

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

**Вільні коливання осцилятора з синусоїдальною силовою характеристикою / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 58-63. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

**Свободные колебания осциллятора с синусоидальной силовой характеристикой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 58-63. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

**Free oscillation oscillator with sinusoidal power characteristic / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 40 (1262). – P. 58-63. – Bibliogr.: 7. – ISSN 2078-9130.

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Olshanskiy Vasyl Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Petro Vasilenk Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Phd in Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasilenk Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

УДК 534.1 : 539.3

**В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

**ПРО КОЕФІЦІЄНТ ДИНАМІЧНОСТІ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА**

Сформульована і доведена геометричним способом теорема про коефіцієнт динамічності нелінійної коливальної системи з одним ступенем вільності, згідно з якою коефіцієнт динамічності менший двох при жорсткій силовій характеристиці системи і більший двох – при м'якій характеристиці. Показано, що на відміну від лінійних систем, у загальному випадку, коефіцієнт динамічності нелінійної системи залежить від величини миттєво прикладеної сталої сили, але виконуються вказані вище нерівності. Наведено приклади розрахунків, які підтверджують теорему.

**Ключові слова:** нелінійний осцилятор, миттєво прикладена стала сила, оцінки коефіцієнта динамічності.

Сформулирована и доказана геометрическим способом теорема о коэффициенте динамичности нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы, согласно которой коэффициент динамичности меньше двух при жесткой силовой характеристике системы и больше двух – при мягкой характеристике. Показано, что в отличие от линейных систем, в общем случае, коэффициент динамичности нелинейной системы зависит от величины мгновенно приложенной постоянной силы, но выполняются указанные выше неравенства. Приведены примеры расчетов, которые подтверждают теорему.

**Ключевые слова:** нелинейный осциллятор, мгновенно приложена постоянная сила, оценки коэффициента динамичности.

A theorem on the coefficient of dynamism of a nonlinear oscillatory system with one degree of freedom is formulated and proved by a geometric method, according to which the dynamic coefficient is less than two for a rigid power characteristic of the system and more than two for a soft characteristic. It is shown that, in contrast to linear systems, in general, the dynamic coefficient of a nonlinear system depends on the magnitude of the instantaneously applied constant force, but the above inequalities are satisfied. Examples of calculations are presented, confirm the theorem.

**Keywords:** a nonlinear oscillator, instantaneous constant force, an estimate of the dynamic coefficient.

**Вступ.** Коефіцієнт динамічності використовують для розрахунку максимальних переміщень, а іноді й напружень, при дії силових імпульсних навантажень. У лінійних недисипативних систем [1, 2] від залежить від тривалості дії (ширини) і не залежить від величини

прикладеної сили, тобто висоти прямокутного імпульса. У випадку миттєво прикладеної сталої сили коефіцієнт динамічності дорівнює двом. Але ці властивості не виконуються для нелінійних систем [3, 4, 5]. Тому зупинимось на визначенні коефіцієнта динамічності у

нелінійного осцилятора при загальних припущеннях стосовно його силової характеристики.

**Метою статті** є виведення нерівностей для загальної оцінки значень коефіцієнтів динамічності в осциляторів з різними варіантами силових характеристик.

**Викладення основного матеріалу.** Переміщення коливальної системи  $x(t)$  у часі  $t$  описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + f_1(x) = P_1 H(t), \quad (1)$$

у якому  $m$  – маса осцилятора;  $f_1(x)$  характеристика його пружності або відновлююча сила;  $P_1$  – величина миттєво прикладеної сили;  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Далі рівнянню (1) надаємо форму:

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = PH(t) - f(x), \quad (2)$$

де  $f(x) = f_1(x)/m$ ;  $P = P_1/m$ .

Його доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (3)$$

Першим інтегралом (2), з урахуванням (3), є:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{Px - \int_0^x f(u) du}. \quad (4)$$

Позначимо через  $x_c$  і  $x_g$  відповідно статичне і максимальне динамічне відхилення системи від положення  $x = 0$ . Статичне відхилення задовольняє рівнянню:

$$f(x_c) = P. \quad (5)$$

При  $\dot{x} = 0$   $x = x_g$ . Тому, згідно з (4), максимальне динамічне відхилення повинно задовольняти рівнянню:

$$Px_g = \int_0^{x_g} f(u) du \quad \text{або} \quad P = \frac{1}{x_g} \int_0^{x_g} f(u) du. \quad (6)$$

Коефіцієнт динамічності  $K_g$  визначаємо за традиційною формулою:

$$K_g = x_g / x_c. \quad (7)$$

Для зручності формулювань далі  $f(x)$  будемо називати силовою функцією, оскільки вона характеризує відновлюючу силу, що дістається на одиницю маси.

Враховуючи (5), виразу (6) надаємо вигляд:

$$f(x_c) = \frac{1}{x_g} \int_0^{x_g} f(u) du. \quad (8)$$

Отже, значення силової функції при статичному переміщенні дорівнює середньому інтегральному значенню цієї функції на проміжку динамічного деформування  $x \in [0; x_g]$ .

Вирази (7) і (8) використаємо для геометричного доведення наступної теореми.

**Якщо на проміжку динамічного деформування нелінійної системи  $x \in (0; x_g]$  функції  $f(x)$  і  $f'_x(x)$  неперервні й монотонні, причому  $f(0) = 0$ , то при**

**$f''_x(x) > 0$  коефіцієнт динамічності  $K_g < 2$ , а при  $f''_x(x) < 0 - K_g > 2$ .**

Розглянемо спочатку випадок, коли  $f''_x(x) > 0$ , тобто графік  $f(x)$  вгнутий при  $x \in [0; x_g]$ . Цей графік зображено на рис. 1. Разом з координатними вісями він утворює заштриховану фігуру  $OCx_g$ . Площа цієї фігури більша, ніж площа прямокутника  $OBV'x_g$ , що має висоту  $f(x_g/2)$ , тобто виконується нерівність:

$$\int_0^{x_g} f(u) du > x_g f(x_g/2)$$

або

$$f(x_c) = \frac{1}{x_g} \int_0^{x_g} f(u) du > f(x_g/2). \quad (9)$$

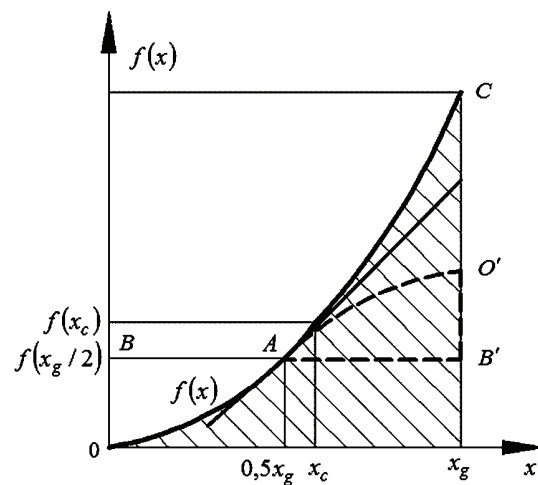


Рисунок 1 – До визначення  $x_c$  при  $f''_x(x) > 0$

Щоб переконатись у цьому, повернемо фігуру  $ABO$  навколо точки  $A$  на  $180^\circ$ , у положення  $AB'O'$ . Після такого повороту стає видно, що площа фігури  $AB'O'$  менша, ніж у фігури  $AB'C$ , бо за умовою теореми дуга  $AO'$  лежить під дотичною до графіка  $f(x)$  в точці  $A$ , а дуга  $AC$  – над цією дотичною. Тому має місце нерівність (9), з якої випливає, що:  $x_c > x_g/2$ , або, згідно з (7):  $K_g < 2$ .

У другому випадку, коли  $f''_x(x) < 0$ , графік функції  $f(x)$  випуклий, що показано на рис. 2. Площа заштрихованої фігури  $OCx_g$  менша, ніж у прямокутника  $OB'V'x_g$ . Це наслідок того, що площа фігури  $OAB'$  більша, ніж у фігури  $ABC$ . Тому виконується нерівність:

$$x_g f(x_g/2) > \int_0^{x_g} f(u) du \quad \text{або} \quad f(x_g/2) > f(x_c).$$

Із неї, з урахуванням (7), випливає, що:

$$x_c < x_g/2 \Rightarrow K_g > 2.$$

Для лінійного осцилятора  $f(x) = kx$  і підстановка цієї залежності в (8) дає:

$$k x_c = k \frac{x_g^2}{2} \Rightarrow x_c = \frac{1}{2} x_g \Rightarrow K_g = 2,$$

що узгоджується з загальноприйнятим положенням.

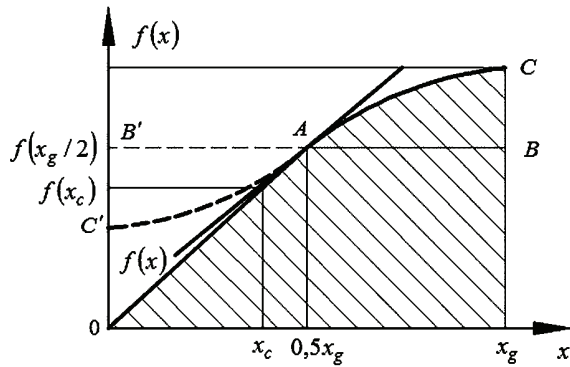


Рисунок 2 – До визначення  $x_c$  при  $f''_x(x) < 0$

Щоб перевірити виконання тверджень теореми розглянемо приклади розрахунків.

**Приклад 1.** Нехай силова функція подається виразом [5]  $f(x) = k|x|^v \cdot \text{sign}(x)$ , у якому  $v > 0$ . При  $0 < v < 1, x > 0, f''_x(x) < 0$ , силова характеристика осцилятора м'яка, а при  $v > 1, x > 0, f''_x(x) > 0$  вона жорстка. Підстановка прийнятої степеневі функції  $f(x)$  в (8) дає:

$$kx_c^v = k \frac{x_g^v}{v+1} \Rightarrow \frac{x_g}{x_c} = K_g = (1+v)^{1/v}.$$

При  $v = 2, K_g = \sqrt{3} \approx 1,732 < 2$ . Раніше таке значення  $K_g$  було одержано в [3]. При  $v = 3, K_g = \sqrt[3]{4} \approx 1,587$ . До такого значення  $K_g$  раніше прийшли в [4]. Як бачимо, в цих випадках виконуються положення теореми.

**Приклад 2.** При коливаннях математичного маятника його рух описується рівнянням [6]:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = \frac{P_1}{ml} H(t),$$

у якому  $\varphi$  – кут відхилення маятника від вертикалі;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $l$  – довжина маятника;  $m$  – його маса;  $P_1$  – величина миттєво прикладеної сили, яка залишається перпендикулярною до нитки маятника. Силова функція подається виразом:

$$f(\varphi) = \frac{g}{l} \sin \varphi. \tag{10}$$

Для визначення статичного відхилення маятника  $\varphi_c$  від вертикалі маємо рівняння:

$$f(\varphi_c) = \frac{g}{l} \sin \varphi_c = \frac{P_1}{ml}.$$

Звідки знаходимо, що:

$$\varphi_c = \arcsin \frac{P_1}{mg}.$$

Підстановкою (10) в (8) отримуємо:

$$\sin \varphi_c = \frac{1 - \cos \varphi_g}{\varphi_g},$$

що дає залежність між максимальним динамічним відхиленням  $\varphi_g$  і статичним  $\varphi_c$ . Це трансцендентне рівняння підлягає числовому розв'язуванню. Щоб не

виконувати його, задамо три різних значення  $\varphi_g$  і знайдемо відповідні їм значення  $K_g$ . Результати розрахунків заносимо в табл. 1.

Таблиця 1 – Значення коефіцієнта динамічності математичного маятника

$\varphi_g$	$\varphi_c$	$K_g$	$P_1/mg$
$\pi/4$	0,3822	2,055	0,373
$\pi/3$	0,4978	2,104	0,477
$\pi/2$	0,6901	2,276	0,636

Тут коефіцієнт динамічності зростає зі збільшенням величини прикладеної сили. Він більший двох, бо математичний маятник відноситься до коливальних систем з м'якою силовою характеристикою.

**Приклад 3.** Розглянемо осцилятор з м'якою силовою характеристикою:

$$f(x) = \alpha x + \beta \sqrt{|x|} \text{sign}(x),$$

де  $\alpha > 0, \beta \geq 0; f''_x(x) < 0$  при  $x > 0$ .

У цьому випадку:

$$x_c = \left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2} - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2;$$

$$x_g = \left( \sqrt{\frac{2P}{\alpha} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{2\beta}{3\alpha} \right)^2;$$

$$K_g = \frac{\left( \sqrt{\frac{2P}{\alpha} + 4\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{2\beta}{3\alpha} \right)^2}{\left( \sqrt{\frac{P}{\alpha} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} - \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2}. \tag{11}$$

При  $\beta = 0, K_g = 2$ , що відповідає теорії лінійного осцилятора. При  $\beta > 0, K_g > 2$ , в чому переконають результати обчислень  $K_g$  по формулі (11), записані в табл. 2.

Результати розрахунків  $K_g$  відповідають теоремі.

Таблиця 2 – Значення  $K_g$  при  $P/\alpha = 0,05$  м і різних  $\beta/\alpha$

$\beta/\alpha, \text{м}^{1/2}$	0,00	0,0	0,5	1,0	1,5
$K_g$	2,000	2,051	2,180	2,228	2,238

**Приклад 4.** Знайдемо коефіцієнти динамічності в осцилятора з жорсткою характеристикою пружності, коли

$$f(x) = \alpha \left( e^{\lambda|x|} - 1 \right) \cdot \text{sign}(x),$$

$$\alpha > 0, \lambda > 0.$$

Тут  $f''_x(x) > 0$  при  $x > 0$ .

Маємо співвідношення:

$$\alpha \left( e^{\lambda x_c} - 1 \right) = P = \frac{\alpha}{\lambda x_g} \left( e^{\lambda x_g} - 1 - \lambda x_g \right).$$

Із нього випливає, що:

$$\lambda x_c = \ln \left[ \frac{1}{\lambda x_g} \left( e^{\lambda x_g} - 1 - \lambda x_g \right) + 1 \right].$$

Користуючись цією залежністю, при заданні  $\lambda x_g$ , легко обчислити  $\lambda x_c$ , а потім і  $K_g$ . Одержані таким чином результати записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення  $K_g$  і  $P$  для різних  $\lambda x_g$ 

$\lambda x_g$	$\lambda x_c$	$K_g$	$P/\alpha$
0,1	0,0504	1,984	0,0517
0,5	0,2604	1,920	0,2974
1,0	0,5413	1,847	0,7182
1,5	0,8421	1,781	1,3212

Розрахунки показують, що при жорсткій характеристиці пружності з ростом величини миттєво прикладеної сили відбувається зменшення коефіцієнта динамічності і він залишається меншим двох.

**Висновки.** На відміну від лінійних систем, у нелінійних осциляторів, при дії миттєво прикладеної сили, коефіцієнт динамічності залежить від величини навантаження. Він менший двох при жорсткій характеристиці пружності та більший двох при м'якій характеристиці.

#### Список літератури:

1. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
2. Вибрации в технике: Справочник в 6-и томах – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – 352 с.
3. Ольшанський В. П. Коливання квадратично нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 39 (1261). – С. 62-67.

#### Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

**Про коефіцієнт динамічності нелінійного осцилятора / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ».** Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 63-66. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

**Про коэффициент динамичности нелинейного осцилятора / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ».** Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 63-66. – Бібліогр.: 6 назв. – ISSN 2078-9130.

**The coefficient of dynamism of a nonlinear oscillator / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of NTU "KhPI".** Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 40 (1262). – P. 63-66. – Bibliogr.: 6. – ISSN 2078-9130.

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Василь Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Olshanskiy Vasyly Pavlovych** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильович** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Ольшанський Станіслав Васильевич** – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com

**Olshanskiy Stanislav Vasilevich** – Phd in Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

4. Ольшанський В. П. Коливання кубічно нелінійного осцилятора, спричинені імпульсним навантаженням / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 86-94.

5. Ольшанський В. П. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2017. – № 3 (86). – С. 34-40.

6. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

#### References (transliterated):

1. Panovko Ya. G. Fundamentals of the Applied Theory of Oscillations and Shock. Leningrad: Mechanical Engineering, 1976. 320 p.

2. Vibrations in technics: A guide in 6 volumes – Moscow: Mechanical Engineering, 1978. Vol. 1. Oscillations of linear systems; Ed. V.V. Bolotin. 352 p.

3. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Oscillations of a quadratically nonlinear oscillator caused by impulse loading. Bulletin of NTU «KhPI». Series : Dynamics and strength of machines. Kharkiv: NTU «KhPI», 2017. No 39 (1261). PP. 62-67.

4. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. Oscillations of a cubically nonlinear oscillator caused by impulse loading. Bulletin of the NTU «KhPI». Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. Kharkiv: NTU «KhPI», 2017. No 6 (1228). PP. 86-94.

5. Olshanskiy V.P., Olshanskiy S.V. On the motion of an oscillator with a power characteristic of elasticity. Vibrations in technics and technologies: All-Ukrainian scientific and technical journal. Vinnytsya, 2017. No 3 (86). PP. 34-40.

6. Babakov I.M. Theory of fluctuations. Moscow: Drofa, 2004. 591 p.

Надійшла (received) 22.10.2017