65.

15. Medvedovskaya T., Strelnikova E., Medvedyeva K. Free Hydroelastic Vibrations of Hydroturbine Head Covers. Intern. J. Eng. and Advanced Research Technology (IJERT). 2015. Vol. 1, No 1. P. 45-50. DOI 10.13140/RG.2.1.3527.4961

16. Strelnikova E.A., Medvedovskaya T.F., Medvedeva E. L., Linnik F.V., Zelenskaya O.N. Use of Computer Technologies in Modernization of Head Covers for PJI 20-B-500 Kaplan Turbines. J. Mech. Eng. 2018. Vol. 21, No 1. P. 35-44.

17. Shul'man S.G. Sobstvennyye kolebaniya pryamougol'noy plastiny v zhidkosti. Leningrad: Energiya, 1968. 248 p.

18. Shmakov V.N. K vychisleniyu sobstvennykh kolebaniy zhidkosti v nepodviznykh sosudakh. Dinamika uprugikh i tverdykh tel, vzaimodeystviyushchikh s zhidkost'yu. – Tomsk: Izd-vo Tomsk. un-ta, 1978. P. 157-162.

19. Lin'kov A.M. Kompleksnyy metod granichnykh integral'nykh uravneniy teorii uprugosti. Sankt Petersburg: Nauka, 1999. 382 p.

20. Tkacheva L.A. Raschet kolebaniy lopastey osevykh gidroturbin v potoke. Aerouprugost' lopa-tok turbomashin: sb. nauch. trudov. Kyiv: Naukova dumka, 1985. P. 308-310.

21. Chen Z., Wang J., Liu H. Three-dimensional numerical analysis of flow-induced vibration in turbomachinery. J. Fluids Eng. 1999. Vol. 121, No 4. P. 804-807.

22. Chen J.T., Hong H.-K. Review of Dual Integral Representations with Emphasis on Hypersingularity and Divergent Series. Applied Mechanics Review ASME. 1999. Vol. 52, No 1. P. 17-33.

23. Sima C., Zhang X., Wu Y. Applications of Oseenlet boundary element method in viscous fluid-structure coupling motion problems. Chuanbo Lixue. 1999. Vol. 3, No 3. P. 36-39.

24. Breslavskiy V.E. Sobstvennyye kolebaniya krugovoy tsilindricheskoy obolochki, nakhodyashcheyasya pod deystviem gidrostaticheskogo davleniya. Izvestiya Akademii nauk SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk. 1956. No 12. P. 117-120.

25. Breslavskiy V.E. Sobstvennyye kolebaniya tsilindricheskikh i konicheskikh obolochek, nakhodyashchikhsya pod dey-stviem normal'nogo davleniya. Tr. KhVAIVU. 1957. Vol. 65. 14 p.

Поступила (received) 30.10.2018

### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Сметанкіна Наталія Володимирівна (Сметанкина Наталья Владимировна, Smetankina Natalia Volodymyrivna)** – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, завідувач відділу вібраційних і термоміцнісних конструкцій, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків; тел. (057) 349-47-19, 349-47-55; e-mail: nsmet@ipmach.kharkov.ua, nsmetankina@ukr.net

**Місюра Сергій Юрійович (Мисюра Сергей Юрьевич, Misura Serhii Yuriyovych)** – кандидат технічних наук, науковий співробітник відділу вібраційних і термоміцнісних конструкцій, Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків; тел. (057) 349-47-04; e-mail: misurasy@gmail.com

**Линник Олександр Васильович (Линник Александр Васильевич, Lynnyk Oleksandr Vasylovych)** – головний конструктор гідротурбін, АТ «Турбоатом», Харків; тел. (057) 349-21-71, e-mail: lynnyk@turboatom.com.ua