ISSN 2078-9130

УДК 534.1:539.3 DOI: https://doi.org/10.20998/2078-9130.2018.38.152479

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО УДАР В'ЯЗКОПРУЖНОГО ТІЛА ПО НЕРУХОМОМУ ПІВПРОСТОРУ

Розглянуто ударну взаємодію в'язкопружного тіла, обмеженого квадратичним параболоїдом в зоні контакту з абсолютно жорстким нерухомим півпростором, який має плоску граничну поверхню. Введено припущення, що сила опору деформуванню тіла, яке вдаряє, залежить не тільки від його пружних характеристик, а і від квадрату швидкості його центру мас. Додатково використано відомі залежності Г.Герца стосовно розподілу контактних деформацій і динамічного тиску. За цих припущень перший інтеграл нелінійного диференціального рівняння руху другого порядку виражено в елементарних функціях. В таких же функціях одержано і вирази для максимумів: динамічного стискання, зусилля удару, розмірів еліптичної площадки контакту, тиску в центрі цієї площадки. Дослідженням на екстремум встановлено, що при в'язкопружному ударі максимуми сили удару і контактного тиску можуть досягатись не в кінці етапу стискання тіл, а дещо раніше, в ході цього процесу. Виведена умова, коли максимуми сил в'язкопружного і пружного ударів однакові. Вона пов'язана з коефіцієнтом в'язкості та квадратом швидкості зіткнення тіл. Показано, що в кінці етапу стискання сила удару і контактний тиск при в'язкопружному ударі можуть бути значно менші максимальних, а також тих, до яких призводить теорія удару ідеально пружних тіл. Виведено компактну формулу для обчислення коефіцієнта відновлення швидкості при прямому центральному ударі. Показано, що він залежить від коефіцієнтів в'язкості на стискання та розтискання та від квадрату швидкості зіткнення тіл. Зі збільшенням цих величин відбувається зменшення коефіцієнта відновлення швидкості. Тривалості у часі етапів стискання та розтискання подано невласними збіжними інтегралами другого роду, які не виражаються аналітичного через відомі функції. Підінтегральні функції в них мають алгебраїчну особливість порядку 1/2. Тому рекомендовано виділяти сингулярну частину в квадратурах і інтегрувати її аналітично, а регулярну частину обчислювати на комп'ютері. Наведено приклади розрахунків і проведено порівняльний аналіз числових результатів.

Ключові слова: механічний удар, в'язкопружне тіло, нерухомий недеформівний півпростір, сила і тиск, коефіцієнт відновлення швидкості, нелінійне диференціальне рівняння, аналітичний розв'язок.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ

ОБ УДАРЕ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПО НЕПОДВИЖНОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

Рассмотрено ударное взаимодействие вязкоупругого тела, ограниченного квадратичным параболоидом в зоне контакта с абсолютно жестким неподвижным полупространством, имеющим плоскую граничную поверхность. Введено предположение, что сила сопротивления деформированию тела, которое ударяет, зависит не только от его упругих характеристик, а и от квадрата скорости его центра масс. Дополнительно использовано известные зависимости Г.Герца по распределению контактных деформаций и динамического давления. В этих предположениях первый интеграл нелинейного дифференциального уравнения движения второго порядка выражено в элементарных функциях. В таких же функциях получено выражение и для максимумов: динамического сжатия, усилия удара, размеров эллиптической площадки контакта, давления в центре этой площадки. Исследованием на экстремум установлено, что при вязкоупругом ударе максимумы силы удара и контактного давления могут достигаться не в конце этапа сжатия тел, а несколько раньше в ходе этого процесса. Выведено условие, когда максимумы сил вязкоупругого и упругого ударов одинаковые. Оно связано с коэффициентом вязкости и квадратом скорости столкновения тел. Показано, что в конце этапа сжатия сила удара и контактное давление при вязкоупругом ударе могут быть значительно меньше максимальных, а также тех, к которым приводит теория удара идеально упругих тел. Выведено компактную формулу для вычисления коэффициента восстановления скорости при прямом центральном ударе. Показано, что он зависит от коэффициентов вязкости на сжатие и расжатие и от квадрата скорости столкновения тел. С возрастанием этих величин происходит уменьшение коэффициента восстановления скорости. Продолжительности во времени этапов сжатия и расжатия представлено несобственными сходящимися интегралами второго рода, которые не выражаются аналитически через известные функции. Подинтегральные функции в них имеют алгебраическую особенность порядка 1/2. Поэтому рекомендовано выделять сингулярную часть в квадратурах и интегрировать ее аналитически, а регулярную часть вычислять на компьютере. Приведено примеры расчетов и проведен сравнительный анализ числовых результатов.

Ключевые слова: механический удар, вязкоупругое тело, неподвижное недеформируемое полупространство, сила и давление, коэффициент восстановления скорости, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитическое решение.

V.P. OLSHANSKIY

ABOUT THE IMPACT OF A VISCOELASTIC ON A FIXED SEMI-SPACE

The impact interaction of a viscoelastic body bounded by a quadratic paraboloid in the contact zone with an absolutely rigid fixed half-space having a flat boundary surface is considered. We have introduced the assumption that the force of resistance to the deformation of a body that hits depends not only on its elastic characteristics, but also on the square of the velocity of its center of mass. Additionally, the well-known dependences of G. Hertz on the distribution of contact deformations and dynamic pressure were used. Under these assumptions, the first integral of a non-linear differential equation of motion of the second order is expressed in elementary functions. In the same functions, the expression for the maxima was obtained: dynamic compression, impact force, dimensions of the elliptical contact area, pressure at the center of this area. An extremum study has established that with a viscoelastic impact, the maxima of the impact force and contact pressure can be reached not at the end of the body compression phase, but somewhat earlier during this process. A condition is derived when the maxima of the forces of viscoelastic and elastic impacts are the same. It is related to the coefficient of viscosity and the square of the velocity of the collision of bodies. It is shown that at the end of the compression stage, the impact force and the contact pressure during viscoelastic impact can be significantly less than the maximum, as well as those that the theory of impact of perfectly elastic bodies leads to. A compact formula for calculating the coefficient of speed recovery with a direct central impact is derived. It is shown that it depends on the coefficients of viscosity for compression and decompression and on the square of the velocity of collision of bodies. With the increase of this value, the speed recovery coefficient decreases. The duration in time of the stages of compression and expansion are represented by improper convergent integrals of the second kind, which are not expressed analytically in terms of known functions. The integrands in them have an algebraic singularity in the series 1/2. Therefore, it is recommended to single out the singular part in quadratures and integrate it analytically, and calculate the regular part on a computer. Examples of calculations are given and a comparative analysis of numerical results is carried out.

Keywords: mechanical shock, viscoelastic body, fixed non-deformable half-space, force and pressure, speed recovery factor, nonlinear differential equation, analytical solution.

Постановка проблеми та мета дослідження. Задачі ударної взаємодії в'язкопружних тіл з жорсткою перешкодою значно більшої маси (півпростором) виникають при моделюванні процесу розділення зернових сумішей за пружними властивостями [1-2]. Саме з цих міркувань в [2] досліджено центральний частково непружний удар кулі з площиною, а також ідеться про визначення коефіцієнта відновлення швидкості. Значення коефіцієнта відновлення швидкості при ударі об деку сепаратора суттєво впливає на процес сепарування насіння в вібросепараторах, в падi-машинах і других пристроях для розділення сипких сумішей. Відомо, що за класичною теорією Г. Герца [3-4] цей коефіцієнт дорівнює одиниці, що не підтверджується практикою, бо насправді він менший одиниці. Тому потрібна модернізація вказаної теорії при використанні в моделях сепарування насіння, враховуючи її можливості в частині визначення зусиль і тисків при ударі, потрібних для аналізу травмування зерна. Один із можливих варіантів модернізації класичної теорії полягає в заміні ідеально пружного рухомого тіла на в'язкопружне, оскільки зволожені тіла рослинного походження (зерна, плоди овочів, фруктів та ін.) схильні за властивостями до в'язкопружних. Вказаним зумовлена мета дослідження.

Метою статті є розробка математичної моделі удару в'язкопружного тіла з криволінійною граничною поверхнею об жорстку, плоску, нерухому перешкоду та аналіз впливу в'язкості на процес удару.

Постановка задачі та її розв'язок. Рух тіла, що вдаряє, після зіткнення з півпростором описуємо диференціальним рівнянням:

$$M\,\ddot{x}+\beta\left[1-(-1)^j\lambda_j\cdot\dot{x}^2\right]x^{3/2}=0\,. \qquad (1)$$

Тут M – маса рухомого тіла; $x=x(t)$ – переміщення його центру мас; β – коефіцієнт, який залежить від характеристик пружності рухомого тіла і його геометрії; $\lambda_{1,2}$ – коефіцієнти в'язкості відповідно при стисканні ($j=1$) і розтисканні ($j=2$) тіл в ході удару; крапка над x означає похідну за часом t.

Для обчислення коефіцієнту β використовуємо відомий розв'язок контактної задачі теорії пружності [5-6] у відповідності до якого:

$$\beta=\frac{E}{1-\nu^2}\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}R_1^{1/2}\frac{\left[D(\varepsilon)\right]^{1/2}}{\left[K(\varepsilon)\right]^{3/2}}\,. \qquad (2)$$

Тут E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона в'язкопружного тіла; R_1 – більший із радіусів головних кривизн його граничної поверхні; ε – ексцентриситет еліптичної площадки контакту двох тіл; $D(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\left[K(\varepsilon)-L(\varepsilon)\right]$; $K(\varepsilon)$, $L(\varepsilon)$ – повні еліптичні інтеграли відповідно першого та другого роду, затабульовані в [7-8].

Ексцентриситет ε залежить від відношення головних радіусів кривизни граничної поверхні R_2/R_1 і є коренем трансцендентного рівняння:

$$\left(1-\varepsilon^2\right)\frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)-D(\varepsilon)}=\frac{R_2}{R_1}\,.$$

У випадку сферичного рухомого тіла: $R_1=R_2$; $\varepsilon=0$; $D(\varepsilon)=\frac{\pi}{4}$; $K(\varepsilon)=\frac{\pi}{2}$ і формула (2) набуває вигляд [9]:

$$\beta=\frac{4}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\sqrt{R_1}\,.$$

Диференціальне рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0)=0\,,\qquad \dot{x}(0)=\upsilon\,, \qquad (3)$$

де υ – швидкість зіткнення тіл.

Далі динамічний процес поділяємо на етапи стискання і розтискання.

1. *Динамічне стискання*. Його описуємо рівнянням (1), поданим у вигляді:

$$\dot{x}\frac{d\,\dot{x}}{d\,x}=-\frac{\beta}{M}\left(1+\lambda_1\dot{x}^2\right)x^{3/2}\,. \qquad (4)$$

Після розділення змінних в (4), інтегруванням отримуємо:

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+\lambda_1\dot{x}^2\right)=c_1-\frac{2}{5}\frac{\beta}{M}x^{5/2}\,.$$

Тут c_1 – довільна стала. Умова (3) виконується, коли $c_1=\frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+\lambda_1\upsilon^2\right)$. Тому перший інтеграл рівняння (4) набуває форму:

$$\ln\frac{1+\lambda_1\dot{x}^2}{1+\lambda_1\upsilon^2}=-\frac{4\beta\lambda_1}{5M}x^{5/2}\,,$$

звідки одержуємо формулу швидкості руху:

$$\dot{x} = \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \left[\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \exp\left(-\frac{4\beta\lambda_1}{5M} x^{5/2} \right) - 1 \right] \right\}^{1/2}. \qquad (5)$$

Якщо $\lambda_1 \to 0$, то граничний перехід в (5) дає:

$$\dot{x} = \left(\upsilon^2 - \frac{4\beta}{5M} x^{5/2} \right)^{1/2},$$

що узгоджується з [9], де розглядали ідеально пружний удар.

При досягненні максимума $x = x_C$ в кінці етапу стискання швидкість $\dot{x} = 0$. Тому, згідно з (5), цей максимум становить:

$$x_c = \left[\frac{5M}{4\beta\lambda_1} \ln\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \right]^{2/5}. \qquad (6)$$

Якщо $\lambda_1 \to 0$, то без урахування в'язкості:

$$x_c = \left(\frac{5M\upsilon^2}{4\beta} \right)^{2/5}.$$

Оскільки $\frac{1}{\lambda_1} \ln\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) < \upsilon^2$, то при урахуванні в'язкості максимум зближення центрів мас тіл менший ніж той, що дає теорія удару ідеально пружних тіл.

Для обчислення сили удару F маємо формулу:

$$F = \beta\left(1 + \lambda_1 \dot{x}^2\right) x^{3/2}. \qquad (7)$$

В кінці процесу стискання ($t = t_C$) ця сила дорівнює:

$$F = F_c = \beta x_c^{3/2} = \beta \left[\frac{5M}{4\beta\lambda_1} \ln\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \right]^{3/5}, \qquad (8)$$

а тиск q_C в центрі площадки контакту становить:

$$q_c = \frac{3}{2} \frac{F_c}{\pi a_c b_c}.$$

При цьому:

$$a_c = \left[2R_1 \frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)} x_c \right]^{1/2}; \; b_c = a_c \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

У випадку удару кулею радіуса R_1:

$$a_c = b_c = \left(R_1 x_c\right)^{1/2}.$$

Тривалість етапу стискання t_C виражається збіжним невласним інтегралом другого роду:

$$t_c = \int_0^{x_c} \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \left[\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \exp\left(-\frac{4\beta\lambda_1}{5M} x^{5/2} \right) - 1 \right] \right\}^{-1/2} dx.$$

Його доводиться обчислювати на комп'ютері, виділивши сингулярність підінтегральної функції при $x = x_C$.

Зазначимо, що при певних варіантах в'язкопружного удару F_C, q_C не є максимальними. Максимуму ці величини досягають не в кінці етапу стискання, а дещо раніше, щоб переконатись у цьому, дослідимо на екстремум вираз (7). Взявши похідну з нього по x і прирівнявши її до нуля, отримуємо:

$$\frac{dF}{dx} = \beta \left[2\lambda_1 \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} x^{3/2} + \left(1 + \lambda_1 \dot{x}^2\right) \frac{3}{2} x^{1/2} \right] = 0.$$

Звідки випливає, що:

$$4\lambda_1 \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} x + 3\left(1 + \lambda_1 \dot{x}^2\right) = 0$$

або з урахуванням (4):

$$\lambda_1 \frac{\beta}{M} x^{5/2} = \frac{3}{4}.$$

Отже максимум зусилля удару F_e маємо при:

$$x = x_e = \left(\frac{3}{4} \frac{M}{\lambda_1 \beta} \right)^{2/5};$$

$$\dot{x} = \dot{x}_e = \left\{ \frac{1}{\lambda_1} \left[\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \exp(-0{,}6) - 1 \right] \right\}^{1/2}$$

і його обчислення зводиться до формули:

$$F_e = \beta\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \exp(-0{,}6) \cdot \left(\frac{3}{4} \frac{M}{\lambda_1 \beta} \right)^{3/5}. \qquad (9)$$

При цьому максимальний диск q_e в центрі площадки становить:

$$q_e = \frac{3}{2} \frac{F_e}{\pi a_e b_e},$$

де $a_e = \left[2R_1 \frac{D(\varepsilon)}{K(\varepsilon)} x_e \right]^{1/2}$; $b_e = a_e \sqrt{1 - \varepsilon^2}$.

Розглянутий екстремум реалізується лише при виконанні умови:

$$\lambda_1 > \frac{3}{5\upsilon^2}.$$

У випадку менших λ_1 максимум сила удару досягається в кінці процесу стискання, як і при пружному ударі.

Щоб з'ясувати, коли максимум зусилля в'язкопружного і пружного ударів одинакові розв'яжемо рівняння:

$$F_e = F_c\big|_{\lambda_1 = 0}.$$

З урахуванням (8), (9), йому надаємо форму:

$$\beta\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) \left(\frac{3M}{4\lambda_1 \beta e} \right)^{3/5} = \beta \left(\frac{5M\upsilon^2}{4\beta} \right)^{3/5}.$$

У підсумку отримуємо трансцендентне рівняння з невідомим $\lambda_1 \upsilon^2$:

$$\left(1 + \lambda_1 \upsilon^2\right) = \left(\frac{5e}{3} \lambda_1 \upsilon^2 \right)^{3/5}.$$

Воно має наближений розв'язок:

$$\lambda_1 \upsilon^2 = 6{,}86335.$$

При виконанні цієї умови максимуми сил в'язкопружного і пружного ударів однакові.

Якщо $0{,}6/\upsilon^2 < \lambda_1 < 6{,}86335/\upsilon^2$, то при в'язкопружному ударі максимум контактної сили менший ніж при пружному ударі. У випадку $\lambda_1 > 6{,}865335/\upsilon^2$ маємо супротивну нерівність.

1. *Динамічне розтискання*. Цей процес описуємо диференціальним рівнянням:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\beta}{M} \left(1 - \lambda_2 \dot{x}^2\right) x^{3/2}, \qquad (10)$$

при початковій умові:

$$\dot{x} = 0 \text{ при } x = x_c \qquad (11)$$

та обмеженні: $1 - \lambda_2 \dot{x}^2 > 0$.

Розділивши змінні в (10), інтегруванням отримуємо:

$$-\frac{1}{2\lambda_2}\ln\left(1-\lambda_2\dot{x}^2\right) = c_2 - \frac{2}{5}\frac{\beta}{M}x^{5/2}.$$

Умова (11) виконується, коли довільна стала $c_2 = \frac{2}{5}\frac{\beta}{M}x_c^{5/2}$. Тому:

$$\ln\left(1-\lambda_2\dot{x}^2\right) = \frac{4}{5}\frac{\beta\lambda_2}{M}\left(x^{5/2} - x_c^{5/2}\right).$$

Подальше перетворення дає формулу швидкості на етапі розтискання:

$$\dot{x} = -\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left[1 - \exp\left(\frac{4\beta\lambda_2}{5M}\left(x^{5/2} - x_c^{5/2}\right)\right)\right]\right\}^{1/2}.$$

В кінці цього етапу швидкість дорівнює:

$$\dot{x} = u = -\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left[1 - \exp\left(-\frac{4\beta\lambda_2}{5M}x_c^{5/2}\right)\right]\right\}^{1/2},$$

або з урахуванням виразу (6):

$$u = -\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left[1 - \left(1 + \lambda_1\upsilon^2\right)^{-\lambda_2/\lambda_1}\right]\right\}^{1/2}.$$

Таким чином, у відповідності з розтягнутою теорією, коефіцієнт відновлення швидкості при ударі K подається формулою:

$$K = \frac{|u|}{\upsilon} = \left\{\frac{1}{\lambda_2\upsilon^2}\left[1 - \left(1 + \lambda_1\upsilon^2\right)^{-\lambda_2/\lambda_1}\right]\right\}^{1/2}.$$

Він залежить від значень коефіцієнтів в'язкості та від квадрату швидкості зіткнення тіл. Графічно ця залежність для чотирьох відношень λ_2/λ_1 подана на рис. 1.

Зі зростанням відношення λ_2/λ_1 послаблюється залежність K від $\lambda_1\upsilon^2$.

Для визначення тривалості етапу розтискання треба комп'ютером обчислити інтеграл:

$$t_p = \int_0^{x_c}\left\{\frac{1}{\lambda_2}\left[1 - \exp\left(\frac{4\beta\lambda_2}{5M}\left(x^{5/2} - x_c^{5/2}\right)\right)\right]\right\}^{-1/2} dx,$$

у якому підінтегральна функція сингулярна при $x = x_C$.

Числові результати. Розрахунки проведено при $M = 10^{-2}$ кг; $\beta = 10^6$ Па м$^{1/2}$; $R_1 = R_2 = 10^{-2}$ м; $\upsilon = 5$ м/с. Розглянуто три варіанти удару з різними λ_1 і λ_2.

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (ідеально пружний удар). Для нього одержано: $x_c = 0{,}0025$ м; $F_c = 125$ Н; $a_c = b_c = 0{,}005$ м; $q_c = 2387324{,}15$ Па; $K = 1$.

2. $\lambda_1 = 0{,}1$ (с/м)^2; $\lambda_2 = 0{,}02$ (с/м)^2. У цьому випадку: $x_c = 0{,}001896$ м; $F_c = 82{,}5577$ Н; $a_c = b_c = 0{,}004354$ м; $q_c = 2079323{,}79$ Па; $K = 0{,}666$; $x_e = 0{,}001413$ м; $\dot{x}_e = 3{,}03454$ м/с; $F_e = 101{,}983$ Н; $a_e = b_e = 0{,}003758$ м; $q_e = 3447907{,}60$ Па.

3. $\lambda_1 = 0{,}5$ (с/м)^2; $\lambda_2 = 0{,}02$ (с/м)^2. Для такого варіанту удару: $x_c = 0{,}001335$ м; $F_c = 48{,}7548$ Н; $a_c = b_c = 0{,}003653$ м; $q_c = 1744453{,}60$ Па; $K = 0{,}445$; $x_e = 0{,}000742$ м; $\dot{x}_e = 3{,}58021$ м/с; $F_e = 149{,}77$ Н; $a_e = b_e = 0{,}002724$ м; $q_e = 9636967{,}86$ Па.

У третьому варіанті удару маємо найбільші значення F_e і q_e та найменші значення F_C і q_C.

Залежності сили удару від величини стискання графічно зображено на рис. 2.

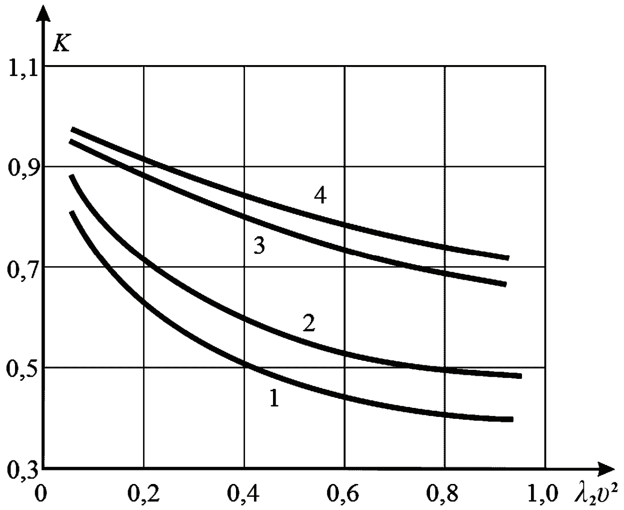

Рисунок 1 – Графіки K: 1 – $\lambda_2/\lambda_1 = 0{,}05$; 2 – $\lambda_2/\lambda_1 = 0{,}1$; 3 – $\lambda_2/\lambda_1 = 0{,}5$; 4 – $\lambda_2/\lambda_1 = 1$

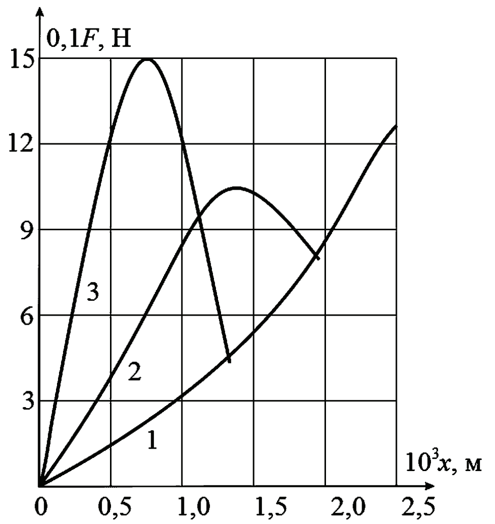

Рисунок 2 – Залежності F від x при стисканні: 1 – $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$; 2 – $\lambda_1 = 25\lambda_2 = 0{,}5$ (с/м)^2; 3 – $\lambda_1 = 5\lambda_2 = 0{,}1$ (с/м)^2

Розрахунки підтверджують що при урахуванні в'язкості сила удару може досягати максимуму не в кінці етапу стискання тіл, а дещо раніше у ході зближення центрів мас. В цьому принципова відмінність одержаних результатів від тих, що дає теорія Г. Герца.

Висновки. Запропонована математична модель дає можливість на аналітичному рівні аналізувати вплив в'язкості одного із твердих тіл на протікання процесу удару. Згідно з викладеною теорією коефіцієнт відновлення швидкості при центральному прямому ударі менший одиниці і його значення залежить від значень коефіцієнтів в'язкості та від квадрату швидкості зіткнення тіл. Збільшення швидкості удару призводить до зменшення коефіцієнта її відновлення.

Список літератури

1. *Заика П.М.* Сепарация семян по комплексу физикомеханических свойств / *П.М. Заика, Г.Е. Мазнев.* – М.: Колос, 1978. – 287 с.

2. *Богомолов А.В.* Сепарация трудноразделимых сыпучих смесей / *А.В. Богомолов.* – Х.: ХНТУСГ, 2013. – 308 с.

3. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / *В. Гольдсмит.* – М.: Стройиздат, 1965. – 447 с.

4. *Кильчевский Н.А.* Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / *Н.А. Кильчевский.* – К.: Наукова думка, 1976. – 319 с.

5. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости / *Л.С. Лейбензон.* – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 465 с.

6. *Гурняк Л.І.* Опір матеріалів / *Л.І. Гурняк, Ю.В. Гуцуляк, Т.Б. Юзків.* – Львів: Новий світ, 2005. – 364 с.

7. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / *А. Абрамовиц, И. Стиган.* – М.: Наука, 1979. – 832 с.

8. *Янке Е.* Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш.* – М.: Наука, 1977. – 344 с.

9. *Ольшанський В.П.* Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар / *В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98-103.

References (transliterated)

1. Zaika P.M., Maznev G.E. Separation of seeds by a complex of physicomechanical properties. Moscow: Kolos, 1978. 287 p.

2. Bogomolov A.V. Separation of hardly separated loose mixtures. Kharkiv: KNTUSG, 2013. 308 p.

3. Goldsmith W. Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies. Moscow: Stroyizdat, 1965. 447 p.

4. Kilchevsky N.A. Dynamic contact compression of solids. Blow. Kiev: Naukova Dumka, 1976. 319 p.

5. Leibenzon L.S. The course of the theory of elasticity. – Moscow-Leningrad: OGIZ, 1947. 465 p.

6. Gurniak L.I., Gutsulyak Yu.V., Yuzkiv T.B. Resistance of materials. Lviv: New World, 2005. 364 p.

7. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

8. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

9. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Ateb-sine in solving the Hertz problem. Bulletin of NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2018. No 3 (1279). P. 98-103.

Надійшла (received) 19.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (***Ольшанский Василий Павлович***, ***Olshanskiy Vasyl Pavlovych***) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com