

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ДИНАМІКА ОСЦИЛЯТОРА З ЖОРСТКОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ ПРУЖНОСТІ ПРИ ДІЇ СИЛОВОГО ІМПУЛЬСА

Розглянуто рух осцилятора з показником нелінійності $3/2$ при дії ступінчастого та прямокутного імпульсів. Побудовано аналітичний розв'язок нелінійного диференціального рівняння другого порядку, де для розрахунку переміщень задіяно періодичні Атеб-функції та еліптичний косинус Якобі. Встановлено, що при навантаженні осцилятора миттєво прикладеною сталою силою коефіцієнт динамічності дорівнює $(2,5)^{2/3}$. При дії на осцилятор прямокутного силового імпульсу коефіцієнт динамічності залежить від тривалості імпульсу, але не перевершує $(2,5)^{2/3}$. Визначено такі тривалості, за яких розвантажений осцилятор має найбільшу та найменшу амплітуди коливань. Для спрощення розрахунків, з використанням одержаних розв'язків задачі Коші, складено таблиці, задіяних спеціальних функцій. Наведено приклади розрахунків, які підтверджують вірогідність виведених формул.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, жорстка характеристика пружності, імпульсне навантаження, коефіцієнт динамічності, періодичні Атеб-функції, еліптичний косинус.

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСКИЙ

ДИНАМИКА ОСЦИЛЛЯТОРА С ЖЕСТКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГОСТИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ СИЛОВОГО ИМПУЛЬСА

Рассмотрено движение осциллятора с показателем нелинейности $3/2$ при действии ступенчатого и прямоугольного импульсов. Построено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, где для расчета перемещений задействованы периодические Атеб-функции и эллиптический косинус Якоби. Установлено, что при нагружении осциллятора мгновенно приложенной постоянной силой коэффициент динамичности равен $(2,5)^{2/3}$. При воздействии на осциллятор прямоугольного силового импульса коэффициент динамичности зависит от продолжительности импульса и не превышает $(2,5)^{2/3}$. Определены такие продолжительности, при которых разгруженный осциллятор имеет наибольшую и наименьшую амплитуды колебаний. Для упрощения расчетов, с применением полученных решений задачи Коши, составлены таблицы задействованных специальных функций. Приведены примеры расчетов, которые подтверждают достоверность выведенных формул.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, жесткая характеристика упругости, импульсное нагружение, коэффициент динамичности, периодические Атеб-функции, эллиптический косинус.

V.P. OLSHANSKIY, S.V. OLSHANSKIY

DYNAMICS OF AN OSCILLATOR WITH A RIGID CHARACTERISTIC OF ELASTICITY UNDER THE ACTION OF A POWER PULSE

The motion of the oscillator with a non-linearity of the restoring force equal to $3/2$ is considered under the action of a stepped (instantaneously applied constant force) and a rectangular pulse of finite duration of action. An analytic solution of a second-order nonlinear differential equation is constructed, where periodic Ateb-functions and Jacobi elliptic cosine are used to calculate the displacements. The two forms of the analytical solution obtained are equivalent and establish a connection between the used Ateb and elliptic functions. Unlike well-known works devoted to free and forced harmonic oscillations, the oscillator motion caused by impulse dynamic loading is considered here. The aim of the paper is to construct compact formulas for calculating the displacements of a nonlinear system with a rigid elastic characteristic under its nonstationary oscillations. To achieve this goal, integral representations of the above special functions are used, with the subsequent application of their tables. In addition to the known tables of Jacobi functions, it is also suggested to use the tables of Ateb-functions compiled in the work. The dynamic factor of the system is determined. It is established that when the oscillator is loaded instantly with a constant force, the dynamic coefficient is equal to $(2,5)^{2/3} < 2$, which is characteristic of systems with a rigid characteristic of elasticity. It is smaller than for linear systems. When the rectangular force pulse is applied to the oscillator, the dynamic coefficient depends on the pulse duration and does not exceed $(2,5)^{2/3}$. As a result of the study, such lengths of the rectangular pulse are determined, at which the unloaded oscillator has the largest or smallest, equal to zero, amplitudes of the oscillations. In this case, the unloaded oscillator stops moving, that is, it goes into a state of rest. The conditions for achieving extreme amplitudes depend not only on the duration (width), but also on the height of the rectangular pulse, which is characteristic of nonlinear systems. To simplify the calculations, using the constructed analytic solutions of the Cauchy problem, tables of involved special functions are compiled. Examples of calculations are given that confirm the reliability of the derived formulas and illustrate the possibilities of the theory presented. Conclusions in the work are the result of theoretical analysis and calculations.

Keywords: nonlinear oscillator, rigid elasticity characteristic, impulse loading, dynamic coefficient, periodic Ateb-functions, elliptic cosine, integral representations, tables of special functions.

Вступ. Нелінійні механічні коливання з великими амплітудами можуть спричинити передчасне руйнування елементів конструкцій або суттєво скоротити їх робочий ресурс. Тому дослідження закономірностей таких коливань і розробка методів їх гасіння відносяться до актуальних науково-прикладних задач. Незважаючи на значні досягнення в цій галузі механіки [1], щорічно виходить з друку чимало нових наукових статей. Не аналізуючи їх змісту, відзначимо лише монографічні видання [2-5], в яких викладено методи досліджень, існуючі математичні моделі та проаналізовано одержані результати. Звертаємо увагу також на огляд [6], де йдеться про нелінійні коливання систем змінної маси. Такі системи, за наявності сухого тертя, розглядали також в [7, 8]. Враховуючи, що у відомих публікаціях, в основному вивчали вільні та вимушені періодичні коливання, на відміну від них, тут розглядаємо рух осцилятора, спричинений дією силового імпульса.

Метою статті є виведення та апробація розрахункових формул для визначення переміщень нелінійного осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при дії силового імпульса.

Йдеться про два варіанти силового навантаження. У першому розглядаємо імпульс миттєво прикладеної сталої сили, а в другому – імпульс обмеженої тривалості дії. Для проведення досліджень використовуємо метод припасовування розв'язків, який поширений у нелінійній динаміці. Розв'язки нелінійної задачі Коші будемо з використанням затабульованих спеціальних функцій, що спрощує практичне використання таких розв'язків. Вірогідність виведених формул перевіряємо проведенням числових розрахунків. Щоб придати більшу універсальність теоретичним результатам, їх подаємо в безрозмірній формі.

Викладення основного матеріалу. Будемо розрізняти два варіанти зовнішнього навантаження: дію ступінчастого імпульсу сталої сили та дію прямокутного імпульсу обмеженої тривалості.

1. У першому варіанті навантаження рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{3/2} \operatorname{sign}(x) = P \cdot H(t), \quad (1)$$

при нульових початкових умовах:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Тут m – маса осцилятора; $c > 0$ – характеристика його жорсткості; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(t)$ – одинична функція Хевісайда; $x(t)$ – переміщення осцилятора з вихідного положення $x = 0$; t – час; крапка над x означає похідну по t .

Заміною $\dot{x} = v$, $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$, при $t > 0$, $x > 0$, рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{P}{m} - \frac{c}{m} x^{3/2}. \quad (3)$$

Інтегруванням (3), з урахуванням (2), отримуємо:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm 2 \sqrt{\frac{c}{5m}} \sqrt{x(a^{3/2} - x^{3/2})}. \quad (4)$$

Тут $a = \left(\frac{5P}{2c}\right)^{2/3}$ – максимальне динамічне пере-

міщення осцилятора, при якому $v = 0$.

Якщо врахувати, що статичне переміщення x_{CT} дорівнює $x_{CT} = \left(\frac{P}{c}\right)^{2/3}$, то легко знайти коефіцієнт динамічності K_g . Він становить:

$$K_g = \frac{a}{x_{CT}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2/3} \approx 1,842 < 2,$$

тобто він менший, ніж у лінійного осцилятора.

Взявши знак плюс перед радикалом в (4), подальшим інтегруванням цього виразу отримуємо:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{c}{5m}} t &= \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y(a^{3/2} - y^{3/2})}} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\sqrt{\frac{c\sqrt{a}}{5m}} t &= \int_0^{x/a} \frac{dz}{\sqrt{z(1 - z^{3/2})}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Переходом до нової змінної інтегрування $z = u^2$; $dz = 2u du$, виразу (5) надаємо форму:

$$\int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1 - u^3}} = \omega t, \quad (6)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{c\sqrt{a}}{5m}}$.

Співвідношення (6) дає можливість виразити x через t . При цьому існують два варіанти такої аналітичної залежності. Перший варіант пов'язаний з використанням періодичних Атеб-функцій [9-11]. Із (6) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = Sa^2\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right). \quad (7)$$

Тут $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right)$ – Атеб-синус.

Щоб спростити розрахунки по формулі (7), наводимо табл. 1 задіяної спеціальної функції.

Таблиця 1 – Значення $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right)$

ωt	$10Sa(\dots)$	ωt	$10Sa(\dots)$	ωt	$10Sa(\dots)$
0,00	0,00	0,50	4,92	1,00	8,83
0,05	0,50	0,55	5,39	1,05	9,10
0,10	1,00	0,60	5,84	1,10	9,33
0,15	1,50	0,65	6,28	1,15	9,53
0,20	2,00	0,70	6,71	1,20	9,70
0,25	2,50	0,75	7,12	1,25	9,83
0,30	2,99	0,80	7,51	1,30	9,92
0,35	3,48	0,85	7,88	1,35	9,98
0,40	3,97	0,90	8,22	1,402	10,00
0,45	4,45	0,95	8,54		

Зазначимо, що $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \omega t\right) = 1$, коли $\omega t = J$, де

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} \approx 1,402182.$$

Щоб поширити табл. 1 на проміжок $\omega t \in (J, 2J)$, треба врахувати, що:

$$Sa\left(2, 1, \frac{3}{2}\omega t\right) = Sa\left[2, 1, \frac{3}{2}(2J - \omega t)\right]. \quad (8)$$

Отже, табл. 1 дає можливість розрахувати переміщення на першому циклі коливань $\omega t \in (0, 2J)$, що потім легко поширити і на інші цикли.

Для отримання другої форми аналітичної залежності x від t , проведемо наступне перетворення в (6):

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{x/a}} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \\ &= J - \int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \omega t. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\int_{\sqrt{x/a}}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = J - \omega t = \tau. \quad (9)$$

Інтеграл в лівій частині виразу (9) зводиться до неповного еліптичного інтеграла першого роду. Так, згідно з [12, с. 126]:

$$\int_z^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F(\varphi, \sin 75^\circ), \quad \cos \varphi = \frac{z-1+\sqrt{3}}{1-z+\sqrt{3}}.$$

Тому із (9) отримуємо:

$$\frac{x}{a} = \left[1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right)} \right]^2. \quad (10)$$

Тут $cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, \sin 75^\circ\right)$ – еліптичний косинус Якобі. Для обчислення його значень можна використовувати таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, надруковані в [13, с. 103] і в [14].

Розглянемо приклади розрахунків.

Приклад 1. Обчислимо безрозмірне переміщення осцилятора при $\omega t = 0,9$. Використовуючи табл. 1 і формулу (7), одержуємо $x/a \approx 0,676$. У другій формі аналітичного розв'язку: $\tau \approx 0,5022$; $\sqrt[4]{3}\tau \approx 0,6609$. Для цього аргументу в табл. в [13, с. 103] знаходимо, що $\varphi \approx 35,537$. Тоді $cn\left(\sqrt[4]{3}\tau, \sin 75^\circ\right) = \cos \varphi \approx 0,8137$ і по формулі (10) одержуємо $x/a \approx 0,676$, що збігається з попереднім результатом.

Приклад 2. Знайдемо відношення x/a , коли $\omega t = 2,6 > J$. Для такого моменту часу $2J - \omega t \approx 0,2044$ і в табл. 1 йому відповідає $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 0,2044\right) \approx 0,2044$. Тоді формула (7) дає $x/a \approx 0,0416$. Якщо для обчислення переміщення використовувати еліптичний косинус, то: $\tau \approx -1,1978$; $\sqrt[4]{3}|\tau| \approx 1,5764$. В табл. в [13, с. 103] знаходимо, що $\varphi \approx 68,255^\circ$. При такому φ $cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau|, \sin 75^\circ\right) = \cos \varphi \approx 0,3705$ і по формула (10) дає

$x/a \approx 0,0418$, що було одержано раніше з використанням Аfeb-сінуса.

Розв'язки (7) і (10) мають геометричний образ, а саме графік коливань осцилятора, спричинених миттєво прикладеною силою. Він зображений на рис. 1, де вказано один цикл коливань, що легко поширити і на подальші цикли.

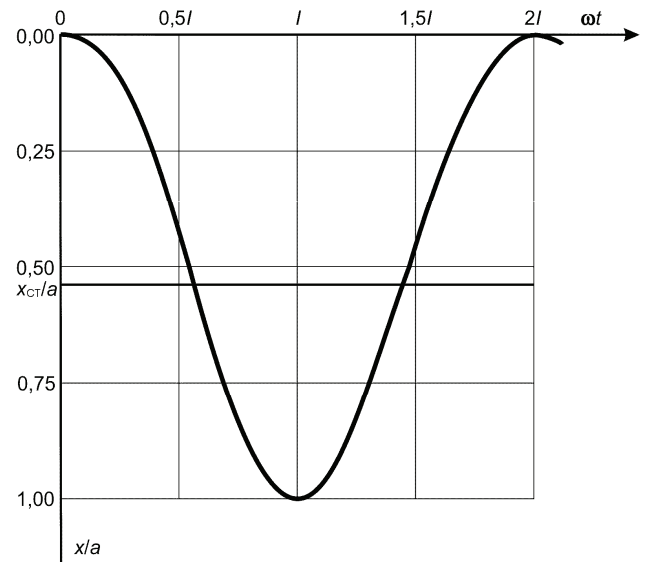


Рисунок 1 – Графік коливань при дії миттєво прикладеної сили

2. Рух осцилятора при дії імпульсу обмеженої тривалості. Його описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c|x|^{3/2} \text{sign}(x) = P \cdot [H(t) - H(t - t_1)]. \quad (11)$$

Тут t_1 – час миттєвого розвантаження осцилятора.

Початковими умовами зберігаємо (2). Тому на проміжку $t \in [0; t_1]$ залишаються в силі формули (7) і (10). Переміщення осцилятора в момент його розвантаження дорівнює:

$$\begin{aligned} x_1 = x(t_1) &= a Sa^2\left(2, 1, \frac{3}{2}\omega t_1\right) \text{ або} \\ x &= a \left[1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau_1|, \sin 75^\circ\right)}{1 + cn\left(\sqrt[4]{3}|\tau_1|, \sin 75^\circ\right)} \right]^2, \end{aligned} \quad (12)$$

де $\tau_1 = J - \omega t_1$.

Рух в цей момент часу проходить зі швидкістю:

$$v_1 = v(t_1) = \pm 2a\omega \sqrt{\frac{x_1}{a} \left[1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^{3/2} \right]}. \quad (13)$$

Знак плюс маємо при $\omega t_1 < J$ і мінус – при $J < \omega t_1 < 2J$.

Тому розглянемо спочатку рух осцилятора при $v_1 > 0$, а потім при $v_1 < 0$.

2.1. Припускаємо, що $\omega t_1 < J$. При $t > t_1$ рівняння (11) стає однорідним з початковими умовами $x(t) = x_1$; $v(t) = v_1 > 0$. Розвантажений осцилятор продовжує віддалятися від положення $x = 0$, так що $x(t) > x_1$. Пе-

рший інтеграл однорідного рівняння руху, при вказаних початкових умовах, має вигляд:

$$v = \frac{dx}{dt} = a_* \omega_* \sqrt{1 - (x/a_*)^{5/2}}, \quad (14)$$

де $a_* = a \cdot \lambda$; $\lambda = \left(\frac{x_1}{a}\right)^{2/5}$; $\omega_* = 2 \frac{\sqrt{c\sqrt{a_*}}}{\sqrt{5m}} = 2\omega \sqrt[4]{\lambda}$.

Подальше інтегрування виразу (14) дає:

$$\int_{x_1}^x \frac{dy}{a_* \sqrt{1 - (y/a_*)^{5/2}}} = \int_{x_1/a_*}^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = \omega_*(t - t_1),$$

або

$$\int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = I_* - \omega_*(t - t_1) = \xi. \quad (15)$$

Тут $I_* = \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}}$ потребує окремого обчислення.

Щоб провести його прийемо до уваги, що відношення x_1/a_* близьке до одиниці. Виходячи з цього, замінимо u на $1 - \varepsilon$, де ε мала величина. Далі використаємо апроксимацію:

$$1 - u^{5/2} = 1 - (1 - \varepsilon)^{5/2} = \frac{5}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon\right) + O(\varepsilon^3).$$

У прийнятому наближенні:

$$I_* \approx \int_0^{1-x_1/a_*} \frac{d\varepsilon}{\frac{5}{2}\varepsilon \left(1 - \frac{3}{4}\varepsilon\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \arcsin \frac{\sqrt{3(1-x_1/a_*)}}{2}. \quad (16)$$

Якщо застосовувати періодичні Атеб-функції [9–11], то матимемо залежність між I_* і x_1/a_* у вигляді:

$$\frac{x_1}{a_*} = Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} I_*\right), \quad (17)$$

де $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} I_*\right)$ Атеб-косинус. Використовуючи таблицю цієї спеціальної функції, теж можна обчислювати I_* при відомому x_1/a_* . Згадана таблиця буде зручною і для розрахунку переміщень осцилятора, бо із (15) випливає, що:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right). \quad (18)$$

Отже, з метою спрощення розрахунків, наводимо таблицю Атеб-косинуса.

Щоб з'ясувати похибки наближеної формули (16), обчислимо двома способами значення інтеграла I_* . Приймаючи відношення $x_1/a_* = 0,6$, по формулі (16) одержуємо $I_* \approx 0,847$. Якщо використати залежність (17) і провести інтерполяцію даних в табл. 2, то:

$$I_* \approx 0,8 + \frac{0,6 - 0,637}{0,595 - 0,637} \cdot 0,05 \approx 0,844.$$

Одержані значення I_* для деяких відношень x_1/a_* записано в табл. 3.

У чисельниках I_* одержані по формулі (16), а в знаменниках – інтерполяцією даних табл. 3. Маємо гарну узгодженість результатів розрахунку різними способами.

Таблиця 2 – Значення $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right)$

ξ	$10Ca(\dots)$	ξ	$10Ca(\dots)$	ξ	$10Ca(\dots)$
0,00	10,00	0,60	7,87	1,20	2,70
0,05	9,98	0,65	7,52	1,25	2,21
0,10	9,94	0,70	7,16	1,30	1,71
0,15	9,86	0,75	6,77	1,35	1,22
0,20	9,75	0,80	6,37	1,40	0,716
0,25	9,61	0,85	5,95	1,45	0,216
0,30	9,45	0,90	5,52	1,4716	0,000
0,35	9,25	0,95	5,07		
0,40	9,02	1,00	4,61		
0,45	8,77	1,05	4,15		
0,50	8,50	1,10	3,67		
0,55	8,20	1,15	3,19		

Таблиця 3 – Обчислені двома способами значення I_*

$10 x_1/a_*$	6	7	8	9	10
$10 I_*$	$\frac{8,47}{8,44}$	$\frac{7,22}{7,21}$	$\frac{5,81}{5,80}$	$\frac{4,05}{4,04}$	$\frac{0,00}{0,00}$

Співвідношення (15) дає можливість знайти час $t = t_2$, коли осцилятор зупиниться, відхилившись на $x = a_*$. Із нього випливає, що:

$$\omega_* t_2 = I_* + \omega_* t_1 \quad \text{або} \quad \omega t_2 = \frac{I_*}{2\sqrt[4]{\lambda}} + \omega t_1. \quad (19)$$

Підкреслимо, що формула (18) описує рух розвантаженого осцилятора лише на проміжку $t \in (t_1; t_2)$. Подальший його рух, при $t > t_2$, зводиться до вільних коливань з амплітудою a_* відносно положення $x = 0$. Із (12) випливає, що ця амплітуда максимальна, причому $\max a_* = a$, коли $\omega t_1 = J$. Така тривалість імпульсу призводить до найбільшого розгойдування коливань розвантаженого осцилятора. На відміну від лінійних систем, ця тривалість залежить і від величини прикладеної сили, з якою пов'язано значення ω .

Приклад 3. Обчислимо час першої зупинки осцилятора t_2 , якщо $\omega t_1 = 0,8$. Для такої тривалості імпульсу по формулі (12), з використанням табл. 1, одержуємо: $x_1/a \approx 0,564$. Тоді, $\lambda \approx 0,795$; $x_1/a_* = 0,709$ і по формулі (16) знаходимо $I_* \approx 0,710$. Отже, згідно з (19) $\omega t_2 \approx 1,176$. З'ясуємо далі, яким буде відхилення x/a при $\omega t = 1$. Для цього моменту часу $\xi \approx I_* - 2\sqrt[4]{\lambda}(\omega t - \omega t_1) \approx 0,332$. Інтерполяцією чисел в табл. 2 отримуємо: $Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4} \xi\right) \approx 0,932$ і по формулі (18) знаходимо $x/a \approx 0,741$.

2.2. Виведемо далі формули для розрахунку руху осцилятора, коли $\omega t_1 > J$, $v_1 < 0$. Помінявши знак у правій частині виразу (14), інтегруванням його отримуємо:

$$\int_{x/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1 - u^{5/2}}} = \omega_*(t - t_1). \quad (20)$$

Тепер: $0 \leq x \leq x_1$.

Проведемо наступне перетворення в (20):

$$\int_{x_1/a_*}^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} - \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} =$$

$$= J_* - \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \omega_*(t-t_1). \quad (21)$$

Тут

$$J_* = \int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} - \int_{x_1/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = I - I_*.$$

$$\text{Інтеграл } I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} \approx 1,47164, \text{ тому обчис-$$

лення J_* , по суті, зводиться до обчислення I_* , яким займалися вище.

Вираз (21) набуває вигляд:

$$\int_0^{x_1/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^{5/2}}} = \zeta = J_* - \omega_*(t-t_1). \quad (22)$$

Він дає можливість знайти час t_2 , коли осцилятор повертається у вихідне положення $x = 0$, бо:

$$\omega_* t_2 = J_* + \omega_* t_1 \text{ або } \omega t_2 = \frac{J_*}{2\sqrt{\lambda}} + \omega t_1. \quad (23)$$

Із (22) випливає також залежність x від t . Вона має вигляд:

$$\frac{x}{a} = \lambda \cdot Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right), \quad (24)$$

де $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right)$ – Атеб-синус. Для обчислення його значень теж можна використовувати табл. 2, бо:

$$Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right) = Ca\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}(I-\zeta)\right). \quad (25)$$

Приклад 4. Обчислимо час повернення осцилятора у вихідне положення $x = 0$, коли $\omega t_2 = 2$. Для вказаної тривалості дії імпульсу, згідно з (8), $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 2\right) \approx Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 0,8044\right)$. Тоді, методом інтерполяції даних в табл. 1, одержуємо $Sa\left(2, 1, \frac{3}{2} \cdot 2\right) \approx 0,754$, що після підстановки в (12) дає $x_1/a \approx 0,569$. Цьому відношенню відповідає: $\lambda \approx 0,798$; $x_1/a_* = 0,713$. Для такого x_1/a_* по формулі (16) знаходимо $I_* \approx 0,705$. Оскільки $J_* \approx 1,47164 - 0,705 \approx 0,767$, то за формулою (23) отримуємо $\omega t_2 \approx 2,406$.

Знайдемо положення осцилятора, коли $\omega t = 2,2$. У цей момент часу: $\zeta \approx 0,389$; $I - \zeta \approx 1,083$. В табл. 2, з урахуванням (25), інтерполяцією отримуємо $Sa\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\zeta\right) \approx 0,383$. Подальша підстановка цього значення Атеб-синуса в (24) дає $x/a \approx 0,306$.

Після повернення у вихідне положення розвантажений осцилятор буде продовжувати вільні коливання, якщо $v_1 < 0$. У випадку повернення з нульовою швидкістю, вільних коливань не буде. Із (12) і (13) випливає, що такий стан спокою маємо, коли $\omega t_1 = 2J$.

При цій тривалості імпульсу миттєво розвантажений осцилятор буде знаходитись у нерухомому стані.

Висновки

1. Коефіцієнт динамічності розглянутого осцилятора з жорсткою характеристикою пружності, при дії прикладеної сталої сили, менший двох.

2. Існують дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння коливань осцилятора при дії сталої сили. У перший, переміщення осцилятора у часі виражається через Атеб-синус, а в другий – через еліптичний косинус.

3. Після розвантаження, переміщення осцилятора зручно обчислювати за допомогою складеної таблиці Атеб-косинуса.

4. Існують такі тривалості прямокутного імпульсу, для яких амплітуди вільних коливань розвантаженого осцилятора мають найбільше і найменше значення, причому найменше дорівнює нулю, що відповідає стану спокою коливальної системи.

Список літератури

1. Ларин А.А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А.А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.
2. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин // Том 1: Модели, методы, явления. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
3. Митропольський Ю.А. Избранные труды в 2-х томах / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
4. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П.Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
5. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передаточных машин / В.М. Шатохин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.
6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system / L. Cveticanin // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2012. – Vol. 6, № 1. – P. 56-74.
7. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський, Л.М. Тищенко. – Х.: Міськдрук, 2016. – 264 с.
9. Грицик В.В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій / В.В. Грицик, М.А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 2007. – № 12. – С. 37-42.
10. Сокіл Б.І. Про застосування Атеб-функцій для побудови розв'язків деяких рівнянь, які описують нелінійні коливання одновимірних середовищ / Б.І. Сокіл // Доповіді Національної академії наук України. – К.: 1997. – № 1. – С. 55-58.
11. Кузьо І.В. Теоретична механіка. Динаміка / І.В. Кузьо, Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько. – Львів: Львівська політехніка, 2012. – Кн. 1. – 442 с.
12. Прудников А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев // Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.
13. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде,

Ф. Леш. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

14. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

References (transliterated)

1. Larin A.A. Essays history of development theory of mechanical oscillations. Sevastopol: Weber, 2013. 403 p.

2. Avramov K.V., Michlin Y.V. nonlinear dynamics of elastic. Volume 1: Models, Methods, phenomena. Moscow-Izhevsk: Institute of research of computer, 2010. 704 p.

3. Mitropol'skij Ju.A. Izbrannye trudy v 2-h tomah. Kyiv: Naukova dumka, 2012. 504 p.

4. Pukach P.Y. Qualitative methods of nonlinear vibration systems. Lviv: Lviv Polytechnic National University, 2014. 288 p.

5. Shatokhin V.M. Analysis and parametric synthesis of nonlinear power transmission of machines. Kharkiv: NTU «KhPI», 2008. 456 p.

6. Cveticanin L. A review on dynamics of mass variable system. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. 2012. Vol. 6, No 1. P. 56-74.

7. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. The VBK method in calculations of nonstationary oscillations of an oscillator. Kharkiv: Miskdruk, 2014. 264 p.

8. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V., Tishchenko L.M. Dynamics dissipative oscillators. Kharkiv: Miskdruk, 2016. 264 p.

9. Grytsyk V.V., Nazarkevych M.A. Mathematical models and algorithms implementation Ateb functions. Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kyiv: 2007. No 12. P. 37-42.

10. Sokil B.I. Pro zastosuvannya Ateb-funkcij dlja pobudovi rozv'jazkiv dejakih rivnjan', jaki opisujut' nelinijni kolivannya odnovimernih seredovishh. Dopovidi Nacional'noї akademii nauk Ukraїni. Kyiv: 1997. No 1. P. 55-58.

11. Kuzio I.V., Vankovich T.-N.M., Zin'ko Ya.A. Theoretical Mechanics. Dynamics. Lviv: Lviv Polytechnic, 2012. Kn. 1st. 442 p.

12. Prudnykov A.P., Brychkov A.A., Marychev O.I. Integrals and series. Elementary functions. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

13. Janke E., Emde F., Lesch F. Special functions. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

14. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

Надійшла (received) 10.04.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasyl Pavlovych) – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich) – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com