УДК 534.1 : 559.3

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З СИНУСОЇДАЛЬНОЮ СИЛОВОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

Розглянуто нелінійні коливання, спричинені або початковим відхиленням осцилятора від положення рівноваги або наданою йому в цьому положенні початковою швидкістю. Припускається, що відновлююча сила пропорційна синусу переміщення коливальної системи. Передбачено два варіанти синуса: тригонометричний і гіперболічний. У першому варіанті силова характеристика осцилятора м'яка, а в другому – жорстка. При м'якій силовій характеристиці введено потрібні обмеження на початкові збурення системи. Побудовано в еліптичних функціях точні аналітичні розв'язки нелінійної задачі Коші. Виведено та апробовано розрахунками замкнені формули для обчислення переміщень осцилятора та періода циклічного руху. Щоб спростити розрахунки, у разі відсутності таблиць еліптичних функцій Якобі, запропоновано наближені подання їх в елементарних функціях. Наведено приклади розрахунків.

Ключові слова: вільні нелінійні коливання, пружний осцилятор, синусоїдальна силова характеристика, нелінійна задача Коші, аналітичний розв'язок, еліптичні функції.

Рассмотрены нелинейные колебания, вызванные или начальным отклонением осциллятора от положения равновесия или данной ему в этом положении начальной скоростью. Предполагается, что восстанавливающая сила пропорциональна синусу перемещения колебательной системы. Предусмотрено два варианта синуса: тригонометрический и гиперболический. В первом варианте силовая характеристика осциллятора мягкая, а во втором – жесткая. При мягкой силовой характеристике введено необходимые ограничения на начальные возмущения системы. Построено в эллиптических функциях точные аналитические решения нелинейной задачи Коши. Выведено и апробировано расчетами замкнутые формулы для вычисления перемещений осциллятора и периода циклического движения. Чтобы упростить расчеты, в случае отсутствия таблиц эллиптических функций Якоби, предложено приближенные представления их в элементарных функциях. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: свободные нелинейные колебания, упругий осциллятор, синусоидальная силовая характеристика, нелинейная задача Коши, аналитическое решение, эллиптические функции.

Nonlinear oscillations caused by the initial deviation of the oscillator from the equilibrium position or the initial velocity given to it in this position are considered. It is assumed that the restoring force is proportional to the sine of the displacement of the oscillatory system. There are two variants of the sine: trigonometric and hyperbolic. In the first variant, the power characteristic of the oscillator is soft, and in the second, it is rigid. With a soft power characteristic, restrictions on the initial perturbations of the system are introduced. The exact analytic solutions of the nonlinear Cauchy problem are constructed in elliptic functions. Closed formulas for calculating the displacements of the oscillator and the period of cyclic motion are derived and tested by calculations. To simplify the calculations, in the absence of tables of elliptic Jacobi functions, approximate representations of them in elementary functions are proposed. Examples of calculations are given.

Keywords: free nonlinear oscillations, elastic oscillator, sinusoidal force characteristic, nonlinear Cauchy problem, analytic solution, elliptic functions.

Вступ. Теорії нелінійних коливань осцилятора, у якого відновлююча сила пропорційна тригонометричному синусу від переміщення системи, присвячено багато публікацій, з яких, перш за все, виділимо довідник [1], де наведено формули для обчислення частоти вільних коливань, спричинених початковим відхиленням від положення рівноваги. У математичному аспекті ця задача аналогічна задачі нелінійних коливань математичного маятника, де відновлюючою силою є сила гравітації. Про коливання математичного маятника йдеться в [2-4] та інших публікаціях, в яких для опису руху використано різні наближені й точні методи. На відміну від згаданих робіт, нижче робимо наголос на описі руху з використанням затабульованих спеціальних функцій.

Метою статті є побудова нових форм замкнутих аналітичних розв'язків нелінійної задачі Коші та ілюстрація можливостей одержаних розрахункових формул.

Досягнення поставленої мети здійснено внаслідок зведення другого інтегралу диференціального рівняння руху до неповного еліптичного інтеграла першого роду та використання функцій Якобі.

Граничним переходом із розв'язків нелінійної задачі одержано відомі результати в теорії лінійних коливань осциляторів.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо спочатку варіант апроксимації силової характеристики тригонометричним синусом.

1. Рух осцилятора з м'якою силовою характеристикою описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \alpha \sin(\beta x) = 0 . \qquad (1)$$

У ньому $|\beta x| < \pi$; m – маса осцилятора; $x = x(t)$ – лінійне переміщення в напрямі координатної вісі ox; $\alpha, \beta > 0$ – сталі коефіцієнти; крапка над x означає похідну за часом t.

Рівняння (1) доповнюємо двома варіантами початкових умов:

а) $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ або

б) $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \upsilon_0$. (2)

Тут a – амплітуда вільних коливань (початкове відхилення системи); υ_0 – надана початкова швидкість.

Уведенням позначення $\beta x = y$ рівнянню (1) можна надати форму:

$$m\ddot{y} + F(y) = 0,$$

де $F(y) = \alpha\beta \sin(y) = 0$.

Таку форму рівняння (1), при $\beta = 1$, знаходимо в [1].

З метою інтегрування (1) подамо його у вигляді:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\alpha}{m}\sin(\beta x).$$

Провівши інтегрування цього виразу, отримуємо з точністю до сталої c

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\frac{\alpha}{m\beta}\cos(\beta x) + c}\ . \qquad (3)$$

Далі знайдемо залежність $x(t) > 0$ для початкових умов а) в (2), коли $c = -2\frac{\alpha}{m\beta}\cos(\beta a)$.

У цьому випадку маємо:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}\sqrt{\cos(\beta x) - \cos(\beta a)}$$

і його інтегрування дає:

$$\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{\cos(\beta x) - \cos(\beta a)}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\cos(\beta x) - \cos(\beta a)}} -$$

$$-\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\cos(\beta x) - \cos(\beta a)}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\beta}}t. \qquad (4)$$

Початкове (амплітудне) відхилення осцилятора від положення $x = 0$ обмежуємо нерівністю $\beta a < \pi$, коли $\sin(\beta a) > 0$.

Ліва частина в (4) виражається через неповні еліптичні інтеграли першого роду. Дійсно, згідно з [5, с. 197]:

$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{b\cos z + d}} = \frac{\sqrt{2}}{b}F(\gamma_1, k), \qquad (5)$$

де $\gamma_1 = \arcsin\sqrt{\frac{b(1-\cos x)}{b+d}}$; $k = \sqrt{\frac{b+d}{2b}}$, $|d| \le b$, $F(\gamma_1,k)$ – неповний еліптичний інтеграл першого роду.

Поклавши в (5) $b = 1$, $d = -\cos(\beta a)$; $b + d = 2\sin^2\frac{\beta a}{2}$, вираз (4) зводимо до співвідношення:

$$K(k) - F(\gamma, k) = \omega t,$$

у якому $\gamma = \arcsin\frac{\sin(\beta x/2)}{\sin(\beta a/2)}$; $k = \sin\frac{\beta a}{2}$; $\omega = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{m}}$; $K(k)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду.

Оскільки: $\sin\frac{\beta x}{2} = \sin\frac{\beta a}{2}\sin\gamma$, а $F(\gamma,k) = K(k) - \omega t = \tau$, то за теорією еліптичних функцій [6, 7], одержуємо:

$$x(t) = \frac{2}{\beta}\arcsin[k \cdot \operatorname{sn}(\tau, k)]. \qquad (6)$$

Тут $sn(\tau,k)$ – еліптичний синус Якобі.

Формула (6) описує переміщення осцилятора на першому напівциклі коливань, коли $\omega t \in [0; 2K(k)]$. Біля кінцевих точок проміжку маємо:

$\omega t \to 0$, $\tau \to K(k)$; $\operatorname{sn}(\tau,k) \to 1$, $x \to a$;

$\omega t \to 2K(k)$, $\tau \to -K(k)$; $\operatorname{sn}(\tau,k) \to -1$, $x \to -a$.

Період коливань становить:

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{\alpha\beta}}K(k), \qquad (7)$$

що при $\beta = 1$ узгоджується з [1, с. 256].

Період збільшується зі збільшенням амплітуди коливань, що властиво нелінійним система з м'якою характеристикою пружності.

Поряд з (6) можлива й інша форма розв'язку розглянутої задачі руху. Якщо виходити з неперетвореної залежності:

$$\gamma = \arcsin\sqrt{\frac{b(1-\cos\beta x)}{b+d}}\ ,$$

то:

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\arccos\left[1 - 2k^2 \cdot \operatorname{sn}^2(\tau,k)\right]\operatorname{sign}(\tau).$$

Ця формула дає такі ж значення переміщення, як і (6).

Із (6) і (7) випливають загальновідомі результати в теорії лінійних коливань осцилятора, коли у рівнянні (1) $\sin(\beta x)$ замінити на βx, що допустимо при малих βa. Тоді: $k \sim 0$, $K(k) \sim \pi/2$, $\tau \sim \pi/2 - \omega t$, $\operatorname{sn}(\tau, k) \sim \sin(\tau)$ і замість (6) і (7) отримуємо:

$$x(t) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = a\cos\omega t,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\alpha\beta}} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (8)$$

Побудуємо далі розв'язок рівняння (1) для початкових умов б) в (2), У цьому випадку $c = \upsilon_0^2 - \frac{2\alpha}{m\beta}$ і вираз (3) набуває вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\beta m}}\sqrt{\cos(\beta x) - \left(1 - \frac{\beta m\upsilon_0^2}{2\alpha}\right)}. \qquad (9)$$

Тут накладаємо обмеження на початкову швидкість:

$$\upsilon_0 < 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta m}}\ ,$$

бо маємо систему з м'якою характеристикою пружності.

Подальше інтегрування виразу (9) призводить до співвідношення:

$$\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{\cos\beta z - \left(1 - \frac{\beta m\upsilon_0^2}{2\alpha}\right)}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta m}}t,$$

яке, з урахуванням (5), зводиться до:

$$F(\varphi, k_*) = \omega t. \qquad (10)$$

Тут $\varphi = \arcsin\dfrac{\sin(\beta x/2)}{k_*}$, $k_* = \dfrac{\upsilon_0}{2}\sqrt{\dfrac{\beta m}{\alpha}}$.

У підсумку одержуємо розв'язок:

$$x(t) = \frac{2}{\beta}\arcsin\left[k_*\cdot \operatorname{sn}(\omega t, k_*)\right], \tag{11}$$

який описує переміщення осцилятора на інтервалі $\omega t \in \left[0, 2K(k_*)\right]$. Враховуючи, що період коливань становить:

$$T_* = \frac{4}{\omega}K(k_*), \tag{12}$$

результати обчислень по формулі (11) легко поширити і на більші ωt. Для обчислення значення повного еліптичного інтеграла першого роду $K(k_*)$ можна використовувати його таблицю, надруковану в [7, с. 114]. Як бачимо, період T_* залежить від υ_0, що властиво нелінійним системам.

Якщо враховувати, що $\varphi = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-\cos(\beta x)}{2k_*^2}}$,

то розв'язок задачі, яку розглядаємо, можна також подати у вигляді:

$$x = \frac{1}{\beta}\arccos\left[1 - 2k_*^2\cdot \operatorname{sn}^2(\omega t, k_*)\right].$$

При малих k_* граничний перехід: $k_* \to 0$; $\operatorname{sn}(\omega t, k_*) \to \sin(\omega t)$; $K(k_*) \to \pi/2$ в (11) і (12) дає відповідно:

$$x(t) = \frac{\upsilon_0}{\omega}\sin(\omega t),\ T_* = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{13}$$

що загальновідомо в теорії лінійних коливань.

2. Розглянемо далі коливання осцилятора з жорсткою силовою характеристикою. Рух описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + \alpha\cdot \operatorname{sh}(\lambda x) = 0, \tag{14}$$

у якому $\alpha, \lambda > 0$.

При цьому зберігаємо початкові умови (2).

Для інтегрування рівняння (14) подамо його у вигляді:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -\frac{\alpha}{m}\operatorname{sh}(\lambda x).$$

Провівши інтегрування, отримуємо з точністю до сталої c_1:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \pm\sqrt{c_1 - \frac{2\alpha}{\lambda m}\operatorname{ch}(\lambda x)}. \tag{15}$$

У випадку початкових умов а) в (2), коли $c_1 = \dfrac{2\alpha}{\lambda m}\operatorname{ch}(\lambda a)$, $\dot{x} < 0$, подальше інтегрування виразу (15) дає:

$$\int_{\lambda x}^{\lambda a}\frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda a) - \operatorname{ch} z}} = \sqrt{2}\omega_1 t,\ \omega_1 = \sqrt{\frac{\alpha\lambda}{m}}. \tag{16}$$

Ліва частина в (16) виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду, бо в [5, с. 157]:

$$\int_{x}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{a_1 - b\operatorname{ch} x}} = \frac{2}{\sqrt{a_1 + b}}F(\psi_1, r_1). \tag{17}$$

При цьому $a_1 > b > 0$, $0 < x < x_1$,
$\psi_1 = \arcsin\sqrt{\dfrac{a_1 - b\operatorname{ch} x}{a_1 - b}}$, $r_1 = \sqrt{\dfrac{a_1 - b}{a_1 + b}}$; $x_1 = \operatorname{Ar\,ch}\left(\dfrac{a_1}{b}\right)$.

Тому, прийнявши $a_1 = \operatorname{ch}(\lambda a)$, $b = 1$, виразу (17) надаємо форму:

$$F(\psi, r) = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}(\lambda a) + 1}}{\sqrt{2}}\omega_1 t = \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda a}{2}\right)\omega_1 t = \xi. \tag{18}$$

Тут $\psi = \arcsin\sqrt{1 - \dfrac{\operatorname{ch}^2(\lambda x/2)}{\operatorname{ch}^2(\lambda a/2)}}$: $r = \operatorname{th}\dfrac{\lambda a}{2}$.

Із залежності (18) випливає, що:

$$x(t) = \frac{2}{\lambda}\operatorname{Ar\,sh}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda a}{2}\right)\operatorname{cn}(\xi, r)\right], \tag{19}$$

де ch(ξ,r) – еліптичний косинус Якобі.

Формула (19) описує переміщення осцилятора на першому напівциклі коливань, коли $\xi \in \left[0; 2K(r)\right]$.

Біля кінців вказаного проміжку маємо:
$\xi \to 0$, $\operatorname{cn}(\xi, r) \to 1$, $x(t) \to a$;
$\xi \to 2K(r)$, $\operatorname{cn}(\xi, r) \to -1$, $x(t) \to -a$.

Результати обчислень по формулі (19) потім легко поширити і на більші значення ξ, оскільки період коливань T становить:

$$T = \frac{4}{\omega_1\operatorname{ch}\left(\dfrac{\lambda a}{2}\right)}K(r). \tag{20}$$

Характерно, що зі збільшенням амплітуди коливань зменшується їх період T, що властиво системам з жорсткою характеристикою пружності.

Якщо виходити з того, що

$$\psi = \arcsin\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\lambda a) - \operatorname{ch}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda a) - 1}},$$

то:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda}\operatorname{Ar\,ch}\left[\operatorname{ch}(\lambda a) - (\operatorname{ch}(\lambda a) - 1)\operatorname{sn}^2(\xi, r)\right]\times$$
$$\times\operatorname{sign}(K(r) - \xi).$$

У випадку малих амплітуд коливань, коли: $\xi \sim \omega_1 t$, $r \sim 0$, $\operatorname{cn}(\xi, r) \sim \cos(\omega_1 t)$, $K(r) \sim \pi/2$, із (19) і (20) одержуємо (8), що відповідає лінійному варіанту теорії.

З'ясуємо далі яким буде розв'язок рівняння (14) при початкових умовах б) в (2). Для цих початкових умов $c_1 = \upsilon_0^2 + \dfrac{2\alpha}{\lambda m}$ і вираз (15) набуває формулу:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\lambda m}}\sqrt{1 + \frac{\lambda m\upsilon_0^2}{2\alpha} - \operatorname{ch}(\lambda x)}.$$

Подальше інтегрування призводить до залежності:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1 + \dfrac{\lambda m\upsilon_0^2}{2\alpha} - \operatorname{ch}(\lambda x)}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda m}}t,$$

або

$$\int_0^{\lambda a_*} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}\lambda a_* - \operatorname{ch} z}} - \int_{\lambda x}^{\lambda a_*} \frac{dz}{\sqrt{\operatorname{ch}\lambda a_* - \operatorname{ch} z}} = \sqrt{2}\,\omega_1 t\,, \quad (21)$$

де $\operatorname{ch}\lambda a_* = 1 + \frac{\lambda m \upsilon_0^2}{2\alpha} \Rightarrow \lambda a_* = \operatorname{Ar}\operatorname{ch}\left(1 + \frac{\lambda m \upsilon_0^2}{2\alpha}\right)$.

Приймаючи до уваги (17), залежності (21) надаємо вигляд:

$$F(\psi_*, r_*) = K(r_*) - \operatorname{ch}\frac{\lambda a_*}{2}\cdot\omega_1 t = \eta\,. \quad (22)$$

Тут $\psi_* = \arcsin\sqrt{1 - \frac{\operatorname{ch}^2(\lambda x/2)}{\operatorname{ch}^2(\lambda a_*/2)}}$: $r_* = \operatorname{th}\frac{\lambda a_*}{2}$.

Із (22) витікає, що:

$$x = \frac{2}{\lambda}\operatorname{Ar}\operatorname{sh}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\lambda a_*}{2}\right)\operatorname{cn}(\eta, r_*)\right] \quad (23)$$

або

$$x = \frac{1}{\lambda}\operatorname{Ar}\operatorname{ch}\left[\operatorname{ch}(\lambda a_*) - (\operatorname{ch}(\lambda a_*) - 1)\operatorname{sn}^2(\eta, r_*)\right]. \quad (24)$$

Формули (23), (24) описують рух осцилятора на проміжку $t \in [0; T^*/2]$, причому період коливань становить:

$$T^* = \frac{4}{\omega_1 \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda a_*}{2}\right)} K(r_*). \quad (25)$$

Період T^* зменшується при збільшенні початкової швидкості υ_0.

Аналіз формул (23) і (24) показує, що при:

$t \to 0$, $\eta \to K(r_*)$, $\operatorname{cn}(\eta, r_*) \to 0$, $\operatorname{sn}(\eta, r_*) \to 1$, $x \to 0$;

$t \to T^*/4$, $\eta \to 0$, $\operatorname{ch}(\eta, r_*) \to 1$, $\operatorname{sn}(\eta, r_*) \to 0$, $x \to a$;

$t \to T^*/2$, $\eta \to -K(r_*)$, $\operatorname{cn}(\eta, r_*) \to 0$, $\operatorname{sn}(\eta, r_*) \to -1$, $x \to 0$,

що відповідає першому напівциклу коливань. Обчислені на цьому проміжку часу $x(t)$ потім легко поширити *і* на більші t.

Якщо початкова швидкість мала, то $\lambda a_* << 1$. Тоді $r_* \sim 0$, $K(r_*) \sim \pi/2$, $\eta \sim \pi/2 - \omega_1 t$, $\operatorname{cn}(\eta, r_*) \sim \cos\eta$, $\operatorname{sn}(\eta, r_*) \sim \sin\eta$ і формули (23) і (25) мають наближення (13).

Для розрахунку переміщень осцилятора за допомогою побудованих розв'язків потрібно обчислювати значення періодичних еліптичних функцій. У разі відсутності таблиць названих функцій, це можна проводити наближено по формулах:

$$\operatorname{sn}(\tau, k) = \sin[\theta(\tau, k)],\ \operatorname{cn}(\tau, k) = \cos[\theta(\tau, k)], \quad (26)$$

де

$$\theta(\tau, k) = \frac{\pi\tau}{2K} + \frac{2q}{1+q^2}\sin\frac{\pi\tau}{K} + \frac{q^2}{1+q^4}\sin\frac{2\pi\tau}{K};$$

$$q = \exp\left(-\frac{\pi K_*}{K}\right);\ K = K(k),\ K_* = K\left(\sqrt{1-k^2}\right).$$

Тут для розрахунків потрібна лише таблиця повного еліптичного інтеграла першого роду, надрукована, наприклад, в [7, с. 114].

З метою перевірки вірогідності виведених формул розглянемо числові приклади.

Приклад 1. Користуючись формулою (6), обчислимо переміщення осцилятора при $\beta a = \frac{5\pi}{6}$, $k = \sin 75^0$, $K(k) = 2{,}7681$. Одержані значення переміщення для різних моментів часу у безрозмірній формі записано в табл. 1.

Таблиця 1 – Безрозмірні переміщення, обчислені по (6)

ωt	τ	βx	x/a
0,0000	2,7681	2,618	1,000
1,1213	1,6468	2,275	0,869
1,7710	0,9971	1,666	0,636
2,2207	0,5474	1,008	0,385
2,5927	0,1754	0,337	0,129
2,7681	0,0000	0,000	0,000
3,1240	–0,3539	–0,673	–0,257
4,0518	–1,2837	–1,982	–0,757
4,9020	–2,1339	–2,514	–0,961
5,5362	–2,7681	–2,618	–1,000

Тут значення $\operatorname{sn}(\tau,k)$ обчислювали за допомогою таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду [7, с. 101]. Одержані результати легко поширити і на більші значення ωt.

Приклад 2. Користуючись формулою (11), обчислимо переміщення осцилятора, спричинені наданою йому початковою швидкістю, коли $k_* = 0{,}866 = \sin 60^0$. Результати обчислень для різних моментів часу заносимо в табл. 2.

Таблиця 2 – Результати розрахунків по (11)

ωt	βx	x/a	ωt	βx	x/a
0,0000	0,000	0,000	2,1565	2,094	1,000
0,3545	0,601	0,287	2,5005	2,043	0,975
0,7436	1,181	0,564	3,1004	1,696	0,810
1,2126	1,696	0,810	3,5694	1,181	0,564
1,8125	2,043	0,975	3,9585	0,601	0,287

При цьому було враховано, що $K(r_*) = 2{,}1565$. При $\omega t = K(k_*)$ досягається максимальне відхилення системи від положення рівноваги. Цей час залежить і від величини наданої осцилятору початкової швидкості υ_0, в чому проявляється особливість нелінійної системи.

Приклад 3. Обчислимо переміщення осцилятора з жорсткою характеристикою пружності. Для проведення розрахунків задаємо $\lambda a = 3{,}4708$, чому відповідає $r = \sin 70^0$, $K(r) = 2{,}5046$. Результати обчислень λx по формулі (19) заносимо в табл. 3.

Ці переміщення одержано для першого розмаху коливань з крайнього правого у крайнє ліве положення. Їх легко поширити і на інші розмахи.

Таблиця 3 – Результати розрахунків по (19)

$\omega_1 t$	ξ	λx	x/a
0,0000	0,000	3,471	1,000
0,1216	0,3555	3,354	0,966
0,2577	0,7535	2,979	0,858
0,4316	1,2619	2,245	0,647
0,6881	2,0118	0,921	0,265
0,8566	2,5045	0,000	0,000
1,0252	2,9974	–0,921	–0,265
1,1674	3,4132	–1,676	–0,483
1,3755	4,0216	–2,668	–0,769
1,5266	4,4634	–3,203	–0,923
1,6533	4,8339	–3,442	–0,992
1,7133	5,0093	–3,471	–1,000

Приклад 4. З'ясуємо якими будуть переміщення осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при наданні йому початкової швидкості υ_0. Для проведення розрахунків по формулі (23), приймаємо $\lambda a_* = 2{,}02134$, чому відповідає $r_* = \sin 50^0$, $K(r_*) = 1{,}9356$. Результати обчислень по формулі (23) заносимо в табл. 4.

Таблиця 4 – Результати розрахунків по (23)

$\omega_1 t$	η	λx	x/a_*
0,0000	1,9356	0,000	0,000
0,1733	1,6660	0,411	0,203
0,4958	1,1643	1,131	0,559
0,7735	0,7323	1,637	0,810
1,0171	0,3533	1,927	0,954
1,2442	0,000	2,021	1,000
1,4713	–0,3533	1,927	0,954
1,7149	–0,7323	1,637	0,810
1,9926	–1,1643	1,131	0,559
2,3151	–1,6660	0,411	0,203
2,4884	–1,9356	0,000	0,000

Маємо симетричний розподіл переміщень x/a_* відносно $\eta = 0$.

У наведених прикладах, для розрахунку руху осцилятора, значення еліптичних функцій знаходили за допомогою таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду [7, с. 101-103].

Таблиця 5 – Обчислені двома способами значення еліптичних функцій

τ	$\theta(\tau,k)$, град.	$\sin(\tau,k)$	$\mathrm{cn}(\tau,k)$
0,1753	10,000 9,939	0,174 0,173	0,985 0,985
0,5459	30,000 29,920	0,500 0,499	0,866 0,867
0,9876	50,000 50,054	0,766 0,767	0,643 0,642
2,0119	80,000 79,922	0,985 0,985	0,174 0,175
2,5046	90,000 90,000	1,000 1,000	0,000 0,000

При відсутності таких таблиць обчислення $\sin(\tau,k)$ і $\mathrm{cn}(\tau,k)$ можна проводити наближено по формулі (26). Про похибки цієї формули надана інформація в табл. 5, де дані в чисельниках одержано за допомогою таблиць неповного еліптичного інтеграла, а в знаменниках по формулі (26). Для проведення розрахунків задавали $k = \sin 70^0$; $K = 2{,}5046$; $K_* = 1{,}6200$.

Як бачимо, формула (26) з досить високою точністю подає значення еліптичних функцій, причому її точність підвищується зі зменшенням *k*.

Висновки. Проведене дослідження показало, що рівняння руху осцилятора з синусоїдальними характеристиками пружності мають точні аналітичні розв'язки в еліптичних функціях. Проведені розрахунки підтвердили вірогідність виведених формул для обчислення переміщень коливальної системи. Для обчислення значень еліптичних функцій, окрім відомих їх таблиць, можна використовувати одержані наближені їх вирази через елементарні функції.

Список літератури:

1. Прочность устойчивость, колебания : справочник в 3-х тт. / Под ред. *И. А. Биргера, Я. Г. Пановко*. – М.: Машиностроение, 1968. – Том. 3. – 568 с.

2. *Бабаков И. М.* Теория колебаний / *И. М. Бабаков*. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

3. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский*. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / *Э. Камке*. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

5. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / *А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев* // Элементарные функции. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

6. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / *А. Абрамовиц, И. Стиган*. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

7. *Янке Е.* Специальные функции / *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш*. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

References (transliterated):

1. Strength stability, fluctuations : a reference book in 3 vol.; Ed. I. A. Birger, G. G. Panovko. Moscow: Mashinostroenie, 1968. Vol. 3. 568 p.

2. Babakov I M. Theory of fluctuations. Moscow: Drofa, 2004. 591 p.

3. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu. A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. Moscow: Science, 1974. 504 p.

4. Kamke E. Handbook of ordinary differential equations. Moscow: Science, 1976. 576 p.

5. Prudnikov A.P., Brychkov Ju.A., Marichev O.I. Integraly i rjady. Jelementarnye funkcii. Moscow: Nauka, 1981. 800 p.

6. Abramovits A., Stigan I. Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables). Moscow: Science, 1979. 832 p.

7. Janke E., Jemde F., Ljosh F. Special'nye funkcii. Moscow: Nauka, 1977. 344 p.

Надійшла (received) 15.10.2017

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

Вільні коливання осцилятора з синусоїдальною силовою характеристикою / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 58-63. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

Свободные колебания осциллятора с синусоидальной силовой характеристикой / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2017. – № 40 (1262). – С. 58-63. – Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2078-9130.

Free oscillation oscillator with sinusoidal power characteristic / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy// Bulletin of NTU "KhPI". Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2017. – № 40 (1262). − P. 58-63. – Bibliogr.: 7. – ISSN 2078-9130.

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Ольшанський Василь Павлович – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Василий Павлович – доктор физико-математических наук, профессор, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (066) 010-09-55; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Olshanskiy Vasyl Pavlovych – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (066) 010-09-55, e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com

Ольшанський Станіслав Васильович – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

Ольшанський Станислав Васильевич – кандидат физико-математических наук, Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенка, тел. (057) 343-29-41; e-mail: stasolsh77@gmail.com

Olshanskiy Stanislav Vasilevich – Phd in Physical and Mathematical Sciences, Petro Vasilenkj Kharkiv National Technical University of Agriculture, Tel. (057) 343-29-41, e-mail: stasolsh77@gmail.com

УДК 534.1 : 539.3

В.П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С.В. ОЛЬШАНСЬКИЙ

ПРО КОЕФІЦІЄНТ ДИНАМІЧНОСТІ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Сформульована і доведена геометричним способом теорема про коефіцієнт динамічності нелінійної коливальної системи з одним ступенем вільності, згідно з якою коефіцієнт динамічності менший двох при жорсткій силовій характеристиці системи і більший двох – при м’якій характеристиці. Показано, що на відміну від лінійних систем, у загальному випадку, коефіцієнт динамічності нелінійної системи залежить від величини миттєво прикладеної сталої сили, але виконуються вказані вище нерівності. Наведено приклади розрахунків, які підтверджують теорему.

Ключові слова: нелінійний осцилятор, миттєво прикладена стала сила, оцінки коефіцієнта динамічності.

Сформулирована и доказана геометрическим способом теорема о коэффициенте динамичности нелинейной колебательной системы с одной степенью свободы, согласно которой коэффициент динамичности меньший двух при жесткой силовой характеристике системы и больше двух – при мягкой характеристике. Показано, что в отличие от линейных систем, в общем случае, коэффициент динамичности нелинейной системы зависит от величины мгновенно приложенной постоянной силы, но выполняются указанные выше неравенства. Приведены примеры расчетов, которые подтверждают теорему.

Ключевые слова: нелинейный осциллятор, мгновенно приложена постоянная сила, оценки коэффициента динамичности.

A theorem on the coefficient of dynamism of a nonlinear oscillatory system with one degree of freedom is formulated and proved by a geometric method, according to which the dynamic coefficient is less than two for a rigid power characteristic of the system and more than two for a soft characteristic. It is shown that, in contrast to linear systems, in general, the dynamic coefficient of a nonlinear system depends on the magnitude of the instantaneously applied constant force, but the above inequalities are satisfied. Examples of calculations are presented, confirm the theorem.

Keywords: a nonlinear oscillator, instantaneous constant force, an estimate of the dynamic coefficient.

Вступ. Коефіцієнт динамічності використовують для розрахунку максимальних переміщень, а іноді й напружень, при дії силових імпульсних навантажень. У лінійних недисипативних систем [1, 2] від залежить від тривалості дії (ширини) і не залежить від величини прикладеної сили, тобто висоти прямокутного імпульса. У випадку миттєво прикладеної сталої сили коефіцієнт динамічності дорівнює двом. Але ці властивості не виконуються для нелінійних систем [3, 4, 5]. Тому зупинимось на визначенні коефіцієнта динамічності у