

Н.Н. ТКАЧУК, Г.И. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАШИН С НЕЛИНЕЙНО УПРУГИМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ СЛОЕМ

В работе поставлена и решена проблема построения вариационной формулировки задачи о контактном взаимодействии элементов машин с нелинейно упругим промежуточным слоем. Исследуется контакт системы упругих тел, между которыми размещены прокладки, напыления или слои шероховатости. Предлагается при формировании системы разрешающих уравнений отталкиваться от условий совместимости нормальных перемещений точек контактирующих поверхностей. Альтернативным является модификация вариационного принципа Калькера, в который вводятся дополнительные члены. Эти члены описывают влияние нелинейно упругих материалов или слоев. В итоге получается в общем случае нелинейная система уравнений и неравенств, отличительной особенностью которой является наличие нелинейных слагаемых в условиях совместности перемещений. Эта особенность отличает созданную модель от традиционных, в которых в левой части уравнений и неравенств присутствуют только линейные члены. Структурная нелинейность этих соотношений, обусловленная наличием условий типа неравенств, дополняется также и физической. При этом слагаемые, ответственные за последнюю, присутствуют в соотношениях, описывающих первую. В результате получаем связанные нелинейные условия контактного взаимодействия, в работе называемые структурно–физической нелинейностью. Для решения получаемой системы уравнений и неравенств предлагается сведение физически нелинейной задачи к последовательности физически линейных, но структурно нелинейных задач. Для этого разработаны методы дополнительных зазоров и переменных параметров податливости, а также модификации метода Ньютона–Рафсона. Кроме того, на основе решения сформированной системы соотношений предложено решать также обратные задачи обоснования геометрической формы контактирующих тел или свойств материалов промежуточных слоев. Намечены также критерии для решения задач оптимизации, которые направлены на обеспечение характеристик прочности контактирующих тел. Кроме этого, сформулирована задача коррекции профиля поверхностей контактирующих деталей за счет упругих деформаций от целенаправленной дополнительной внешней нагрузки.

Ключевые слова: напряженно–деформированное состояние, сложнопрофильное тело, контактное взаимодействие, вариационный принцип Калькера, метод дополнительных зазоров, метод переменных параметров податливости.

М.М. ТКАЧУК, Г.І. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕМЕНТІВ МАШИН ІЗ НЕЛІНІЙНО ПРУЖНИМ ПРОМІЖНИМ ШАРОМ

У роботі поставлено та вирішено проблему побудови варіаційного формулювання задачі про контактну взаємодію елементів машин із нелінійно пружним проміжним шаром. Досліджується контакт системи пружних тіл, між якими розміщено прокладки, напилення або шари шорсткості. Пропонується при формуванні системи розв'язувальних рівнянь відштовхуватися від умов сумісності нормальних переміщень точок контактуючих поверхонь. Альтернативною є модифікація варіаційного принципу Калькера, у який вводяться додаткові члени. Ці члени описують вплив нелінійно пружних матеріалів або шарів. У результаті виходить у загальному випадку нелінійна система рівнянь та нерівностей, відмінною особливістю якої є наявність нелінійних доданків в умовах сумісності переміщень. Ця особливість відрізняє створену модель від традиційних, у яких у лівій частині рівнянь та нерівностей присутні тільки лінійні члени. Структурна нелінійність цих співвідношень, яка обумовлена наявністю умов типу нерівностей, доповнюється також і фізичною. При цьому складові, відповідальні за останню, є присутніми у співвідношеннях, що описують першу. У результаті отримуємо зв'язані нелінійні умови контактної взаємодії, які у роботі називаються структурно–фізичною нелінійністю. Для розв'язання отримуваної системи рівнянь і нерівностей пропонується зведення фізично нелінійної задачі до послідовності фізично лінійних, але структурно нелінійних задач. Для цього розроблено методи додаткових зазорів та змінних параметрів податливості, а також модифікації методу Ньютона–Рафсона. Крім того, на основі розв'язання сформованої системи співвідношень запропоновано розв'язувати також обернені задачі обґрунтування геометричної форми контактуючих тіл або властивостей матеріалів проміжних шарів. Намічені також критерії для розв'язання оптимізаційних задач, які спрямовані на забезпечення характеристик міцності контактуючих тіл. Крім того, сформульована задача коригування профілю поверхонь контактуючих деталей за рахунок пружних деформацій від цілеспрямованого додаткового зовнішнього навантаження.

Ключові слова: напружено–деформований стан, складнопрофільне тіло, контактна взаємодія, варіаційний принцип Калькера, метод додаткових зазорів, метод змінних параметрів податливості.

М.М. ТКАЧУК, Г.І. ЛЬВОВ, А.В. ГРАБОВСЬКИЙ, Н.Б. СКРИПЧЕНКО

CONTACT INTERACTION OF MACHINE ELEMENTS WITH NON–LINEAR ELASTIC INTERMEDIATE LAYER

The work presents a variational formulation of a contact problem for elastic bodies with an intermediate nonlinear contact layer. The layer is introduced in order to model compliant gaskets, coatings and roughness between or on the surface of the machine parts. The

contact conditions in this case incorporate not only the elastic displacements but the local deformations attributed to the contact layer. This additional deformation is determined at every point of the contact surface as a function of the acting normal tractions. This relation is in general nonlinear and can be accounted for by a special term in the complementary energy updating the original Kalker's variational principle. As an outcome the problem acquires besides the structural nonlinearity (i.e. contact) as well the physical nonlinearity. This means that one needs to solve a system comprising both the inequalities and nonlinear equations. This is done by computing consecutive approximations from problem linearizations. The two particular variants of this procedure comprise the method of augmented gap and the method of variable compliance. Newton-Raphson iterations are also considered as an option.

With this model and the numerical analysis method at hand one can solve certain inverse problems. The goal is to justify the geometrical shape of the contacting bodies as well as the physical parameters of the contact layers. The objective criteria enforcing strength and durability in terms of the contact loads are proposed for the optimization. Furthermore deformation components arising from the applied external loads and the corresponding correction of the contact geometry are introduced as an additional design factor.

Keywords: stress-strain state, complex-shaped body, contact interaction, Kalker's variational principle, deflected mode, geometrically-complex body, contact interaction, augmented gap method, method of variable compliance

Введение. Обеспечение конструкционной прочности элементов машин зачастую требует привлечения новых моделей, описывающих условия контактного сопряжения на границе с другими телами, для более адекватного и точного расчета напряженно-деформированного состояния (НДС).

Это обстоятельство обусловлено тем, что большее количество машиностроительных конструкций содержит элементы, находящиеся в условиях контактного силового и кинематического сопряжения. С целью уменьшения контактных давлений в этих зонах проектировщики стремятся использовать в качестве сопрягаемых поверхности близкой, а также частично, фрагментарно или почти совпадающей формы. Это, например, «бочкование» рабочих поверхностей зубьев различных зубчатых передач, модификация поверхностей роликоподшипников, профилирование формы беговых дорожек гидрообъемных передач (ГОП) и поршней двигателей внутреннего сгорания по высоте и в окружном направлении и т.п. Традиционные методы моделирования контактного взаимодействия приводят в таких случаях либо к значительным погрешностям в полученных результатах, либо к чрезмерно громоздким численным моделям. Еще одним существенным фактором является недостаточно адекватное моделирование условий контактного сопряжения на границах тел. Зачастую для этого записывается, например, условие непроникновения для гладких тел в линеаризованном виде. Как один из более адекватных вариантов – учет шероховатости, моделируемой, например, винклеровым слоем, что дает несколько уточненные, но также линеаризованные условия контактного взаимодействия, которые представляют собой условия совместности перемещений ответных точек сопряженных поверхностей.

В то же время сам поверхностный слой шероховатости обладает в общем случае нелинейными свойствами в зависимостях «давление – перемещение», и, кроме того, в зоне контактного взаимодействия может реализовываться контакт со смазочными материалами или через гидродинамический слой, сама поверхность деталей может быть подвергнута химической, механической или температурной обработке, а также размещению между телами упругих прокладок, прослоек, уплотнений, что существенно сказывается на физико-механических характеристиках контактирующих поверхностных слоев. В результате получаемые в итоге

зависимости контактной жесткости (податливости) от давлений, скоростей, температуры, режимов и технологий упрочнения и т.п., базирующиеся на микромеханических моделях, становятся существенно нелинейными. До настоящего времени для формирования этих зависимостей привлекаются либо данные экспериментальных исследований, либо различные упрощенные модели контактного взаимодействия микронеровностей в виде стержней, полусфер и т.п. В этом случае на основе получаемых данных устанавливаются различные модели локальной податливости, которые порождаются микронеровностями поверхности (или другими источниками).

В то же время до настоящего времени отсутствует единая завершенная теория микромеханики контактного взаимодействия, что обусловлено сложной формой микронеровностей, стохастическим распределением их по площади контакта, неоднородностью и анизотропией свойства материала поверхностных слоев деталей и т.п. Однако сразу можно заметить, что уже предложенные до настоящего времени новые модели, описывающие связь «нормальные перемещения – контактные давления», являются существенно нелинейными, т.е. нелинеаризуемыми без потери физической адекватности и численной точности.

Таким образом, в записи условий контактного взаимодействия (непроникновения) появляются нелинейные слагаемые, обусловленные нелинейностью физико-механических характеристик материалов слоев шероховатости. В результате структурная нелинейность задачи дополняется физической. Для решения таких задач, содержащих нелинейные слагаемые в условиях контактного взаимодействия, необходима разработка новых методов и подходов. Более того, требуется разработка новых путей решения обратных задач, т.е. геометрического синтеза таких профилей поверхностей взаимодействующих тел, которые дают возможность управлять (например, минимизировать) контактными давлениями, напряжениями или другими характеристиками, влияющими на конструкционную прочность деталей машин. Эти обстоятельства формируют актуальную научную проблему разработки новых методов и моделей для анализа контактного взаимодействия элементов машиностроительных конструкций с учетом не только структурной, но и дополнительной физической нелинейности, а также геометрического синтеза формы поверхностей и свойств

поверхностных слоев материалов контактирующих тел по критериям контактной прочности.

Решение всех перечисленных проблемных вопросов в полной мере и в завершённом виде до настоящего времени отсутствует. В свою очередь, потребности машиностроения в разработке методов решения данного типа задач переоценить сложно, поскольку их отсутствие нивелирует все преимущества, достигаемые при синтезе новых материалов, форм деталей и технологических операций обработки их поверхностей. В результате сложилось противоречие между потребностями машиностроения, с одной стороны, и возможностями механики, – с другой. Решение этого противоречия предполагает решение комплексной научно-практической проблемы, которая состоит в разработке и реализации новых моделей и методов расчета физически и структурно нелинейных задач определения напряженно-деформированного состояния для обеспечения конструкционной прочности элементов машиностроительных конструкций.

Таким образом, сформулирована актуальная научная и важная для промышленности масштабная проблема обеспечения конструкционной прочности элементов машиностроительных конструкций на основе разработки новых моделей и методов анализа нелинейного поведения материалов на поверхности деталей или в промежуточных слоях в условиях контактного взаимодействия. Это составляет направление исследований, описанных в работе.

Анализ существующих методов и моделей исследований контактного взаимодействия упругих тел при наличии нелинейного упругого промежуточного слоя. Анализ контактного взаимодействия является одним из наиболее важных направлений в механике. Это вызвано как потребностями машиностроения, где мощность во многих случаях передается с помощью механического контакта деталей, так и богатством математических постановок контактных задач. Таким образом, сформировалось целое направление – механика контактного взаимодействия (или контактная механика) [1].

На решение контактных задач в разных постановках были направлены усилия многих исследователей: М.И. Мухелишвили, В.А. Александрова, Г.Я. Попова, В.Л. Рвачева, В.С. Гудрамовича, И.Я. Штаермана и многих других. Ими были задействованы и развиты методы математической физики и функционального анализа, в т.ч. – асимптотические методы [2], методы однородных решений [3], парных уравнений [4], R – функций [5] и т. п.

Вместе с тем бурное развитие в последнее время получили численные методы, связанные с дискретизацией тел методом конечных элементов (МКЭ) [6] и граничных элементов (МГЭ) [7]. Теоретической базой этих численных методов для контактных задач могут быть соответственно вариационные формулировки и граничные интегральные уравнения.

Что касается вариационных постановок, то они, начиная с работы [8], получили существенное развитие на основе теории вариационных неравенств

[9–11]. Эта теория адаптирована для глубокого анализа задач такого типа, поскольку не предусматривает никаких дополнительных гипотез относительно формы и размеров контактных пятен. Само распределение контактного давления, а также форма и размеры контактного пятна не задаются, а определяются, например, из условий экстремума некоторых функционалов. В частности, одним из вариантов такого типа постановок является вариационный принцип Калькера [12]. Он оперирует с функционалом, определенным на множестве неотрицательных распределений контактного давления, на котором, собственно, и ищется его минимум.

Кроме того, возможны самые разнообразные направления развития вариационных постановок [13–19].

Метод граничных элементов как один из вариантов дискретизации граничных интегральных уравнений имеет свои преимущества и недостатки. Первые определяются тем, что с его помощью физическая размерность задачи снижается на единицу. Тем самым резко уменьшается объем дискретизированной модели. С другой стороны, ему присущи и недостатки, связанные с трудностями применения к случаю контакта тел конечных размеров, а также с тем, что в дискретизированной модели приходится оперировать не с редкозаполненной, а с матрицей общего вида.

Разнообразные постановки, формулировки и методы и модели вместе с тем не исчерпывают всего набора факторов, которые нужно учесть. Так, в общей постановке трудно объединять произвольную форму контактирующих тел, нелинейные свойства поверхностных слоев, шероховатости прокладок, напылений, пленок и т. п. В то же время, как показано в работах [20–23], существует определенная корреляция между гранично-элементной постановкой контактной задачи и дискретной формой вариационных формулировок: при определенных условиях дискретизированные их формы совпадают. Это побуждает искать общие формулировки, которые объединяют, с одной стороны, гранично-интегральные и вариационные постановки, а с другой – разные дополнительные факторы. Среди них значительную роль играют произвольность формы распределений зазоров, а также нелинейные свойства приповерхностных, поверхностных или межповерхностных слоев в системе контактирующих тел.

Следовательно, возникла необходимость провести анализ методов исследования влияния формы зазора, свойств промежуточных слоев между контактирующими телами на их взаимодействие, а также базовых дискретизированных формулировок контактных задач. Этот анализ осуществлен без снижения общности (универсальности) на примере шероховатости поверхностных слоев и гранично-элементных дискретизаций граничных интегральных уравнений или вариационных постановок.

Микромеханика контакта: подходы и модели.

Поверхности реальных тел на микроскопическом уровне не являются идеально гладкими, а имеют случайный профиль, который состоит из выпуклостей и

впадин. Это значит, что при первичном контакте сжатие произойдет не на всей номинальной поверхности, а лишь на ее малой части, которая будет увеличиваться по мере роста усилия прижатия в определенной связи с деформациями микронеровностей. Учет влияния шероховатости на характер контактного взаимодействия является фундаментальной задачей, которая, невзирая на существенный прогресс нескольких поколений исследователей за длительную историю, далека от полного решения.

Первые попытки построить модель контакта шероховатых тел связаны с применением теории Герца к отдельным вершинам неровностей. Однако, полученные таким образом теоретические оценки не согласовались с экспериментально установленным законом примерной пропорциональности между величиной прижимного усилия P и площадью пятна контакта A . Противоречие, на которое указал Дж. Арчард [24], состояло в том, что с ростом нагрузки не только увеличивается площадь существующих контактных площадок, но и возникают новые. Им было предложено приближение, согласно которому на неровностях располагаются микронеровности, на которых, в свою очередь, присутствуют еще меньшие микронеровности. Такая модель с ростом числа степеней увеличения в граничном значении давала искомую пропорциональность.

Следующие уточнения теории шероховатого контакта имели целью получение не только качественно верных, но и количественно точных оценок поведения. Для этого были задействованы методы статистического усреднения. Исчерпывающая теория, которая описывает статистические свойства случайных поверхностей, предложена в работе [25]. Однако еще до ее появления Гринвуд и Вильямсон разработали модель контакта, основанную на упрощающих предположениях относительно распределения характеристик неровностей [26].

Теория Гринвуда–Вильямсона допускает большие возможности для уточнения, в частности относительно геометрических свойств случайных поверхностей. Так, при развитии этой модели, предложенной в работе [27], учитывается случайное распределение кривизны вершин неровностей. В дальнейшем отдельные положения модели были пересмотрены как самим Гринвудом [28], так и множеством других авторов. Так, Маккул [29] предложил использовать двухпараметрическое распределение Вейбулла для описания высот неровностей.

В оригинальной теории Гринвуда – Вильямсона контакт отдельных неровностей учитывался независимо. В работах М. Чиаварелла [30, 31] было учтено взаимное влияние от деформаций, вызванных прикладыванием контактных усилий в соседних вершинах.

Отдельные модели [1, 32, 33] содержат режим пластических деформаций. Их наличие обычно отрицается тем, что неровности не увеличивают значения максимального контактного давления относительно среднего значения настолько сильно, чтобы это приводило к существенным пластическим деформациям. Кроме того, даже в случае их возникновения, есть все

основания считать, что все следующие нагрузки после нескольких циклов сминания наиболее нагруженных участков поверхности будут происходить упруго.

В дальнейшем развитие теории шероховатого контакта связано с фрактальной природой геометрии тел. Результаты теоретических исследований [34–36] показали значимость влияния масштабного эффекта топографии поверхностей на прогнозируемое контактное поведение. Чем больше детали фрактальной поверхности учитываются на все более мелком масштабе, тем больше контактное пятно дробится на кластеры микроконтактов. При этом в предельном значении для самоподобной поверхности их количество приближается к бесконечности, при этом полная площадь контакта уменьшается до нуля. Однако реальные системы характеризуются конечными нижней и верхней границами масштабов неравенств, и, соответственно, они являются ключевыми характеристиками случайной топографии. Эти выводы подтверждаются многочисленными исследованиями [37, 38], в том числе проведенными с помощью численного моделирования.

Перссон разработал детальную модель, в которой обосновал обратно–потенциальную зависимость значения контактного давления от величины среднего зазора между прижимаемыми поверхностями [39]. Такое поведение ожидается при умеренном прижатии поверхностей, когда сближение приводит к развитию контакта на большом числе вершин неровностей, но далеко от установления полного контакта. Для проверки основных положений этой теории были проведены численные моделирование, которое подтвердило качественно и вообще также количественно основные оценки [40].

Еще одной величиной, которая отображает свойства шероховатого контакта, является контактная жесткость. Как показал Барбер [41], предложив прямую аналогию между задачей упругого контакта и электрической проводимостью, она непосредственно связана с сопротивлением контактирующих тел [26, 42]. В соответствии с теорией Гринвуда – Вильямсона, равно как и теории Перссона, контактная жесткость прямо пропорциональна прижимному усилию. Однако в ряде других исследований указывается степенная зависимость с показателем от 0,5 к единице [43, 44]. Ключевым параметром, который влияет на точное его значение, является фрактальная размерность поверхности, что нашло отображение в аналитической оценке, предложенной Портом и Поповым [45, 46]. В работе [47] отмечается, что эта зависимость, которая прогнозирует показатель, меньший единицы, справедлива лишь при малых размерах систем, где значимой является лишь наивысшая неровность с фрактальным профилем. В иных же случаях, когда в контакт вступает статистически значимый ансамбль неровностей на большой площади, выполняется линейный закон, который предусматривается классическими теориями.

Наличие микроскопических неровностей вносит существенную коррекцию в характер контактного взаимодействия тел разной формы. Важным случаем для изучения является контакт упругой сферы с номи-

нально плоской шероховатой поверхностью. Гринвуд и Трипп [48] показали, что поведение такой системы согласуется с теорией Герца лишь при достаточно высоких нагрузках, тогда как при меньшем прижимном усилии усредненное распределение контактного давления окажется существенно ниже и распространится на большую площадь по сравнению с оценкой для случая гладких тел. Пастевка и Роббинс [49] изучили изменение действительной площади контакта, установив несколько режимов нагрузки. Сначала (при предельно малых усилиях) поведение поверхностного слоя полностью определяется первой вершиной, которая вошла в контакт. С ростом числа дискретных контактов при умеренных нагрузках соотношения между площадью контакта и силой становятся линейными. И только при очень больших усилиях происходит переход к герцевскому поведению. При этом контакт становится практически сплошным, а размеры круговой зоны контакта подчиняются соотношениям теории Герца. Порт и Попов в работе [50] рассмотрели контактную жесткость. Для этой величины герцевскому закону предшествует фрактальный режим, аналогичный поведению номинально плоских шероховатых тел. При этом этот переход проходит при значительно меньшей нагрузке, чем та, которая необходима для установления сплошного герцевского пятна контакта.

Следовательно, можно отметить, что существует значительное количество теоретически, численно и экспериментально определенных моделей для описания свойств поверхностных слоев контактирующих тел. Применение тех или иных зависимостей определяется конкретными условиями.

Кроме особенностей геометрической формы, приповерхностные слои материала той или иной детали имеют также физико-механические свойства, отличающиеся от свойств материала в глубине детали. Это вызвано не только микроструктурой этих слоев, но и совокупным действием факторов, которые влияют на эти приповерхностные слои при изготовлении (см. выше), а также в условиях реальной эксплуатации.

Таким образом, с точки зрения контактной механики имеем взаимодействие не гладких тел, а тел с нанесенными промежуточными слоями. Физически это приводит к тому, что вместо номинальной площади контакта (как для гладких тел), рассматривается фактическая площадь контакта (то есть совокупность контактных зон микронеровностей). Кроме того, волнистость формирует кластеры фактических площадок контакта, совокупность которых является контурной площадью контакта [51].

Для моделирования контактного взаимодействия шероховатых тел прямое описание всех перечисленных факторов неприменимо, поскольку это приводит к слишком громоздким и неэффективным с точки зрения, например, численного исследования моделей. С другой стороны, учитывая слабое взаимное влияние деформирования отдельных микронеровностей их можно представить в виде псевдослоя, приведя все характеристики микрорельефа к физико-механическим свойствам материала этого слоя. При этом, как правило, такие модели описывают местные деформации

такого псевдослоя, то есть силовое распределенное влияние вызывает в этом слое только местные (локальные) его деформации. Такая модель впервые к рассмотрению была предложена И.Я. Штаерманом [1, 51]. Особенности такого слоя, в отличие от основы Винклера [1, 51], являются:

- нормальное давление, которое действует на внешнюю его поверхность, вызывает не только «локальную» деформацию слоя, но и передается на глубинные слои тела, вызывая «глобальную» деформацию всего тела;

- в общем случае зависимость прогибов (локальных перемещений точек внешней поверхности слоя, условно зафиксированного на внутренней его поверхности) имеет нелинейный характер относительно нормального давления p

$$w = w(p), \quad (1)$$

который во многих случаях [52] заменяется линейной зависимостью (линеаризуется)

$$w = \lambda \cdot p, \quad p = c \cdot w, \quad (2)$$

где λ , c – так называемые контактная податливость и жесткость соответственно.

В итоге следует признать, что дальнейшие исследования контактного взаимодействия шероховатых тел зависят от типа модели, которая связывает микроструктурные свойства приповерхностных слоев материалов деталей, с одной стороны, и моделей местной (локальной) деформации (1), (2), – с другой. На этом рубеже осуществляется переход от микро– к макромеханике контактного взаимодействия.

Как уже было отмечено, для описания свойств слоев шероховатости применяются разнообразные модели. Они достигли на сегодня значительного прогресса. Однако не потеряли применимость также и традиционные подходы, которые базируются или на упрощенных моделях, или на эмпирических данных.

Так, получили распространение стержневая модель Крагельского, эллипсоидальная, двухпараметрическая модель Демкина [1, 51-53]. Среди эмпирических можно выделить модель, которая описана в [52]. Для связи величины обжатия поверхностного слоя w и контактного давления p предложена степенная зависимость

$$w = cp^m, \quad (3)$$

где c, m – параметры, которые зависят от материала детали, микрорельефа его поверхности и технологической операции обработки.

Подводя итоги, можно на основе анализа описанного материала обосновать следующие выводы.

1. На сегодня отсутствуют универсальные модели для учета свойств приповерхностных слоев деталей машиностроительных конструкций, которые бы учитывали все значимые факторы с точки зрения описания контактного взаимодействия.

2. Существует большое количество моделей, которые связывают микро– и макромеханические свойства поверхностных слоев материалов; в общем случае они, как правило, связывают местные (локальные) деформации промежуточных слоев с контактным давлением.

3. Основной преградой к моделированию реальных процессов и состояний при контактом взаимодействии сложнопрофильных тел является отсутствие достаточно универсальной математической модели, которая бы связывала «локальные» и «глобальные» деформативные свойства поверхностных слоев контактирующих тел, причем с учетом вариативности этих свойств.

4. Отсутствуют математические модели, которые бы связывали свойства микроструктуры поверхностных слоев, с одной стороны, и геометрическую форму деталей, – с другой; следовательно, не построены связи микро- и макрогеометрических параметров контактирующих деталей, а, соответственно, сложно исследовать их взаимное влияние.

5. На сегодня отсутствуют математические модели, связывающие все значимые факторы в единой системе разрешающих соотношений для решения задач синтеза геометрической формы контактирующих поверхностей сложнопрофильных тел и свойств промежуточных слоев (шероховатости, пленок, напылений и т. п.) по критериям прочности, долговечности, работоспособности деталей машиностроительных конструкций.

В то же время для частных случаев удастся построить достаточно адекватные модели, которые описывают физико-механические свойства приповерхностных слоев контактирующих тел (типа (1)–(3)). Следовательно, принципиальной проблемой являются как раз методы и модели построения моделей, которые сочетают микро- и макромеханические свойства поверхностных слоев и всего объема контактирующих тел.

Сравнительный анализ методов исследования контактного взаимодействия и геометрического синтеза поверхностей сложнопрофильных тел с учетом физической и структурной нелинейности. Следует заметить, что при исследовании контактного взаимодействия сложнопрофильных тел (СПТ) [20–23] возникает необходимость проведения многовариантного решения задач анализа при варьировании формы и размеров взаимодействующих тел. При этом конкурирующими требованиями при решении единичной задачи анализа выступают оперативность и точность.

Для решения подобных задач за последние годы был разработан специальный математический аппарат, основанный на решении нелинейных интегральных уравнений [54–56]. При этом, предлагаемые формулировки зачастую ограничены предположениями, например, относительно формы области контакта. Вместе с тем подобные подходы позволяют учитывать податливость в виде нелинейного слоя Винклера [54,57–60] в том числе в приложении к вопросам изнашиваемости и долговечности трущихся деталей [61–63]. Однако именно подходы, основанные на вариационных принципах [22, 23, 58, 59] являются более гибкими, позволяют учитывать наиболее широкий спектр физических факторов и допускают численную реализацию стандартными методами.

Из всего разнообразия существующих методов решения рассмотрим, в частности, метод Герца и метод конечных элементов, следуя анализу в [20–23]. Метод Герца значительно суживает множество тел, для которых он дает приемлемую точность решения, однако дает возможность проводить достаточно оперативную оценку контактного давления и контактных площадок. Второй применяемый метод конечных элементов обеспечивает высокую точность моделирования для тел конечных размеров любой формы, однако требует больших затрат времени на формирование численных моделей, особенно для контакта СПТ. Таким образом, по критериям «точность – оперативность» эти методы как бы разнесены на противоположные края условно воображаемого интервала показателей «применимость – ресурсозатратность», условно определяя пределы возможностей каждого из критериев. Компромиссным с этой точки зрения является метод граничных интегральных уравнений (МГИУ): он свободен от требований теории Герца о первичном точечном контакте тел и о представлении локального зазора в соединении тел в виде положительно определенной квадратичной формы от координат, которые задают точки общей касательной плоскости (что существенно расширяет множество тел, доступных для исследования их контактного взаимодействия). С другой стороны, в отличие от метода конечных элементов, он оперирует с существенно меньшими по размерам дискретными моделями, поскольку снижает, как отмечалось выше, на единицу физическую размерность при постановке задачи. Таким образом, для многих случаев исследуемого контактного взаимодействия сложнопрофильных тел метод граничных интегральных уравнений является альтернативой методу Герца и МКЭ, сочетая преимущества первого и второго, и будучи лишен, в значительной степени, их недостатков. Поэтому он может считаться одним из лучших для решения контактных задач.

Методы и модели контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. Рассмотрим модификацию МГИУ для исследования контактного взаимодействия гладких и шероховатых сложнопрофильных тел, ограниченных поверхностями произвольной формы. Решение задач проводится в следующей последовательности:

- формирование разрешающих уравнений для случая контакта гладких тел;
- обобщение полученных соотношений на случай шероховатых тел, в т.ч. с нелинейной характеристикой «перемещения – контактное давление».

Рассмотрим модель контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, следуя [20–23, 64–67]. При исследовании контакта гладких тел несогласованной формы (то есть несовпадающей) [1, 51] в первом приближении при отсутствии трения рассматриваются перемещение точек поверхностей и зазор между ними только в нормальном направлении, и на этой основе определяются кинематические соотношения контакта. Такое упрощение модели нормального контакта базируется на пренебрежении изменением направления

векторов нормали поверхностей взаимодействующих тел [1, 51]. Примером такой модели является теория Герца (в соответствии с ней нормальный зазор между поверхностями приближенно является квадратичной формой в локальной системе координат, связанной с точкой начального касания тел).

В более общем случае придется учитывать точную форму зазора между телами, для чего вводится система координат, центр которой (точку O) традиционно располагают на линии действия сжимающей силы \mathbf{P} (рис. 1). Уравнение каждой из поверхностей можно записать в виде $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$ (здесь и далее нижний индекс отвечает номеру тела, к которому относится обозначение), а зазор вычисляется как $h = h(x, y) = z_1(x, y) + z_2(x, y)$ соответственно.

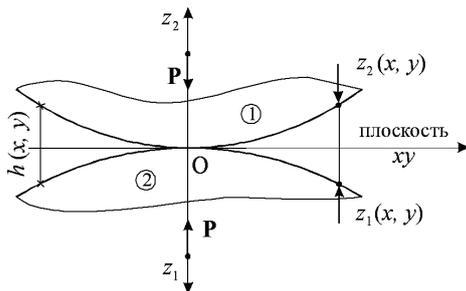


Рисунок 1 – Представление локального зазора между контактирующими телами

В деформированном состоянии под действием силы \mathbf{P} оба тела деформируются и входят в контакт на некоторой площадке (рис. 2). Смещения δ_i являются сближениями тел и не связаны с их деформацией, а смещения u_{z_i} отвечают деформациям, вызванным действием искомого контактного давления.

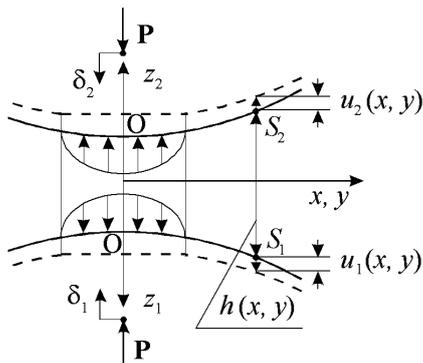


Рисунок 2 – Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

Такое разложение традиционно для задач о взаимодействии упругого полупространства с гладким штампом, в которых компонентами сближения δ_i являются перемещения бесконечно удаленной точки полупространства или всего жесткого штампа как абсолютно твердого тела. Отмеченное представление вертикальных перемещений при пренебрежении поперечными тангенциальными в плоскости Oxy приводит к следующей общепринятой записи нелинейных

соотношений для нормального контакта:

$$\begin{cases} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) = \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{в контакте;} \\ u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) + h(x, y) > \delta_1 + \delta_2, \\ S_1(x, y) \text{ и } S_2(x, y) - \text{вне зоны контакта.} \end{cases} \quad (4)$$

Приведенная выше кинематическая модель контактного взаимодействия хорошо согласуется с моделью упругого поведения твердых тел при приложении контактного давления (при условии, что перемещение точек их поверхности в зоне контакта и локальные деформации приближенно эквивалентны перемещениям и деформациям упругого полупространства под действием нормального усилия). Для упругого полупространства известно интегральное соотношение, которое устанавливает связь между давлением и нормальными перемещениями точек его границы (рис. 3) [68]:

$$u_z(x, y) = (1 - \nu^2) / \pi E \iint_S [p(\xi, \eta) / \rho] d\xi d\eta, \quad (5)$$

$$\rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

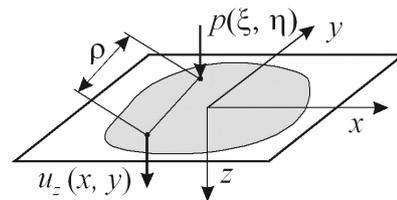


Рисунок 3 – Перемещение границы полупространства под действием нормального усилия

Распределения контактного давления, которое действует на границу обоих взаимодействующих тел, совпадают, потому в соотношениях (4) неизвестные перемещения $u_{z_1}(x, y)$ и $u_{z_2}(x, y)$ выражены исключительно через единственную функцию распределения давления p (в дальнейшем искомую):

$$\begin{aligned} u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) &= \\ &= \left(\frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \right) \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi E^*} \iint_S \frac{p(\xi, \eta)}{\rho} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\nu_i, E_i, i = 1, 2$ – коэффициент Пуассона и модуль упругости материала каждого из контактирующих тел, а распределение давления $p(\xi, \eta)$ и контактная площадка S являются неизвестными и искомыми.

Для определения контактной площадки и распределения давления в случае сложной геометрии контактирующих тел, когда контактная задача не имеет аналитического решения в замкнутой форме, привлекаются разные численные методы. Среди них для решения задач негерцевского нормального контакта упругих тел рассмотрим те, которые основаны на замене непрерывных распределений усилий набором элементов. Они различаются между собой типом аппрокси-

мации неизвестного контактного давления и способом учета граничных условий. Здесь будет использовано кусочно-линейное представление распределения усилий, которому отвечают непрерывные и гладкие поверхностные смещения, характерные для контакта сложнопрофильных тел. Искомая функция контактного давления представляется суперпозицией массива пирамидальных элементарных распределений, вершины которой расположены в узлах регулярной сетки шага c , состоящей из равносторонних треугольников (рис. 4, 5), и при этом полностью определяется дискретным набором узловых значений давления p_n :

$$p(\xi, \eta) \cong \sum_n \hat{p}(\xi - \xi_n, \eta - \eta_n) \cdot p_n$$

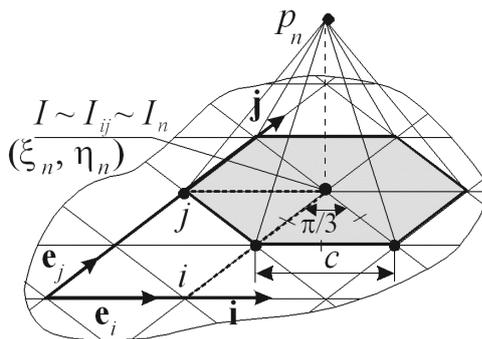


Рисунок 4 – Регулярная треугольная сетка и пирамидальный элемент давления

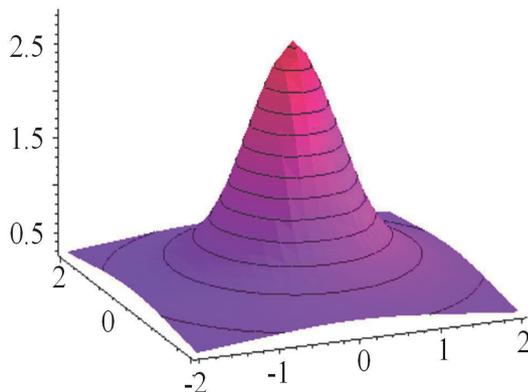


Рисунок 5 – Распределение перемещений точек поверхности полупространства от действия давления (см. рис. 4)

Для нахождения величин усилий в узлах сетки, которые наилучшим образом удовлетворяют граничным условиям, могут быть применены два следующих подхода:

- прямой метод (или метод коллокаций), в котором система разрешающих соотношений получается путем записи условий (4) для заданного набора точек коллокации;
- вариационный метод (принцип Калькера), в рамках которого за действительные принимаются узловы значения контактного давления, которые минимизируют функционал энергии.

Применение каждого из вышеуказанных методов требует умения вычислять нормальные смещения (6) по виду аппроксимирующего давления. Очевидно, что такая задача эквивалентна определению перемещений

u_z , которые отвечают каждой из базисных нагрузок. Для пирамидальных элементов (см. рис. 4) в силу их однородности достаточно вычислить значение поверхностных смещений для одной единичной пирамиды с единичными сторонами как

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} \iint_S [p(\zeta, \eta) / \rho] d\zeta d\eta,$$

$$\zeta = c\tilde{\xi}, \quad \mu = c\tilde{\eta}, \quad x = c\tilde{x}, \quad y = c\tilde{y},$$

$$u_{z_1}(x, y) + u_{z_2}(x, y) = (\pi E^*)^{-1} c \sum_m w(\tilde{x} - \tilde{\xi}_m, \tilde{y} - \tilde{\eta}_m),$$

где $S = \bigcup_m S_m$; S_m – шестиугольная область пирамидального элемента с вершиной в узле (ξ_m, η_m) , $S^{(1)}$ – шестиугольная область с единичными сторонами, $\hat{p}^{(1)}$ – единичное пирамидальное распределение на ней,

$$w(x, y) = \sum_m \iint_{S^{(1)}} [\hat{p}^{(1)}(\xi, \eta) / \rho] d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} -$$

«шаблон» формы распределения перемещений для единичного пирамидального элемента (см. рис. 4, 5).

Можно предложить простой алгоритм вычисления значений этой функции как в отдельных точках, так и на всей плоскости. В работах [20–23] за основу был принят способ, основанный на аналитическом вычислении подынтегральных выражений в (8) для каждого из треугольников, которые составляют базисный шестиугольник (на рис. 4 – окрашен в серое). Таким образом, получаются точные аналитические соотношения для вычисления компонент «шаблона» (см. рис. 5), что является положительным фактором с точки зрения обеспечения точности численного моделирования контактного взаимодействия.

Рассмотрим, следуя [20–23], случай использования для перемещений и контактного давления общей регулярной треугольной сетки, для обозначения узлов которой применяем как сплошную индексацию $\{I_n\}_{n=1}^N$, так и специальную систему отсчета. Оси этой системы направлены вдоль двух ортов e_i и e_j , угол между которыми составляет $\pi/3$ (см. рис. 4). В этом случае любому узлу сетки можно поставить в соответствие целочисленные координаты – индексы (i, j) так, что его радиус – вектор будет вычисляться как

$$r_J = c(e_i \cdot i + e_j \cdot j) \Leftrightarrow J \sim J_{ij}.$$

Используя эту индексацию, можем переписать равенство (7) для узловых точек:

$$u_n = u_{z_1}(I_n) + u_{z_2}(I_n) = u_{z_1}(I_{ij}) + u_{z_2}(I_{ij}) =$$

$$= u_{z_1}(x_{ij}, y_{ij}) + u_{z_2}(x_{ij}, y_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w\left(\frac{x_{ij} - \xi_{kl}}{c}, \frac{y_{ij} - \eta_{kl}}{c}\right) \cdot p_{kl} =$$

$$= \frac{1}{\pi E^*} c \sum_{kl} w(i - k, j - l) \cdot p_{kl} = \sum_m C_{nm} p_m,$$

которое отображает вычисление матрицы коэффициентов влияния C , связывающей узловы значения перемещений с узловыми значениями контактного дав-

ления. Видно, как по узловым значениям «шаблона» (8) на единичной сетке (для которой $c = 1$) определяются коэффициенты влияния для сеток с другими размерами ячеек c .

Значение коэффициента $w(x_{ij} - \xi_{kl})/c, (y_{ij} - \eta_{kl})/c$ для двух узлов J_{ij} и J_{kl} определяется только их относительным расположением, и, соответственно, разницей индексов i, k и j, l . Таким образом, достаточно вычислить значение «шаблона» (8) для одного единичного пирамидального элемента в узлах отмасштабированной сетки

$$J_{i'j'} : \mathbf{r}_{J_{i'j'}} = c(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j') \rightarrow \\ \rightarrow w_{i'j'} = w(\mathbf{e}_i \cdot i' + \mathbf{e}_j \cdot j'),$$

а по нему уже определяются коэффициенты влияния C_{nm} для действительной сетки

$$C_{nm} = c(\pi E^*)^{-1} w(i(n) - i(m), j(n) - j(m)). \quad (9)$$

Более того, из-за наличия осей симметрии пирамидального элемента и сетки, оказывается достаточно вычислить значения $w_{i'j'}$ только в узком секторе $\{i' \geq 0, 0 \leq j' \leq i'\}$ и сохранить их при численной реализации в виде треугольной или симметричной матрицы ($w_{i'j'} = w_{j'i'}$). Для произвольной пары индексов (i', j') значения $w_{i'j'}$ тогда можно быстро получать путем серии «отображений индексов», как показано на рис. 6. Здесь показана форма области индексов (i', j') , в которой возможно определение коэффициентов $w_{i'j'}$ этим способом по предварительно вычисленным значениям $w = \{w_{i'j'}; 0 \leq i' \leq N_w, 0 \leq j' \leq i'\}$. Исходная область сетки, в которой непосредственно вычисляются коэффициенты «шаблона» (9), указана на рис. 6 штриховкой.

Такой простой прием позволяет в 12 раз уменьшить количество осуществляемых на этом этапе вычислений. К преимуществам вычисления коэффициента влияния по «шаблону», предложенного в [20–23], относится то, что достаточно один раз для всех приложений вычислить и сохранить матрицу w достаточных размеров, а в дальнейшем для используемых сеток разных размеров и густоты необходимо будет только сформировать матрицу коэффициентов влияния без проведения сложных вычислительных операций.

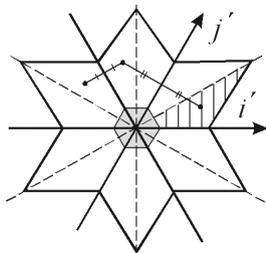


Рисунок 6 – Отображение индексов для вычисления коэффициентов «шаблона»

Прямой метод решения задач негерцевского нормального контакта упругих гладких тел заключается в том, что условия контакта записываются для конечно-

го числа точек. Сформированная при этом система соотношений дает возможность найти узловые значения контактного давления, которые им удовлетворяют. Достаточно субъективным при этом является выбор точек локализации и способ приближенной записи разных условий. Стандартной практикой является их численная проверка для серии модельных задач, поскольку для большого числа вариантов методов не существует строгого доказательства и оценок сходимости.

Использование общей сетки для пирамидальных элементов давления и узлов колокации дает возможность применить для записи соотношений метода выражения (4), согласно которым условия контакта в узлах сетки приобретают вид:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta = 0, \\ \sum_m C_{nm} p_m + h_n - \delta > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \text{узел } J_n - \text{ в контакте;} \\ \text{узел } J_n - \text{ вне зоны контакта,} \end{cases} \quad (10)$$

где $\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарное сближение, $h_n = h(x_n, y_n)$ – узловые значения начального зазора.

Другим условием является неотрицательность давления, которое накладывает на искомые узловые значения ограничения:

$$p_m \geq 0, m = 1, N. \quad (11)$$

Более того, вне зоны контакта они должны быть нулевыми, так что

$$p_m = 0, J_m - \text{ вне зоны контакта.} \quad (12)$$

В условия (4) и их дискретную запись (10) входит сближение тел δ , которое для большинства задач является неизвестным. Добавив в систему разрешающих соотношений уравнения, в котором присутствует величина действующего усилия прижатия P , можно исключить возникающую вместе с этим неопределенность (чаще всего бывает заданным именно оно – усилие), а именно, уравнение получается интегрированием по элементам кусочно-линейно заданного давления:

$$\sum_m \sqrt{3} c^2 p_m / 2 = P. \quad (13)$$

Система соотношений (10)–(13) на практике всегда решается единственным образом относительно неизвестных $\{p_m\}_{m=1}^N$ и δ , при определении которых наибольшей трудностью является то, что обычно неизвестна информация о форме и размерах области контакта. Поэтому для начала необходимо сделать предположение относительно зоны контакта и того, какие узлы в нее входят. Обычно строят сетку и осуществляют начальное предположение об области контакта таким образом, что они заведомо покрывают настоящую область контакта. В ходе дальнейшей итерационной процедуры уточняются как форма пятна контакта, так и значение контактного давления. На каждом ее шаге существует множество N_c , которое состоит из индексов узлов, которые вероятно входят в контакт. Для них должны выполняться уравнения из

системы (10), а также равенство (13):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c} p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \quad (14)$$

Последнее равенство в системе (14) записано с учетом условия (12): $p_m = 0, m \notin N_c$. Соотношения (14) образуют систему из $(N_c + 1)$ -го линейного алгебраического уравнения (СЛАР) относительно такого же числа неизвестных. Ее матрица формируется из коэффициентов влияния C_{nm} и весовых множителей из уравнения (13). Система (14) имеет единственное решение. Полученные с его помощью узловые значения $\{p_{m_c}\}_{m_c \in N_c}$ могут оказаться такими, что нарушают условие (11). Это означает, что размеры зоны контакта завышены. Индексы узлов, в которых это происходит, исключаются из множества N_c , и проводится новый шаг итерации. Так происходит до тех пор, пока на определенном этапе не будет получено множество индексов N_c , для которого решение системы (14) даст неотрицательное давление в зоне контакта.

В большинстве ситуаций этот результат является окончательным. Однако он все же требует дополнительной проверки на выполнение еще одного типа условий, представленного в (10). Вне зоны контакта не должно возникать взаимного проникновения взаимодействующих тел. Если в части узлов, которые не вошли в область контакта, не будут выдерживаться неравенства из (6), то их индексы придется включить во множество N_c и повторить итерационную процедуру. Однако, в большинстве случаев, когда начальное приближение области контакта выбрано достаточно большим и покрывает действительное контактное пятно, подобной необходимости возобновления итерационного процесса не возникает. Варьируемая зона контакта постепенно стягивается к искомой, и проверки выполнения условия (11) оказывается достаточно. Точность результата при этом определяется размером сетки c .

Вариационные методы решения задачи негерцевского нормального контакта. В отличие от описанного выше прямого метода, в рамках которого находится приближенное распределение контактного давления, обеспечивающего выполнение точных соотношений контакта (4) в конечном числе точек, вариационный подход основывается на слабой постановке контактной задачи. Известные результаты Фикера, а также Дюво и Лионса [9-11] устанавливают общий принцип, который определяет существование и единственность решения контактных задач. Он заключается в том, что действительные перемещения точек системы тел, которые вводятся в контакт при выполнении ряда условий, минимизируют полную энергию системы U в пространстве возможных перемещений, которые отвечают условию непроникновения.

Однако при использовании модели упругого полупространства, в которой есть соотношения (5), вы-

ражающие перемещения точек границы через нормальные усилия на поверхности контактирующих тел, представляется удобнее принять как варьируемые функции распределение контактного давления. В этом случае необходимо воспользоваться отличающимся от вышеупомянутого вариационным принципом, предложенным Калькером [12]. Согласно ему для настоящей области контакта и давления, которое действует в соединении тел, достигается минимум полной дополнительной работы Φ среди всех возможных неотрицательных распределений p . Вид функционала и постановка задачи минимизации, ей эквивалентной, представлены ниже:

$$\begin{cases} \Phi(p) = \frac{1}{2} \int_S p(u_{z_1} + u_{z_2}) dS + \int_S p(h - \delta) dS \rightarrow \min; \\ p(\xi, \eta) \geq 0 \text{ в } S, \end{cases} \quad (15)$$

где S – некоторая достаточно большая область поверхности полупространства (возможные распределения контактного давления должны иметь ограниченные носители).

С учетом соотношения (6) можно видеть, что минимизируемое выражение является функционалом, который зависит от одной лишь неизвестной функции давления p . Распределение давления здесь должно удовлетворять неравенству из (15) в слабом смысле.

Приближенное решение этой задачи можно найти, рассматривая значения минимизированного функционала на конечномерном пространстве, образованном кусочно-линейными распределениями p на регулярной треугольной сетке. В этом случае S или точно, или приближенно совпадает с областью, покрытой сеткой. Сам функционал при этом приобретает вид суммы квадратичной и линейной форм относительно узловых значений давления p_n . Способ его вычисления зависит от схемы численного интегрирования. Применяя простую квадратурную формулу с узлами, которые совпадают с узлами используемой сетки:

$$\int_S f g dS = \frac{\sqrt{3} c^2}{2} \sum_i f_i g_i, \quad (16)$$

можно прийти к следующей задаче квадратичного программирования, которая является приближением (15), (16):

$$\begin{cases} \Phi_n(\{p_n\}_{n=1}^N) = \frac{\sqrt{3}}{2} c^2 \times \\ \times \left[\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N C_{nm} p_n p_m + \sum_{m=1}^N p_m (h_m - \delta) \right] \rightarrow \min; \\ p_m \geq 0, m = 1, N. \end{cases} \quad (17)$$

Примечательно, что узловые значения $\{p_n\}_{n=1}^N$, получаемые как решения (17), являются идентичными результату применения прямого метода и удовлетворяют условиям (10)–(12). В этом случае существует эквивалентность не только начальных сильной и слабой постановки контактной задачи, но и приближенных методов ее решения. Однако это справедливо лишь при использовании формулы (16) для вычисле-

ния интегралов в (15), что не является обязательным.

Преимуществами вариационного подхода является наличие условий, которые единственным образом определяют форму области контакта и распределение контактных усилий; возможность применения методов квадратичного программирования. Последнее обстоятельство позволяет применять вариационную формулировку для формального оправдания применения метода коллокаций.

Модель контакта шероховатых тел. Для учета влияния шероховатости на контактное взаимодействие сложнопрофильных тел применима в первом приближении модель упругого слоя, жесткостные свойства которого эквивалентны в некотором смысле свойствам шероховатого поверхностного слоя. Тогда исследуемое тело состоит из двух частей: Ω' – гладкое упругое тело и Ω^\wedge – шероховатый слой, который его покрывает (рис. 7).

При этом между перемещениями точек u_z^Σ поверхности S' , которые участвуют в описании условий контактного взаимодействия, перемещениями гладкого тела u'_z и шероховатого слоя u_z^\wedge существует зависимость $u_z^\Sigma = u'_z + u_z^\wedge$. Здесь u'_z выражается через интегральное соотношение (5). Перемещение же u_z^\wedge описывается соответствующей моделью для шероховатого слоя. Различные аналитические модели контактного слоя рассмотрены в [20–23]. Из простых моделей можно выделить основание Винклера [52]:

$$u_z^\wedge = \lambda p, \tag{18}$$

где λ – податливость слоя (или слоев), которая зависит от свойств материала и качества обработки материала поверхностного слоя исследуемого тела.

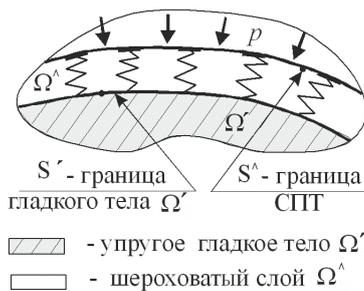


Рисунок 7 – Модель шероховатого сложнопрофильного упругого тела

Модель (18) является достаточно упрощенным вариантом более адекватных и точных зависимостей (например, степенных) между перемещениями и давлением в шероховатом слое. В то же время даже в таком упрощенном виде она вносит качественное изменение в систему взаимодействующих тел, вводя в нее дополнительные элементы. Соответственно, этим эта упрощенная модель и ценна, в связи с чем использована в дальнейших исследованиях как отправная. Учитывая малую толщину слоя Ω^\wedge , в дальнейших соотношениях координаты x, y (см. рис. 1) точек поверхностей S', S^\wedge отождествляются. В то же время в

кинематических соотношениях контакта происходит замена u'_z на u_z^Σ . В силу этого все вышеприведенные соотношения для описания контакта гладких тел остаются по форме такими же, за исключением внесения в матрицу коэффициентов влияния C^Σ дополнительных слагаемых, расположенных на главной ее диагонали:

$$\begin{cases} \sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta = 0, & \text{узел } J_n \text{ - в контакте;} \\ \sum_m C_{nm}^\Sigma p_m + h_n - \delta > 0, & \text{узел } J_n \text{ - вне зоны контакта,} \end{cases} \tag{19}$$

где $C_{nm}^\Sigma = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}$ – коэффициенты матрицы влияния, C_{nm} – коэффициенты матрицы податливости, которые определяются ранее приведенными соотношениями (9); λ – суммарная податливость шероховатых слоев в соединении шероховатых тел;

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{если } m = n; \\ 0, & \text{если } m \neq n \end{cases} \text{ - символ Кронекера.}$$

Добавление к диагональным элементам исходной матрицы податливости положительных слагаемых сохраняет ее положительную определенность.

Тогда результирующие разрешающие соотношения по структуре аналогичны соотношением для гладких тел, однако привнесены дополнительные компоненты от специально введенного упругого основания Винклера. Эффект от введения этого слоя зависит от соотношения податливости этого слоя, который моделирует шероховатость, и гладкого упругого тела, которое этот слой покрывает.

Что касается других разрешающих соотношений (то есть условий неотрицательности узловых значений контактного давления и равенства их суммы интегральному усилию, которое прикладывается к взаимодействующим телам), то они остаются такими же, как и для случая контакта гладких тел.

Общая система уравнений для точек в зоне контакта из уравнений (14):

$$\begin{cases} \sum_{m_c \in N_c} C_{n_c m_c}^\Sigma p_{m_c} - \delta = -h_{n_c}, n_c \in N_c; \\ \sum_{m_c \in N_c} \sqrt{3} c^2 p_{m_c} / 2 = P. \end{cases} \tag{20}$$

Для точек внутри области контакта, как отмечалось, остаются справедливыми соотношения (20), а для точек вне области контакта – (12) и второе из соотношений (19). Аналогичной случаю контакта гладких тел остается и процедура итерационного уточнения области контакта и распределения контактного давления [20–23].

Таким образом, базируясь на методах и моделях, изложенных в [20–23], можно их развивать в дальнейшем для случая нелинейных зависимостей «перемещение – давление» для слоя, расположенного между контактирующими сложнопрофильными телами. Представленные соотношения являются отправными при построении усовершенствованных моделей и ме-

тодов анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с учетом нелинейных характеристик материала промежуточного слоя.

Что касается проблемы синтеза геометрической формы тел при условии контактной прочности, то возможно прямое и непосредственное применение методов функций уровня и погруженной границы, включительно с оптимизацией в контактных задачах и методов переменной плотности или SIMP (изотропного сплошного материала без штрафа) к задаче о контактирующих телах [69–78]. Эти методы предусматривают наложение, как правило, многошаговых итерационных процедур нелинейного программирования на многократное решение задач анализа контактного взаимодействия, которые тоже решаются преимущественно итерационными методами. Следовательно, значительно возрастает количество необходимых для получения решения итераций.

Такой традиционный подход сводит на нет любые усилия по повышению эффективности решения задач анализа. Следовательно, крайне необходимым является разработка нового, альтернативного подхода, в котором предусматривалось бы объединение ряда процедур с прозрачным физическим смыслом, математической формализацией и вычислительной эффективностью. Как раз это и является одной из основных задач этой работы.

Формулировка задач исследования. Обзор существующих методов анализа контактного взаимодействия элементов машин различного назначения с учетом влияния физически нелинейного промежуточного слоя между ними дает основания для следующих выводов.

1. В настоящее время отсутствует полное решение проблемы анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с учетом влияния физически нелинейного промежуточного слоя, которое бы сочетало, с одной стороны, физическую адекватность, а с другой, – высокую точность и оперативность.

2. Традиционные процедуры синтеза геометрической формы сложнопрофильных тел предусматривают многократное решение задач анализа контактного взаимодействия, а, следовательно (см. п. 1), чрезмерно усложняют решение актуальных и важных прикладных задач.

3. Наиболее пригодными для анализа напряженно-деформированного состояния системы сложнопрофильных тел с промежуточными физически нелинейными слоями, как видно из анализа литературных источников, представляется комбинация вариационной постановки типа принципа Калькера, метода граничных интегральных уравнений и дискретная аппроксимация искомых функций с представлением их в виде частичной суммы ряда по базисным функциям с локальным носителем.

Принимая во внимание изложенные обстоятельства, представляется целесообразным развивать и адаптировать к решению прикладных задач анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел (а в дальнейшем – и синтезу их геометрической фор-

мы) существующие авторские разработки [20–23]. Вместе с тем прямое их применение невозможно, поскольку система разрешающих соотношений оказывается не только структурно, но и физически нелинейной.

Модель нелинейного промежуточного слоя.

Если между контактирующими телами находится упругий слой с физически нелинейными характеристиками

$$w^{(i)} = w^{(i)}(p), \quad i = 3, 4, \quad (21)$$

то в соотношения (20) войдут дополнительные слагаемые:

$$\sum_j C_{ij} p_j + w_i^{(3)}(p) + w_i^{(4)}(p) = \delta - h_i. \quad (22)$$

Здесь $w_i^{(3)}(p), w_i^{(4)}(p)$ – дополнительные прогибы за счет деформирования слоев на поверхностях контактирующих тел 1 и 2. Это могут быть, например, слои шероховатости, для которых справедливы соотношения [52]

$$w = \lambda p^s. \quad (23)$$

Здесь λ, p – параметры, определяемые микромеханическими характеристиками шероховатости (средняя высота выступов шероховатости R_a , физико-механические характеристики материала и вид механообработки поверхности). Эти параметры могут быть рассчитаны на основе статистических микромеханических моделей контакта шероховатых тел или из экспериментальных данных [51–53].

Получается в общем случае нелинейная система уравнений и неравенств, отличительной особенностью которой является наличие нелинейных слагаемых в условиях совместности перемещений. Эта особенность отличает созданную модель от традиционных, в которых в левой части уравнений и неравенств присутствуют только линейные члены. Структурная нелинейность этих соотношений, обусловленная наличием условий типа неравенств, дополняется также и физической. В результате получаем связанные нелинейные условия контактного взаимодействия, далее в работе называемые структурно-физической нелинейностью.

Таким образом, применение локальной постановки дало возможность резко расширить круг исследуемых объектов механики контактного взаимодействия за счет включения в данный процесс, кроме гладких тел, и тел с линейно-упругим слоем на поверхности [20–23], также и тел с нелинейно-упругим слоем. Важно, что методология формирования разрешающей системы уравнений осталась в целом аналогичной, хотя результат – качественно отличный. Это дает возможность рассматривать случаи контакта гладких тел и тел с линейно-упругим слоем между ними как частные случаи получаемых соотношений.

Постановкой, альтернативной локальной, является вариационная формулировка контактной задачи. В данном случае можно рассмотреть два наиболее перспективных варианта. Первый вариант следует из постановок задач о контактном взаимодействии упругих

тел на основе теории вариационных неравенств [10–19,69]. В исследуемом случае в качестве такого нелинейного упругого тела в системе присутствует слой, материал которого подчиняется закону (23). Преобразовав это соотношение, контактные давления p можно в дальнейшем трактовать как напряжения в тонком контактном слое типа винклера, а, соответственно, можно изменить подход теории вариационных неравенств, сводящей исходную задачу в конечном счете к минимизации функционала полной внутренней энергии исследуемой системы тел (включая и нелинейный слой):

$$I(u) \rightarrow \min. \quad (24)$$

Здесь u – множество распределений перемещений точек взаимодействующих тел, в т.ч. и нелинейно–упругого слоя.

Применяя к этому функционалу (24) процедуру дискретизации, например, по методу конечных элементов, получаем в итоге функционал в виде суммы квадратичной и линейной формы, отвечающих за энергию линейно–упругой части исследуемой системы, и нелинейного слагаемого, соответствующей энергии нелинейно–упругого слоя:

$$I(u) \approx \frac{1}{2} X^T KX - FX + I^n(X). \quad (25)$$

Процедура линеаризации полученного выпуклого функционала (25) может быть осуществлена методами множителей Лагранжа, штрафа, применением других процедур или путем прямой линеаризации с проекцией на множество ограничений (27). В любом случае такие известные методы обладают тем общим недостатком, что в качестве массива искомым величин (при применении, например, МКЭ) выступают узловые перемещения всех узлов конечно–элементной сетки взаимодействующих тел: и в объеме, и на поверхности. Таким образом, при применении итерационных процедур решения задачи требуется оперирование с большими массивами узловых переменных, в то время как в контактных условиях задействована только та часть узловых перемещений, которая находится в зоне возможного контакта.

Данного недостатка лишен подход, основанный на применении вариационного принципа Калькера [1, 12]. Он формируется относительно искомым контактных давлений, т.е. физическая размерность задачи снижается на единицу. В итоге, расширив известную формулировку принципа Калькера, получаем задачу минимизации функционала дополнительной энергии из

$$\Phi_n \rightarrow \min \quad (26)$$

на неотрицательных давлениях p . Данный выпуклый функционал состоит из суммы квадратичной формы давлений и нелинейной части, соответствующей нелинейно–упругому слою. Применение квадратурных формул переводит задачу (26) к виду

$$Cp + D(p) = \delta - h. \quad (27)$$

Здесь C – матрица коэффициентов влияния (порождается квадратичной частью функционала), $D(p)$ – компонента, порождаемая нелинейной частью функ-

ционала, p – массив значений контактных давлений в узлах квадратурных формул, а δ, h – имеют тот же смысл, что и в (20).

При применении определенного вида квадратурных формул, как это было показано в [20–23], полученные соотношения (27) для случая контакта гладких тел совпадают с соотношениями, полученными в локальной постановке. В то же время вариационная постановка дает возможность более строго обосновать существование, единственность и сходимость численного решения контактной задачи. Помимо этого она обладает математической строгостью, универсальностью и естественным переходом к дискретной форме. С другой стороны, в сравнении с традиционной конечно–элементной постановкой резко снижается размерность массива искомым переменных (т.к. в качестве варьируемых выступают узловые значения давлений на сетке, наброшенной только на поверхность, а не на весь объем, занимаемый СПТ), и во многих случаях это дает возможность поднять оперативность решения задач анализа при сохранении точности получаемых результатов. Данное свойство особенно важно на первых этапах проектных исследований, когда требуется проведение большого объема многовариантных расчетов НДС сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия.

Метод, основанный на использовании вариационного принципа Калькера, естественно подходит к применению в случае контакта полубесконечных тел, деформирование которых от действия нормального давления на поверхности мало отличается от деформирования упругого полупространства. Одним из ограничений при этом является требование значительного превышения габаритов контактирующих тела над размерами пятна контакта. В то же время при невыполнении данного требования можно адаптировать предложенный метод, заменив аналитическое решение задачи Буссинеска для полупространства на функцию Грина для тел конечных размеров. В дискретном варианте это означает замену аналитически вычисляемых компонент матрицы коэффициентов влияния C на численно определяемые (например, при помощи МКЭ). При этом матрица C видоизменяется, однако дополнительные операции потребуются только на этапе формирования системы разрешающих уравнений, не затрагивая этапы решения, которые формируют подавляющую составляющую общего объема решения задачи.

Получение разрешающих уравнений типа (27) является только начальной частью поставленной в работе проблемы. Важнейшим же компонентом является разработка методов решения данной системы соотношений, принципиальным отличием которой от, например, традиционной системы нелинейных уравнений, является то, что неизвестными являются не только искомые узловые переменные, но и состав их множества, поскольку искомой является также и область контакта.

Таким образом, применение традиционных методов решения в данном случае напрямую неприемлемо. С другой стороны, уже существуют методы решения

схожих задач для гладких тел и тел с линейно-упругими слоями, продемонстрировавшие работоспособность и эффективность [20–23]. В связи с этим перспективным является развитие и обобщение данных методов на исследуемый случай.

В частности, систему (27) можно представить в виде

$$Cp = \delta - [h + D(p)], \quad (28)$$

что дает возможность организовать итерационный процесс уточнения решения, трактуя последнее слагаемое в (28) как некоторый дополнительный зазор ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = C^{-1}[\delta - \tilde{h}(p^{(s)})]; \\ \tilde{h}(p^{(s)}) = h + D(p^{(s)}). \end{cases} \quad (29)$$

Соотношения (29) отражают суть метода дополнительных зазоров (МДЗ).

С другой стороны, систему (27) можно представить в виде:

$$[C + \lambda^{\wedge}(p)]p = \delta - h, \quad (30)$$

где переменная контактная податливость $\lambda^{\wedge}(p)$ определяется равенством

$$\lambda^{\wedge}(p) \cdot p = D(p). \quad (31)$$

Это дает возможность организовать итерационный процесс ($s = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} p^{(s+1)} = [C^{(s)}]^{-1}[\delta - h]; \\ C^{(s)}(p) = C + \lambda^{\wedge}(p^{(s)}). \end{cases} \quad (32)$$

Соотношения (32) реализуют метод переменных параметров податливости (МППП).

Представленные методы (МДЗ и МППП) сводят исходную структурно-физически нелинейную задачу к последовательности контактных задач для гладких тел или тел с линейно упругим промежуточным слоем между ними. Физическая трактовка этих методов состоит в том, что решение исходной задачи совпадает с решением задачи для контакта гладких тел со специально подобранной коррекцией профиля поверхности (МДЗ) или с винклеровым слоем со специально подобранной неравномерной податливостью (МППП).

Кроме этих методов, возможно применение, например, процедур, аналогичных методу Ньютона-Раффсона, однако дополненных процедурой коррекции множества активных ограничений (т.е. тех узлов, в которых выполняются условия контакта).

Также для минимизации нелинейного функционала Калькера на выпуклом множестве неотрицательных узловых давлениях предложено применять

релаксационные методы, состоящие в реализации алгоритмов для решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) типа метода последовательной верхней релаксации (МПВР), дополненной процедурой пошаговой проекции текущего приближения решения на ограничения. Предложены также новые процедуры блочной релаксации с проекцией.

Кроме того, были разработаны новые подходы к качественному анализу и количественному описанию контактного взаимодействия сложнопрофильных тел. При этом отклик картины распределения контактных давлений на варьирование значимых параметров, фигурирующих в соотношениях для описания их контактного взаимодействия, трактуется в виде двух процессов: изменение формы и размеров пятна контакта, а также изменение формы и размеров купола распределения давлений, опирающегося на данную область контакта. При этом можно определить чувствительность изменения контролируемых областей и распределений на варьирование тех или иных параметров. В первую очередь, это дает представление о тенденции и интенсивности изменения решения задач анализа контактного взаимодействия при изменении определенных величин. Соответственно, определяется множество параметров, путем варьирования в первую очередь которыми целесообразно оптимизировать решение задачи по тому или иному критерию.

Для оценки вклада в общий баланс перемещений в контакте СПТ разработан новый способ их геометрической интерпретации. Он состоит в том, что общее смещение в каждой точке контакта представляется в виде суммы трех слагаемых: первое отвечает за перемещения, вызываемые «глобальным» упругим деформированием гладких СПТ; второе порождается локальным обжатием промежуточного слоя; третье соответствует начальному зазору. Баланс перемещений представляется в виде точки на единичной сфере. При изменении параметров точка на сфере очерчивает характерную траекторию.

Кроме поточечных, введена также и аналогичная интегральная характеристика по всей области контакта.

Таким образом, построены новые характеристики, позволяющие интерпретировать вклад различных составляющих в баланс смещений в контакте СПТ.

В итоге производится построение системы разрешающих соотношений, описывающих структурно-физическую нелинейность в контакте, а также разработка методов их решения, и, кроме того, способов анализа и оценки изменения получаемых решений при варьировании исходных данных. Созданные новые модели, методы и способы лежат в основе последующих разработок. Эти новые результаты, а также решения ряда тестовых задач, описаны в работах [64–67, 80–82].

Сформулированные физически-структурно нелинейные соотношения, а также разработанные методы их решения, послужили основой для разработки методов решения обратных задач. В частности, представляет интерес задача синтеза геометрической формы контактирующих тел с целью формирования заданного распределения контактных давлений p . Для этого предполагается использовать те же соотношения

(20), (22) и (27), что и для решения задач анализа.

Действительно, с формальной точки зрения данные соотношения можно трактовать и относительно набора искомым величин (p, δ) при заданных (h, P) , и наоборот. Таким образом, удается на единой системе соотношений строить как решение задач анализа, так и синтеза.

В то же время прямое удовлетворение всей системы сформированных соотношений не всегда дает приемлемое гладкое решение, в силу чего необходимо обращаться к другим постановкам задач синтеза.

Следует отметить, что рассматривая распределение зазоров h между контактирующими телами как формообразующую информацию, ее можно также трактовать и как управляющую. Управляя распределением h , можно влиять на распределение контактных зон и контактных давлений в контакте. Однако при этом возникает проблема аппроксимации h с использованием базисных функций с локальным носителем. В этих случаях попытки локального варьирования зазора приводят, как правило, к негладкому поведению решения. Это иллюстрируется, например, варьированием первоначального нулевого зазора между плоскими частями поверхностей контактирующих тел: давление в узле при таком варьировании – нулевое в случае изменения зазора «в плюс», номинальное – при отсутствии варьирования, резко возрастающее – при изменении зазора «в минус». Такие «нефизические» осцилляции распределений p при варьировании h вынуждают перейти к альтернативным постановкам. В частности, в работе предложено производить варьирование не h , а p . Даже если варьировать p через узловое значение в разложении функции с локальным негладким носителем, будем получать как реакцию гладкое, хотя и нелокальное, изменение зазора h . Таким образом, этот способ является предпочтительным (именно благодаря гладкости отклика) для решения задачи синтеза благоприятного профиля поверхностей контактирующих тел.

В качестве критерия при этом могут выступать:

$$p_{\max} \rightarrow \min, \sigma \rightarrow \min, w_{\max} \rightarrow \min, \quad (33)$$

где σ – некоторая функция компонент напряженно-деформированного состояния (например, интенсивность напряжений), w – сжатие промежуточного слоя.

В любом из вариантов получаем некоторую проблему типа

$$\tau(h(p)) \rightarrow \min, \quad (34)$$

сформулированную, в конечном счете, «в контактных давлениях», а получаемая форма (распределение h) является «вытекающим» результатом из решения p . Здесь τ – некоторая функция качества, конкретизированная из набора (33) или иным образом определенная, исходя из специфики конкретной решаемой задачи.

Кроме метода формирования благоприятного исходного профиля контактирующих тел, целесообразна также и новая постановка задачи о коррекции этого профиля за счет специально подбираемого дополнительного нагружения и, соответственно, изменения первоначального зазора вследствие деформирования взаимодействующих тел. Такая постановка вызвана

тем, что профиль, благоприятный с той или иной точки зрения при одном уровне нагрузки, перестает быть таковым при его изменении. Это – следствие нелинейности задачи. Кроме того, многие конструкции работают в условиях высоких изменяющихся нагрузок, и подобрать общий благоприятный профиль не всегда представляется возможным. В результате в постановку привносится дополнительная внешняя нагрузка $F_{\text{кор}}$, и она определяется по критерию

$$\tau\{h[p(f, F_{\text{кор}})]\} \rightarrow \min. \quad (35)$$

Таким образом, $F_{\text{кор}} = F_{\text{кор}}(F)$, и различным внешним нагрузкам F соответствует различная дополнительная нагрузка.

Перечисленные выше постановки могут быть обобщены в двух направлениях. Первое направление относится к двойственности системы разрешающих уравнений для анализа контактного взаимодействия (27). Будучи дополнены интегральным соотношением для узловых значений контактных давлений $\sqrt{3/2} \cdot c^2 \sum_j p_j = P$, где P – величина усилия прижатия, они содержат:

- физико-механические характеристики: «глобальные», порождаемые контактирующими упругими телами, описываемые матрицей коэффициентов влияния C , и «локальные», порождаемые нелинейным упругим слоем и описываемые оператором D ;
- геометрические характеристики, отражаемые набором узловых зазоров h ;
- силовые характеристики (усилие прижатия P);
- статические характеристики (распределение контактных давлений p);
- кинематические характеристики (смещение тела δ).

Прямая формулировка контактной задачи определяет в качестве заданных массивов $\{h, P\}$, а качестве искомым – $\{p, \delta\}$. Формально эти две постановки равноправны, и по исходной системе соотношений для анализа контактного взаимодействия можно ставить и решать обратную задачу синтеза геометрической формы, удовлетворяющему желательному распределению контактных давлений.

Второе направление состоит в трактовке всех входящих в построенные разрешающие соотношения не как постоянных, а как варьируемых величин и распределений. Тогда запись этих соотношений в развернутом виде:

$$\begin{cases} Cp + D(p) \geq \delta - h; \\ 2P = \sqrt{3} \cdot c^2 \sum_i p_i, p_k \geq 0 \end{cases} \quad (36)$$

и в операторном их эквиваленте

$$Z(C, D, p, \delta, h, P) \geq 0 \quad (37)$$

дает возможность ставить и решать ряд новых следующих задач.

1. Определение чувствительности решения задачи анализа к варьированию свойств системы, например, C, D, P, h , причем как при малом, так и при значительном диапазоне такого варьирования.

2. Определение оптимальных значений и распре-

делений одних величин при варьировании других.

3. Определение тенденций изменения решений возникающих задач при изменении варьируемых величин в определенных конечных диапазонах.

4. Анализ влияния стохастического варьирования параметров и распределений, входящих в (27), на параметры и распределения, из них получаемые.

5. Анализ и выявление качественных особенностей, вызываемых учетом тех или иных факторов, привносимых в расчетную модель исследуемой системы, на получаемое решение.

Кроме задачи обоснования рациональной геометрической формы контактирующих тел, поставлены и предложены подходы к решению задачи коррекции условий взаимодействия в области контактирования тел путем приложения управляемой дополнительной нагрузки. За счет действия этой нагрузки вследствие упругой деформации возможно повлиять на текущую форму профиля контактирующих тел, а, соответственно, на распределение зазоров в актуальном состоянии. Таким образом, создается механизм "адаптации" условий контактирования под уровень нагрузки. Это особенно важно для случая тел с частично совпадающей или близкой формой контактирующих поверхностей, а также при изменении характера картины распределения контактных давлений с ростом нагрузки, например, в случае выхода пятна контакта на периферию области возможного контакта. В этих обстоятельствах уровень зазоров, реализованных за счет формообразования поверхностей контактирующих тел, уровень изменения этих зазоров за счет упругой деформации от действия дополнительной системы сил, а также уровень перемещений, вызываемых действием сил контактного взаимодействия, – все они оказываются соизмеримыми. Соответственно, целесообразность применения дополнительного управляемого нагружения, «отслеживающего» уровень основной нагрузки, возрастает по сравнению со случаем контакта сильно несогласованных поверхностей.

С использованием предложенных постановок решен ряд тестовых задач, что продемонстрировало, в конечном итоге, возможность и целесообразность (а также эффективность применения) разработанных методов создания благоприятных профилей поверхностей контактирующих тел, а также выявление качественных особенностей и количественных характеристик изменения решения при случайном или целенаправленном варьировании свойств исследуемой системы взаимодействующих тел с промежуточным нелинейным упругим слоем. Описание решения задач синтеза геометрической формы поверхностей контактирующих тел отражено в статьях [64–67, 80–82].

Выводы. Представленные в работе материалы дают основание для следующих выводов.

1. Получила новую формулировку задача о синтезе геометрической формы контактирующих тел при наличии нелинейного упругого слоя между ними на основе единой взаимообратной системы соотношений для решения задач анализа и синтеза.

2. Усовершенствована вариационная формули-

ровка задачи анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел, расширенная, в отличие от известных постановок, на случай наличия между ними нелинейно упругого промежуточного слоя.

3. Разработаны новые методы решения систем нелинейных соотношений, описывающих контакт сложнопрофильных тел при наличии нелинейно-упругого промежуточного слоя. Это методы дополнительной зазоров и переменных параметров податливости. При их применении решение физически и структурно нелинейных соотношений сводится к итерационному уточнению решений для последовательности физически линейных соотношений со специально скорректированным зазором или податливостью слоя. Таким образом, задача сводится к ряду подзадач, для которых процедура решения уже известна.

4. Разработаны новые постановки задачи об оптимизации формы поверхностей контактирующих тел, сформулированные, в отличие от традиционных, не «в зазорах», а «в контактных давлениях». Этим самым удастся избежать негладкостей при решении поставленных задач.

5. Впервые в общем виде поставлена задача о контактном взаимодействии с учетом варьирования всех величин и распределений, что дает возможность оценивать тенденции и количественные характеристики изменения решения при стохастическом, заданном или целенаправленном изменении этих величин и распределений.

Разработанные и описанные в работе подходы, методы и модели были использованы для решения ряда прикладных задач, описанных в статьях [64–67, 80–82]: о контактном деформировании податливого мягкого материала, обоснование формы беговых дорожек гидрообъемной передачи танковой трансмиссии, о влиянии модификации геометрической формы рабочих поверхностей зубчатых передач на их нагруженность контактным давлением, о влиянии шероховатости и волнистости на характер контактного взаимодействия по плоскости разъема полуматриц прессформ. В результате решения данных задач установлен ряд закономерностей и тенденций изменения напряженно-деформированного состояния и контактного взаимодействия между элементами исследуемой системы тел при варьировании их формы, свойств и нагрузок, а на этой основе разработаны рекомендации по обоснованию рациональных проектно-технологических решений. Они переданы на ряд предприятий и учтены при проектировании, технологической подготовке производства и изготовлении элементов военной и гражданской техники, технологической оснастки, трансмиссий, защитных изделий.

В публикациях [64–67, 80–82] описан ряд экспериментальных исследований, использованных для анализа адекватности разработанных математических моделей, точности построенных численных моделей и достоверности полученных с их помощью результатов. Результаты были получены частично самостоятельно, а частично привлечены из литературных источников. В частности, было исследовано контактное взаимодействие шарового поршня гидрообъемной передачи ГОП–900 со статором; проведено исследо-

вание контактного взаимодействия элементов универсально-сборных приспособлений и пресс-форм.

Сравнение результатов, полученных из эксперимента, с результатами численных исследований продемонстрировало не только их удовлетворительное соответствие (отличие на уровне 10–15 %), но и совпадение прогнозированной (расчетным путем) и обнаруженных (экспериментально) тенденций изменения решений при изменении нагрузки, геометрической формы и физико-механических свойств материалов элементов исследуемой системы взаимодействующих тел.

В дальнейшем разработанные методы будут применены для исследования контактного взаимодействия широкого класса сложнопрофильных тел с учетом нелинейно упругого промежуточного слоя.

Список литературы

1. Johnson K. Contact Mechanics / K. Johnson. Cambridge etc.: Cambridge University Press, 1985. XI. – 452 p.

2. Александров В.М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости / В.М. Александров // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32, вып. 4. – С. 672–683.

3. Стеклов В.А. О равновесии упругих тел вращения / В.А. Стеклов // Сообщения Харьк. мат. об-ва. Сер. 2. – 1982. – Т. 3. № 4-5. – С. 172–251.

4. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики / Я.С. Уфлянд. – Л.: Наука, 1977. – 220 с.

5. Рвачев В.Л. Метод R-функций в контактных задачах термоупругости для тел конечных размеров / В.Л. Рвачев, Н.С. Синекон, И.П. Молотков // Докл. АН СССР. – 1991. – № 4. – С. 701–704.

6. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p.

7. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. – М.: Мир, 1987. – 328 с.

8. Signorini A. Questioni di elasticitanon linearizzata o semilinearizzata e semilinearizzata / A. Signorini // Rend. di Matem. e delle sue appl. – 1959. – Т. 18, № 1-2. – P. 95–139.

9. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Наука, 1980. – 383 с.

10. Кравчук А.С. Вариационные и квазिवариационные неравенства в механике / А.С. Кравчук. – М.: Изд-во Московской государственной академии приборостроения и информатики, 1997. – 339 с.

11. Kikuchi N. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods / N. Kikuchi, J.T. Oden // SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. – Philadelphia, 1986. – Vol. 8. – P. 156-161.

12. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics / J.J. Kalker // Inst. Math. and Appl. – 1977. – Vol. 20. – P. 199-221.

13. Wriggers P. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact-problems with friction / P. Wriggers, T.V. Van, E. Stein // Computers and Structures. – 1990. – Vol. 37. – P. 319-333.

14. Hallquist J.O. Efficiency refinements of contact strategies and algorithms in explicit fe. / J.O. Hallquist, K. Schweizerhof, D. Stillman // Proceedings of COMPLAS III. – Pineridge Press, 1992. – P. 359-384.

15. Puso M.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics / M.A. Puso, T.A. Laursen // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2004. – Vol. 193. – P. 601-629.

16. Fischer K.A. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone / K.A. Fischer, P. Wriggers // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2006. – P. 641-656.

17. Мартыняк Р.М. Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте / Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 89-92.

18. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in "CONTACT" / E.A.H. Vollebregt // Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. – China, 2012. – Vol. 96. – P. 201-209.

19. Прокопишин І.І. Числове дослідження задач про контакт трьох пружних тіл методами декомпозиції області / І.І. Прокопишин, І.І. Дяк, Р.М. Мартыняк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – Вип. 49, № 1. – С. 46-55.

20. Ткачук М.М. Аналіз контактної взаємодії складнопрофільних елементів машинобудівних конструкцій з кінематично спряженими поверхнями. Дис. кандидата технічних наук: 05.02.09 / Ткачук Микола Миколайович. – Х.: 2011. – 203 с.

21. Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя. Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.02.09 «Динаміка та міцність машин» / Н.Б. Скрипченко. – Х.: 2016. – 20 с.

22. Ткачук Н.Н. Контактное взаимодействие сложнопрофильных деталей машиностроительных конструкций с учетом локальной податливости поверхностного слоя / Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук, А. В. Грабовский. – Х.: ФООП Панов А.Н., 2017. – 148 с.

23. Tkachuk M.M. Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers / M.M. Tkachuk, N. Skripchenko, M.A. Tkachuk, A. Grabovskiy // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – [S.l.], v. 5, n. 7 (95). – P. 22-31.

24. Archard J.F. Elastic deformation and the laws of friction / J.F. Archard // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society. 1957. – Vol. 243. – P. 190-205.

25. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces / P.R. Nayak // Journal of Lubrication Technology. – 1971. – Vol. 93(3). – P. 398-407.

26. Greenwood J.A. Pl. Contact of nominally flat surfaces / J.A. Greenwood, J.B. Williamson // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society. 1966. – Vol. 295. – P. 300-319.

27. Bush A.W. The elastic contact of a rough surface / A.W. Bush, R.D. Gibson, T.R. Thomas // Wear. – 1975. – Vol. 35(1). – P. 87-111

28. Greenwood J.A. A simplified elliptic model of rough surface contact / J.A. Greenwood // Wear. – 2006. – Vol. 261(2). – P. 191-200.

29. John I McCool Non-gaussian effects in microcontact / John I McCool // International Journal of Machine Tools and Manufacture. – 1992. – Vol. 32(1-2). – P. 115-123.

30. Ciavarella M. Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory / M. Ciavarella, J.A. Greenwood, M. Paggi // Wear. – 2008. – Vol. 265(5). – P. 729-734.

31. Paggi M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models / M. Paggi, M. Ciavarella // Wear. – 2010. – Vol. 268(7). – P. 1020-1029.

32. Miki'c B.B. Thermal contact conductance; theoretical considerations / B.B. Miki'c // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1974. – Vol. 17(2). – P. 205-214.

33. Cooper M.G. Thermal contact conductance / M.G.

Cooper, B.B. Mikic, M.M. Yovanovich // International Journal of heat and mass transfer. – 1969. – 12 (3). – P. 279-300.

34. Ciavarella M. Linear elastic contact of the weierstrass profile / M. Ciavarella, G. Demelio, J.R. Barber, Yong Hoon Jang // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2000. – Vol. 456. – P. 387-405.

35. Persson B.N.J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces / B.N.J. Persson // Physical Review Letters. – 2001. – Vol. 87(11). – P. 116101(1-4).

36. Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics / B.N.J. Persson // The Journal of Chemical Physics. – 2001. – Vol. 115(8). – P. 3840-3861.

37. Persson B.N.J. Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results / B.N.J. Persson, F. Bucher, B. Chiaia // Physical Review B. – 2002. – Vol. 65(18). – P. 184106 (1-7).

38. Zavarise G. On the resolution dependence of micromechanical contact models / G. Zavarise, M. Borri–Brunetto, M. Paggi // Wear. – 2007. – Vol. 262(1). – P. 42-54.

39. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics / B.N.J. Persson // Physical review letters. – 2007. – Vol. 99(12). – P. 125502 (1-4).

40. Yang C. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact / C. Yang, B.N.J. Persson // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2008. – Vol. 20 (21). – P. 215214 (1-5).

41. Barber J.R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies / J.R. Barber // In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – The Royal Society, 2003. – Vol. 459. – P. 53-66.

42. Ragnar Holm Electric contacts: theory and application / Ragnar Holm. – Springer Science & Business Media, 2013.

43. Paggi M. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rnd patches / M. Paggi, J.R. Barber // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2011. – 54 (21). – P. 4664-4672.

44. Ciavarella M. Conductance of rough random profiles / M. Ciavarella, S. Dibello, G. Demelio // International Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol. 45(3). – P. 879-893.

45. Pohrt R. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces / R. Pohrt, Valentin L. Popov // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108(10). – P. 104301 (1-6).

46. Pohrt R. Contact mechanics of rough spheres: Cross-over from fractal to hertzian behavior / R. Pohrt, V.L. Popov // Advances in Tribology. – 2013. – Article ID 974178. – 4 p.

47. Pastewka L. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts / L. Pastewka, N. Prodanov, B. Lorenz, M.H. Müser, M.O. Robbins, B.N. Persson // Physical Review E. – 2013. – Vol. 87(6). – P. 062809 (1-9).

48. Greenwood J.A. The elastic contact of rough / J.A. Greenwood, J.H. Tripp // Journal of Applied Mechanics. – 1967. – Vol. 34. – P. 153-159.

49. Pastewka L. Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws / L. Pastewka, M.O. Robbins // Applied Physics Letters. – 2016. – Vol. 108 (22). – P. 221601 (1-11).

50. Pohrt R. Contact stiffness of randomly rough surfaces / R. Pohrt, V.L. Popov // Scientific reports. – 2013. – Vol. 3. – Article number: 3293 (6 p.)

51. Аргатов И.И. Основы теории упругого дискретного контакта / И.И. Аргатов, Н.Н. Дмитриев. – СПб: Политехника, 2012. – 236 с.

52. Решетов Д.Н. Точность металлорежущих станков / Д.Н. Решетов, В.Т. Портман. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.

53. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей / Н.Б. Демкин. – М.: Наука. 1970. – 228 с.

54. Дьяченко Н.Н. Приближенно аналитическое решение плоской контактной задачи с учетом изнашивания тонкого упругого слоя при фиксированной области контакта / Н.Н. Дьяченко, Н.В. Манько // Проблемы трибологии. – 2016. – № 2. – С. 34-46.

55. Александров А.И. Решение задач о контакте упругих шероховатых тел с использованием нелинейных интегральных уравнений / А.И. Александров, Е.В. Грабко // Методы розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2012. – Вип. 13. – С. 14–21.

56. Острик В.І. Про одну властивість розв'язків задач теорії пружності для двох півплощин або півпросторів / В.І. Острик, А.Ф. Улітко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2016. – Т. 52, вип. 2. – С. 72-80.

57. Сачук Ю. Контактна задача про взаємодію жорстких штампів з пружною півплощиною, захищеною покриттям Вінклера / Ю. Сачук, О. Максимук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2015. – № 22. – С. 117-124.

58. Мартиняк Р.М. Контакт пружних тіл за наявності нелінійних вінклерівських поверхневих шарів / Р.М. Мартиняк, І.А. Прокопишин, І.І. Прокопишин // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2015. – Т. 56, вип. 3. – С. 43-56.

59. Прокопишин І. Контактна взаємодія пружних тіл, одне з яких має покриття, з'єднане з основою через вінклерівський прошарок / І.Прокопишин // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – № 23. – С. 144-160.

60. Гузь А.Н. Контактное взаимодействие упругих тел с начальными напряжениями. Развитие идей Л.А. Галина в механике / А.Н. Гузь, С.Ю. Бабич, В.Б. Рудницкий // К столетию со дня рождения ученого. – 2013. – С. 188-244.

61. Чернець М.В. Модель оцінки зношування і довговічності підшипника ковзання за малої некрутості / М.В. Чернець, О.С. Андрейків, Н.М. Лебедева, В.Б. Жидик // ФХММ. – 2009. – № 2. – С. 121-129.

62. Дацшин О.П. Методи оцінювання контактної довговічності елементів трибоз'єднань (Огляд) / О.П. Дацшин, В.В. Панасюк // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2016. – Т. 52, № 4. – С. 7-20.

63. Довбня Н.П. О величине гистерезисных потерь в сопротивлении качению колес подвижного состава / Н.П. Довбня, Л.Н. Бондаренко, Д.В. Бобырь // Problems of Tribology. – 2017. – Т. 83, № 1. – С. 30-34.

64. Ткачук Н.Н. Решение задач о контакте шероховатых тел с применением модели нелинейного винклеровского слоя / Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук // Механіка та машинобудування. – 2016. – № 1. – С. 3–14.

65. Скрипченко Н.Б. Расчетно-экспериментальное исследование контакта сложнопрофильных тел / Н.Б. Скрипченко, Н.Н. Ткачук, А.А. Атрошенко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Нові рішення в сучасних технологіях. – 2016. – № 12 (1184). – С. 84-88.

66. Ткачук Н.Н. Контакт прямоугольного в плане пуансона со скругленными краями с полупространством / Н.Н. Ткачук, А.Д. Чепурной, А.В. Литвиненко, Н.Б. Скрипченко, Н.А. Ткачук // Проблемы машиностроения. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 17-22.

67. Tkachuk M.A. Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle / M.A. Tkachuk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – 3/7 (93). – P. 34–41. – doi: 10.15587/1729-4061.2018.132076.

68. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
69. Sethian J.A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods / J.A. Sethian, A. Wiegmann // Journal of computational physics. – 2000. – Vol. 163(2). – P. 489-528.
70. Osher S.J. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum / S.J. Osher, F. Santosa // Journal of Computational Physics. – 2001. – Vol. 171(1). – P. 272-288.
71. Allaire G. Shape optimization with a level set based mesh evolution method / G. Allaire, C. Dapogny, P. Frey // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – Vol. 282. – P. 22-53.
72. Cai S. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: a B-spline finite cell method combined with level set function / S. Cai, W. Zhang, J. Zhu, T. Gao // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2014. – Vol. 278. – P. 361-387.
73. Makhija D. Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method / D. Makhija, K. Maute // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2014. – Vol. 49(2). – P. 185-197.
74. Maute K. Level set topology optimization of printed active composites / K. Maute, A. Tkachuk, J. Wu, H.J. Qi, Z. Ding, M.L. Dunn // Journal of Mechanical Design. – 2015. – Vol. 137(11). – P. 111-402.
75. Mysliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems / A. Mysliński // Advances in Engineering Software. – 2015. – Vol. 80. – P. 25-32.
76. Bruns T.E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization / T.E. Bruns // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2005. – Vol. 30(6). – P. 428-436.
77. Kang Z. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field / Z. Kang, Y. Wang // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2011. – Vol. 200 (49). – P. 3515-3525.
78. Lazarov B.S. Maximum length scale in density based topology optimization / B.S. Lazarov, F. Wang // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – Vol. 318. – P. 826-844.
79. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
80. Скрипченко Н.Б. Контактное взаимодействие в модифицированном зубчатом зацеплении / Н.Б. Скрипченко, Н.Н. Ткачук // Механіка та машинобудування. – Харків: НТУ «ХП», 2015. – № 1. – С. 113-117.
81. Ищенко О.А. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия элементов штамповой оснастки / О.А. Ищенко, Н.А. Демина, Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, А.В. Грабовский и др. // Вісник НТУ «ХП», серія: Транспортне машинобудування. – 2017. – № 5 (1227). – С. 108-134.
82. Мартыненко А.В. Напряженно-деформированное состояние контактирующих элементов гидропередаточ / А.В. Мартыненко, Н.Н. Ткачук, Н.Б. Скрипченко, Д.В. Бирик, А.В. Ткачук, М.С. Саверская, В.В. Шеманская // Вісник НТУ «ХП», серія: Машинознавство та САПР. – 2018. – № 7 (1283). – С. 47-75

References (transliterated)

1. Johnson K. Contact Mechanics. Cambridge etc., Cambridge University Press, 1985. XI. 452 p.
2. Aleksandrov V.M. Asimptoticheskie metody v kontaktnykh zadachah teorii uprugosti [Asymptotic methods in con-

tact problems of the theory of elasticity]. Prikladnaya matematika i mehanika. 1968, vol. 32, no. 4, pp. 672-683.

3. Steklov V.A. O ravnovesii uprugih tel vrashheniya [On the equilibrium of elastic bodies of revolution]. Soobshheniya Khark. mat. ob-va. Ser. 2. 1982, vol. 3, no. 4-5, pp. 172-251.
4. Ufljand Ja.S. Metod parnyh uravnenij v zadachah matematicheskoy fiziki [The method of pair equations in problems of mathematical physics]. Leningrad: Nauka, 1977. 220 p.
5. Rvachev V.L., Sinekop N.S., Molotkov I.P. Metod R-funkcij v kontaktnykh zadachah termouprugosti dlja tel konechnykh razmerov [The method of R-functions in contact problems of thermoelasticity for bodies of finite dimensions]. Dokl. AN SSSR. 1991, no. 4, pp. 701-704.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. 756 p.
7. Krauch S., Starfield A. Metody granichnyh jelementov v mehanike tverdogo tela [Methods of boundary elements in the mechanics of a rigid body]. Moscow: Mir, 1987. 328 p.
8. Signorini A. Questioni di elasticitana.n linearizzata o semilinearizzata e semilineariz-zata. Rend. di Matem. e delle sue appl. 1959, vol. 18, no. 1-2, pp. 95-139.
9. Djuvo G., Lions Zh.-L. Neravenstva v mehanike i fizike [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow: Nauka, 1980. 383 p.
10. Kravchuk A.S. Variacionnye i kvazivariacionnye neravenstva v mehanike [Variational and quasi-variational inequalities in mechanics]. Moscow: Izd-vo Moskovskoj gosudarstvennoj akademii priborostroenija i informatiki, 1997. 339 p.
11. Kikuchi N., Oden J.T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. Philadelphia. 1986, vol. 8, pp. 156-161.
12. Kalker J.J. Variational principles of contact elastostatics. Inst. Math. and Appl. 1977, vol. 20, pp. 199-221.
13. Wriggers P., Van T.V., Stein E. Finite-element-formulation of large deformation impact-contact-problems with friction. Computers and Structures. 1990, vol. 37, pp. 319-333.
14. Hallquist J.O., Schweizerhof K., Stillman D. Efficiency refinements of contact strategies and algorithms in explicit fe. Proceedings of COMPLAS III. Pineridge Press. 1992, pp. 359-384.
15. Puso M.A., Laursen T.A. A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2004, vol. 193, pp. 601-629.
16. Fischer K.A., Wriggers P. Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2006, pp. 641-656.
17. Martynjak R.M. Vzaimodejstvie uprugih poluploskostej pri nepolnom mehanicheskom kontakte [Interaction of elastic half-planes with incomplete mechanical contact]. Mat. metody i fiz.-meh. Polja. 1985, vol. 22, pp. 89-92.
18. Vollebregt E.A.H. 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in «CONTACT». Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. China, 2012, vol. 96, pp. 201-209.
19. Prokopyshy'n I.I., Dy'yak I.I., Marty'nyak R.M. Chy'slove doslidzhennya zadach pro kontakt tr'ox pruzhny'x til metodamy' dekompozyciyi oblasti [Numerical study of the problems of contact of three elastic bodies by methods of decomposition of the region]. Fiz.-xim. mexanika materialiv. 2013, vol. 49, no. 1, pp. 46-55.
20. Tkachuk M.M. Analiz kontaktnoyi vzayemodiyi skladno.profil'ny'x elementiv mashynobudivny'x konstrukcij z kinematy'chno. spryazheny'my' poverxnyamy' [Analysis of con-

tact interaction of complex elements of engineering constructions with kinematically conjugated surfaces]. *Dy's. kandydata texnichny'x nauk: 05.02.09. Tkachuk My'kola My'kolajovy'ch. Xarkiv, 2011. 203 p.*

21. Skry'pchenko N.B. Kontaktnoe vzay'modejstvie slozhnoprofil'nykh detalej mashynostroytel'nykh konstrukcij s uchetoj lokal'noj podatly'vosty' poverxnostnogo sloja [Contact interaction of sophisticated details of machine building constructions, taking into account the local plating of the surface layer]. *Avtoref. dy's. na zdobuttya nauk. stupenya kand. texn. nauk: specz. 05.02.09 «Dy'namika ta micznist' mashyn» / N.B. Skry'pchenko. Kharkiv, 2016. 20 p.*

22. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A., Grabovskij A.V. Kontaktnoe vzaimodejstvie slozhnoprofil'nykh detalej mashinostroitel'nykh konstrukcij s uchetoj lokal'noj podatlivosti poverxnostnogo sloja [Contact interaction of sophisticated details of machine-building constructions, taking into account the local pliability of the surface layer]. *Kharkiv: FOP Panov A.N., 2017. 148 p.*

23. Tkachuk M.M., Skripchenko N., Tkachuk M.A., Grabovskij A. Numerical methods for contact analysis of complex-shaped bodies with account for non-linear interface layers. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, [S.I.], vol. 5, no. 7 (95), pp. 22-31*

24. Archard J.F. Elastic deformation and the laws of friction. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1957, vol. 243, pp. 190-205.*

25. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology. 1971, vol. 93(3), pp. 398-407.*

26. Greenwood J.A., Williamson J.B. Pl. Contact of nominally flat surfaces. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 1966, vol. 295, pp. 300-319.*

27. Bush A.W., Gibson R.D., Thomas T.R. The elastic contact of a rough surface. *Wear. 1975, vol. 35(1), pp. 87-111*

28. Greenwood J.A. A simplified elliptic model of rough surface contact. *Wear. 2006, vol. 261, no. 2, pp. 191-200.*

29. John I McCool. Non-gaussian effects in microcontact. *International Journal of Machine Tools and Manufacture. 1992, vol. 32, no. 1-2, pp. 115-123.*

30. Ciavarella M., Greenwood J.A., Paggi M. Inclusion of «interaction» in the greenwood and williamson contact theory. *Wear. 2008, vol. 265(5), pp. 729-734.*

31. Paggi M., Ciavarella M. The coefficient of proportionality κ between real contact area and load, with new asperity models. *Wear. 2010, vol. 268, no. 7, pp. 1020-1029.*

32. Miki'c B.B. Thermal contact conductance; theoretical considerations. *International Journal of Heat and Mass Transfer. 1974, vol. 17, no. 2, pp. 205-214.*

33. Cooper M.G., Miki'c B.B., Yovanovich M.M. Thermal contact conductance. *International Journal of heat and mass transfer. 1969, vol. 12, no. 3, pp. 279-300.*

34. Ciavarella M., Demelio G., Barber J.R., Yong Hoon Jang. Linear elastic contact of the weierstrass profile. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 2000, vol. 456, pp. 387-405.*

35. Persson B.N.J. Elastoplastic contact between randomly rough surfaces. *Physical Review Letters. 2001, vol. 87, no. 11, pp. 116101 (1-4).*

36. Persson B.N.J. Theory of rubber friction and contact mechanics. *The Journal of Chemical Physics. 2001, vol. 115, no. 8, pp. 3840-3861.*

37. Persson B.N.J., Bucher F., Chiaia B. Elastic contact between randomly rough surfaces: comparison of theory with numerical results. *Physical Review B. 2002, vol. 65, no. 18, pp. 184106 (1-7).*

38. Zavarise G., Borri-Brunetto M., Paggi M. On the resolution dependence of micromechanical contact models. *Wear. 2007, vol. 262, no. 1, pp. 42-54.*

39. Persson B.N.J. Relation between interfacial separation and load: a general theory of contact mechanics. *Physical review letters. 2007, vol. 99, no. 12, pp. 125502 (1-4).*

40. Yang C., Persson B.N.J. Contact mechanics: contact area and interfacial separation from small contact to full contact. *Journal of Physics: Condensed Matter. 2008, vol. 20(21), pp. 215214 (1-5).*

41. Barber J.R. Bounds on the electrical resistance between contacting elastic rough bodies. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society. 2003, vol. 459, pp. 53-66.*

42. Ragnar Holm. *Electric contacts: theory and application. Springer Science & Business Media, 2013.*

43. Paggi M., Barber J.R. Contact conductance of rough surfaces composed of modified rmd patches. *International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011, vol. 54, no. 21, pp. 4664-4672.*

44. Ciavarella M., Dibello S., Demelio G. Conductance of rough random profiles. *International Journal of Solids and Structures. 2008, vol. 45(3), pp. 879-893.*

45. Pohrt R., Popov V.L. Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces. *Physical Review Letters. 2012, vol. 108, no. 10, pp. 104301 (1-6).*

46. Pohrt R., Popov V.L. Contact mechanics of rough spheres: Crossover from fractal to hertzian behavior. *Advances in Tribology, vol. 2013. Article ID 974178, 4 p.*

47. Pastewka L., Prodanov N., Lorenz B., Müser M.H., Robbins M.O., Persson B.N.J. Finite-size scaling in the interfacial stiffness of rough elastic contacts. *Physical Review E. 2013, vol. 87, no. 6, pp. 062809 (1-9).*

48. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough. *Journal of Applied Mechanics. 1967, vol. 34, pp. 153-159.*

49. Pastewka L., Robbins M.O. Contact area of rough spheres: Large scale simulations and simple scaling laws. *Applied Physics Letters. 2016, vol. 108, no. 22, pp. 221601 (1-11).*

50. Pohrt R., Popov V.L. Contact stiffness of randomly rough surfaces. *Scientific reports. 2013, vol. 3. Article number: 3293 (6 p.)*

51. Argatov I.I., Dmitriev N.N. *Osnovy teorii uprugogo diskretnogo kontakta [Fundamentals of the theory of elastic discrete contact]. Sankt-Peterburg: Politehnika, 2012. 236 p.*

52. Reshetov D.N., Portman V.T. *Tochnost' metallorez-hushhih stankov [Precision of machine tools]. Moscow: Mashinostroenie, 1986. 336 p.*

53. Demkin N.B. *Kontaktirovanie sherohovatykh poverhnostej [Coating rough surfaces]. Moscow: Nauka. 1970. 228 p.*

54. D'jachenko N.N., Man'ko N.V. *Priblizhenno. analiticheskoe reshenie ploskoj kontaktnoj zadachi s uchetoj iznashivaniya tonkogo uprugogo sloja pri fiksirovanno.j oblasti kontakta. Problemi tribologii. 2016, no. 2, pp. 34-46.*

55. Aleksandrov A.I., Grabko E.V. *Reshenie zadach o kontakte uprugih sherohovatykh tel s ispol'zovaniem nelinejnykh integral'nykh uravnenij. Metody rozv'yazuvannya prykladnykh zadach mexaniky deformivno.go tverdogo tila. 2012, vol. 13, pp. 14-21.*

56. Ostry'k V.I., Ulitko A.F. *Pro odnu vlasty'vist' rozv'yaz-kiv zadach teorii pruzhno.sti dlya dvox pivploshhy'n abo pivprostoriv. Matematy'chni metody' ta fizy'ko-mexanichni polya, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 72-80.*

57. Sachuk Yu., Maksy'muk O. *Kontaktna zadacha pro vzayemodiyu zhorstky'x shtampiviz pruzhnoyu pivploshhy'noyu, zaxy'shhenoyu pokry'ttyam Vinklera. Fizy'ko-matematy'chne mode-lyuvannya ta informacijni texnologiyi. 2015, no.22, pp. 117-124.*

58. Marty'nyak R.M., Prokopy'shy'n I.A., Prokopy'shy'n I.I. *Kontakt pruzhny'x til za nayavnosti nelinejny'x vinkleriv'sky'x poverxnev'y'x shariv. Matematy'chni metody' ta fizy'ko-mexanichni polya. 2015, vol. 56, no. 3, pp. 43-56.*

59. Prokopy'shy'n I. *Kontaktna vzayemodiyu pruzhny'x til,*

odne z yaky'x maye pokry'ttya, z'yednane z osno.voyu cherez vinkleriv'sky'j prosharok. Fyzy'ko-matematy'chne modelyuvannya ta informacijni tekno.logiyi. 2016, no. 23, pp. 144-160.

60. Guz' A.N., Babich S.Ju., Rudnickij V.B. Kontaktoe vzaimodejstvie uprugih tel s nachal'nymi naprjazhenijami. Razvitie idej L.A. Galina v mehanike. K stoletiju so dnja rozhdenija uchenogo. 2013, pp. 188-244.

61. Chernenec' M.V., Andrejkiv O.Ye., Lyebyedyeva N.M., Zhy'dy'k V.B. Model' ocinky' znoshuvannya i dovgovichnosti pidshy'pny'ka kovzannya za maloyi nekruglosti. FXMM. 2009, no. 2, pp. 121-129.

62. Dacy'shy'n O.P., Panasyuk V.V. Metody' ocinyuvannya kontaktoyi dovgovichnosti elementiv try'boz'yednan' (Oglyad). Fyzy'o-ximichna mexanika materialiv. 2016, vol. 52, no. 4, pp. 7-20.

63. Dovbnya N.P., Bondarenko L.N., Bobyr' D.V. O vely'chy'ne gy'sterezy'snyx poter' v soproty'vleny'y' kacheny'yu koles podvy'zhno.go sostava. Problems of Tribology. 2017, vol. 83, no. 1, pp. 30-34.

64. Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. Reshenie zadach o kontaktno.m vzaimodejstvii sherohovatyh tel s primeneniem modeli nelinejno.go vinklerovskogo sloja [Solution of problems on the contact interaction of rough bodies using the model of the nonlinear Winkler layer]. Mexanika ta mashynobuduvannya. 2016, no. 1, pp. 3-14.

65. Skripchenko N.B., Tkachuk N.N., Atroshenko A.A. Raschetno-jeksperimental'noe issledovanie kontakta slozhnoprofil'nyh tel [Computational and experimental research of contact of complex profile bodies]. Visnyk NTU «KhPI», seriya: Novi rishennya v suchasny'x tehnologiyax. 2016, no. 12 (1184), pp. 84-88.

66. Tkachuk N.N., Chepurnoj A.D., Litvinenko A.V., Skripchenko N.B., Tkachuk N.A. Kontakt prjamougol'nogo v plane pua-sona so skruglennymi krajami s poluprostranstvom [Contact rectangular in plan punch with rounded edges with half-space]. Problemy mashinostroenija. 2014, vol. 17, no. 4, pp. 17-22.

67. Tkachuk M. A Numerical Method for Axisymmetric Adhesive Contact Based on Kalker's Variational Principle. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018, vol. 3/7(93), pp. 34-41.

68. Rabotnov Ju.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a deformable solid state]. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. 712 p.

69. Sethian J.A., Wiegmann A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. Journal of computational physics. 2000, vol. 163, no. 2, pp. 489-528.

70. Osher S.J., Santosa F. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. Journal of Computational Physics. 2001, vol. 171, no. 1, pp. 272-288.

71. Allaire G., Dapogny C., Frey P. Shape optimization with a level set based mesh evolution method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014, vol. 282, pp. 22-53.

72. Cai S., Zhang W., Zhu J., Gao T. Stress constrained shape and topology optimization with fixed mesh: a B-spline finite cell method combined with level set function. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2014, vol. 278, pp. 361-387.

73. Makhija D., Maute K. Numerical instabilities in level set topology optimization with the extended finite element method. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2014, vol. 49, no. 2, pp. 185-197.

74. Maute K., Tkachuk A., Wu J., Qi H. J., Ding Z., Dunn M.L. Level set topology optimization of printed active composites. Journal of Mechanical Design. 2015, vol. 137, no. 11, pp. 111-402.

75. Myšliński A. Piecewise constant level set method for topology optimization of unilateral contact problems. Advances in Engineering Software. 2015, vol. 80, pp. 25-32.

76. Bruns T.E. A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization. 2005, vol. 30, no. 6, pp. 428-436.

77. Kang Z., Wang Y. Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field. Computer methods in applied mechanics and engineering. 2011, vol. 200, no. 49, pp. 3515-3525.

78. Lazarov B.S., Wang F. Maximum length scale in density based topology optimization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2017, vol. 318, pp. 826-844.

79. Vasidzu K. Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichno.sti [Variational methods in the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Mir, 1987. 542 p.

80. Skripchenko N.B., Tkachuk N.N. Kontakto.e vzaimodejstvie v modifitsirovanno.m zubchatom zaceplenii. [Contact interaction in modified gearing]. Mexanika ta mashynobuduvannya. Kharkiv: NTU "KhPI". 2015, no. 1, pp. 113-117.

81. Ishhenko O.A., Demina N.A., Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Grabovskij A.V. i dr. Komp'juterno.e modelirovanie kontaktno.go vzaimodejstvija jelementov shtampovoj osnastki [Computer modelling of contact interaction of elements of die equipment] Visnyk NTU "KhPI", seriya: Transportne mashynobuduvannya. 2017, no. 5 (1227), pp. 108-134.

82. Martynenko A.V., Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Bibik D.V., Tkachuk A.V., Saverskaja M.S., Shemanskaja V.V. Naprjazhenno-deformirovanoe sostojanie kontaktirujushhij jelementov gidroperedach [Stress-strain state of contacting elements of hydrotransfers]. Visnyk NTU "KhPI", seriya: Mashynoznavstvo ta SAPR. 2018, no. 7 (1283), pp. 47-75.

Поступила (received) 01.11.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ткачук Микола Миколайович (Ткачук Николай Николаевич, Tkachuk Mykola Mykolayovych) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), ст. наук. співр. кафедри інформаційних технологій та систем колісних і гусеничних машин імені О.О. Морозова, НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4753-4267>; e-mail: m.tkachuk@tmm-sap.org

Львов Геннадій Іванович (Львов Геннадий Иванович, Lvov Gennady Ivanovich) – д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри «Динаміка та міцність машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0297-9227>; e-mail: lvov@kpi.kharkov.ua

Грабовський Андрій Володимирович (Грабовский Андрей Владимирович, Grabovskiy Andrey Vladimirovich) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), ст. наук. співр. кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6116-0572>; e-mail: andrej8383@gmail.com

Скрипченко Наталія Борисівна (Скрипченко Наталья Борисовна, Skripchenko Nataliia Borisovna) – канд. техн. наук (PhD in Eng. S.), наук. співр. кафедри «Теорія і системи автоматизованого проектування механізмів і машин», НТУ «ХПІ»; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5324-9553>; e-mail: nb_natali@mail.ru